Egzamin sprawdzający na studia doktoranckie z matematyki na UJ
19 września 2011

Czas trwania: 180 minut

Rozwiązać należy pięć dowolnie wybranych zadań.
Wszystkie zadania są jednakowo punktowane.

1. (*teoria mnogości*) Wykazać, że istnieje nieprzeliczalna rodzina zbiorów nieprzeliczalnych $(X_t)_{t\in T}$, taka że dla dowolnych $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$ zbiór $X_{t_1} \cap X_{t_2}$ jest jednoelementowy, ale dla dowolnych trzech parami różnych $t_1, t_2, t_3 \in T$ zachodzi $X_{t_1} \cap X_{t_2} \cap X_{t_3} = \emptyset$.

2. (*matematyka dyskretna*) Zbadać, jakie wartości może przyjmować wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia 3 o wszystkich wyrazach równych -1 lub 1.

3. (*algebra*) Znaleźć wszystkie podgrupy abelowe grupy permutacji zbioru 4-elementowego Σ_4.

4. (*algebra liniowa*) Niech $n \geqslant 2$. Znaleźć rząd macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & \cdots & n^2 \end{bmatrix}.$$

5. (*analiza*) Znaleźć wszystkie $\alpha \in \mathbb{R}$, dla których zbiór

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x+y) = \alpha y\}$$

jest wykresem pewnej funkcji różniczkowalnej $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

6. (*analiza*) Dane niech będą funkcje $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ takie, że f jest funkcją malejącą oraz $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, zaś g jest ciągłą funkcją okresową o okresie $T > 0$ spełniającą warunek $\int_0^T g(x)dx = 0$. Wykazać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^\infty f(x)g(x)dx$.

7. (*analiza*) Niech $\alpha > 0$. Wykazać, że funkcja $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x,y) := \frac{\left(x^2\right)^\alpha + \left(y^2\right)^\alpha}{x^2+y^2}$$

dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ i spełniająca warunek $f(0,0) := 0$ jest różniczkowalna w $(0,0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha > 3/2$.

8. (*analiza zespolona*) Niech D będzie obszarem w $\mathbb{C}$, zaś $z_0 \in D$. Znaleźć wszystkie pary funkcji holomorficznych $f, g : D \mapsto \mathbb{C}$, takie że $f(z_0) = g(z_0) = 0$ oraz $|g(z)| = |f(z)|^{\sqrt{2}}$ dla każdego $z \in D$.

9. (*analiza/układy dynamiczne*) Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1, taką że $f(0) = 0$ oraz $|f'(0)| < 1$. Pokazać, że istnieje U, otwarte otoczenie 0, o tej własności, że $f^n(x) \to 0$ dla każdego $x \in U$, gdzie $f^n := \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n\text{-razy}}$.

10. (*analiza/układy dynamiczne*) Niech $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będą dyfeomorfizmami klasy C^∞, takimi że

$$f(0,0) = g(0,0) = (0,0)$$

oraz

$$f'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ g'(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Udowodnić, że nie istnieje dyfeomorfizm $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ klasy C^∞, taki że $h(0,0) = (0,0)$ oraz

$$h(f(x)) = g(h(x))$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}^2$.

11. (*równania różniczkowe*) Niech $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi. Pokazać, że problem

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(0) = x(1) \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_0^1 a(s)ds \neq 0$.

12. (*geometria różniczkowa*) Opisać krzywe geodezyjne na elipsoidzie w $\mathbb{R}^3$ danej równaniem $x^2 + y^2 + z^2/4 = 1$.

13. (*rachunek prawdopodobieństwa*) Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem zmiennych losowych zbieżnych stochastycznie do zmiennej losowej X, zaś λ_n ciągiem liczb rzeczywistych zbieżnych do 1. Pokazać, że ciąg zmiennych losowych $(\lambda_n X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zmierza również stochastycznie do X.

14. (*procesy stochastyczne/matematyka finansowa*) Rozwiązać stochastyczne równanie różniczkowe

$$dX_t = aX_t\,dt + bX_t\,dW_t$$

z warunkiem początkowym $X_0 \equiv 1$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, zaś $(W_t)_{t\geqslant 0}$ jest standardowym procesem Wienera.