Egzamin sprawdzający na studia doktoranckie z matematyki na UJ
25 września 2012

Czas trwania: 180 minut

Rozwiązać należy pięć dowolnie wybranych zadań.

1. (matematyka dyskretna) Niech $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq b$, zaś A będzie macierzą prostokątną o wymiarach $2^n \times n$ ($n \geqslant 2$) i o wyrazach równych a lub b, w której żadne dwa wiersze nie są identyczne. Wykazać, że następujące dwa warunki są równoważne:

   (a) $\left\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \in \mathbb{Z}^{2^n}\right\} = \mathbb{Z}^n$,

   (b) $|a - b| = 1$.

2. (teoria mnogości) Dany niech będzie zbiór nieprzeliczalny X. Wykazać, że istnieje taki zbiór nieprzeliczalny J oraz taka rodzina zbiorów $\{X_j\}_{j\in J}$, że $X_j \cup X_k = X$ i $X_j \setminus X_k$ jest nieprzeliczalny dla dowolnych $j, k \in J$, $j \neq k$, oraz zbiór $\bigcap_{j\in J\setminus\{k\}} X_j$ jest przeliczalny dla dowolnego $k \in J$.

3. (algebra) Znaleźć liczbę klas sprzężoności dla grupy symetrycznej S_5.

4. (algebra) Wyznaczyć wszystkie (z dokładnością do izomorfizmu) grupy abelowe rzędu 72 i dla każdej z nich podać wszystkie przedstawienia w postaci sumy prostej grup cyklicznych.

5. (algebra liniowa) Obliczyć $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{10}$.

6. (analiza) Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ciągłą funkcją okresową o okresie $T > 0$. Wykazać istnienie granicy

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_0^T f(\alpha x)dx$$

   i obliczyć jej wartość.

7. (analiza/topologia) Niech $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie funkcją klasy C^1 o pochodnej ograniczonej przez pewną stałą $M < 1$ (to jest norma różniczki w każdym punkcie jest ograniczona przez M). Uzasadnić, że odwzorowanie

$$h : \mathbb{R}^n \ni x \to x + g(x) \in \mathbb{R}^n$$

   jest homeomorfizmem i h^{-1} spełnia warunek Lipschitza.

8. (analiza/równania różniczkowe) Niech $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie funkcją klasy C^1. Pokazać, że jeżeli dla każdego $z \in \mathbb{R}^2$ zachodzi

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(z) > 0 ,$$

   to równanie różniczkowe $z' = f(z)$ nie posiada niestacjonarnych rozwiązań okresowych.

9. (analiza zespolona) Udowodnić, że dla każdego $\lambda > 1$ równanie $ze^{\lambda - z} = 1$ ma dokładnie jeden pierwiastek w dysku jednostkowym $\mathbb{D}$, i że pierwiastek ten jest rzeczywisty.

10. (rachunek prawdopodobieństwa/analiza funkcjonalna) Niech $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych zbieżnych według prawdopodobieństwa do zmiennej losowej X. Pokazać, że X jest stała prawie wszędzie.

11. (rachunek prawdopodobieństwa) Niech $r \in \mathbb{R}$ będzie medianą zmiennej losowej X, czyli liczbą spełniającą warunek: $P(X \leqslant r) \geqslant 1/2$ i $P(X \geqslant r) \geqslant 1/2$. Udowodnić, że jeżeli $E(X) = m < \infty$ i $D^2(X) = \sigma^2 < \infty$, to $|r - m| \leqslant \sigma\sqrt{2}$.

12. (procesy stochastyczne/matematyka finansowa) Niech $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ oznacza (standardowy) proces Wienera. Pokazać, że proces $M_t = W_t^3 - 3tW_t$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$.