Egzamin sprawdzający na studia doktoranckie z matematyki na UJ
19 września 2013

Czas trwania: 180 minut

Rozwiązać należy pięć dowolnie wybranych zadań.
Wszystkie zadania są jednakowo punktowane.

1. (*teoria liczb*) Niech ciąg liczb całkowitych $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia następujące warunki:

   - jest m-okresowy ($m \in \mathbb{N}$, $m > 1$), czyli $a_n = a_{n+m}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$;
   - dla każdej liczby pierwszej p zachodzi $a_p \equiv a_1 \pmod{p}$.

   Pokazać, że dla każdego $r \in \mathbb{N}$, jeżeli r i m są względnie pierwsze, to $a_r = a_1$.

2. (*algebra, geometria*) Pokazać, że grupa obrotów sześcianu jest izomorficzna z grupą permutacji S_4.

3. (*algebra, algebra liniowa*) Ustalić, ile jest odwracalnych macierzy wymiaru 3×3 z wyrazami z ciała dwuelementowego.

4. (*teoria miary*) Znaleźć wszystkie zbiory $A \subset [0,1]$ mające dokładnie sześć elementów i będące zbiorami wartości pewnej miary probabilistycznej.

5. (*analiza*) Niech $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą oraz nieograniczoną zarówno z dołu, jak i z góry. Wykazać, że f przyjmuje każdą wartość rzeczywistą nieskończenie wiele razy.

6. (*analiza*) Niech $a \in \mathbb{R}^n$, $||a|| < 1$. Znaleźć kres górny funkcji

   $$\{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leqslant 1\} \ni x \mapsto \frac{||x-a||^2}{(1-\langle a,x\rangle)^2} \in \mathbb{R} \ ,$$

   gdzie $\langle\cdot,\cdot\rangle$ oznacza standardowy (euklidesowy) iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$, zaś $||\cdot||$ generowaną przez niego normę.

7. (*geometria, analiza zespolona*) Niech $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Wykazać, że suma kwadratów długości wszystkich odcinków, których końcami są wierzchołki n-kąta wpisanego w koło jednostkowe jest mniejsza lub równa niż n^2. Podać przykład n-kąta, dla którego ta suma jest równa n^2.

8. (*analiza funkcjonalna*) Niech $C^1([0,1])$ oznacza przestrzeń Banacha funkcji rzeczywistych klasy C^1 na $[0,1]$ z normą daną wzorem

   $$\|f\| := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$$

   dla $f \in C^1([0,1])$. Pokazać, że odwzorowanie liniowe $C^1([0,1]) \ni f \mapsto f(\frac{1}{3}) - f'(\frac{2}{3}) \in \mathbb{R}$ jest ciągłe i obliczyć jego normę.

9. (*topologia, układy dynamiczne*) Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie ciągła. Pokazać, że zbiór
$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \overline{\{x, f(x), f^2(x), ...\}} = \mathbb{R}^n \right\} \ ,$$
gdzie $f^k := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k\text{-krotnie}}$, ma puste wnętrze.

10. (*równania różniczkowe*) Uzasadnić, że układ równań na płaszczyźnie
$$\begin{cases} x' = x + \sin(x^2 + x + 1) \ , \\ y' = -y + \cos\sqrt{y^2+1} \end{cases}$$
ma rozwiązanie stacjonarne i nie ma niestacjonarnych rozwiązań okresowych.

11. (*rachunek prawdopodobieństwa*) Niech $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie absolutnie ciągłym na przestrzeni probabilistycznej (Ω, Σ, P), oraz niech A_n $(n \in \mathbb{N})$ będzie zdarzeniem polegającym na wystąpieniu w chwili n rekordowej wartości ciągu $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, czyli
$$A_n := \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) > X_k(\omega) \ \text{ dla } k \in \mathbb{N},\ k < n\}$$
dla $n \in \mathbb{N}$. Pokazać, że ciąg $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem zdarzeń parami niezależnych i obliczyć prawdopodobieństwo każdego z nich.

12. (*procesy stochastyczne*) Niech $(W_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ będzie procesem Wienera, zaś $\alpha > 0$. Pokazać, że proces Ornsteina-Uhlenbecka $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ zdefiniowany równością
$$Y_t := e^{-\alpha t} W_{e^{2\alpha t}} \ ,$$
dla $t \in \mathbb{R}^+$, jest procesem stacjonarnym w szerszym sensie, czyli jego wartość oczekiwana jest stała, a funkcja kowariancji zależy tylko od modułu różnicy czasów.