

**Lista zagadnień do egzaminu magisterskiego na kierunku matematyka w roku 2023/24**  
- do wyboru zgodnie z punktem 4 Uchwały z 27 czerwca 2019 Rady Wydziału Matematyki i Informatyki UJ „Zasady przeprowadzania egzaminu dyplomowego na studiach stacjonarnych II stopnia na kierunku matematyka obowiązujące od rekrutacji 2019/2020”

Zgłaszając dany temat, należy:

- (a) znać wypowiedzi podstawowych definicji i twierdzeń, które go dotyczą,
- (b) znać przykłady ilustrujące występujące pojęcia (pozytywne i negatywne),
- (c) znać logiczne powiązania pomiędzy odpowiednimi pojęciami i twierdzeniami,
- (d) znać ewentualne zastosowania omawianego zagadnienia w innych dziedzinach matematyki lub w innych dziedzinach wiedzy.

1. Przestrzenie topologiczne, metody wprowadzania topologii. Bazy i bazy otoczeń. Topologia indukowana, topologia produktowa, topologia ilorazowa. Topologie na przestrzeniach funkcyjnych.

2. Ciągłość, homeomorfizmy, niezmienniki homeomorfizmów. Zwartość i ciągowa zwartość. Spójność, lukowa spójność, składowe spójne. Warunki równoważne spójności. Sumy i przecięcia zbiorów zwartych i zbiorów spójnych.

3. Aksjomaty oddzielania. Przestrzenie Hausdorffa, przestrzenie regularne, przestrzenie normalne. Przestrzenie  $T_{3/2}$ . Lemat Urysona. Twierdzenie Tietzego.

4. Przykłady przestrzeni metrycznych zupełnych, z uwzględnieniem przestrzeni Banacha i Hilberta. Twierdzenie Cantora o zstępującym ciągu zbiorów w przestrzeni zupełnej, Twierdzenie Banacha o punkcie stałym. Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym. Retrakt i retrakcja.

5. Przestrzenie metryczne i metryzowalne. Twierdzenia o metryzowalności. Odległość od zbioru. Zbiory gęste, przestrzenie ośrodkowe.

6. Grupa podstawowa. Homotopie odwzorowań, typ homotopii odwzorowań. Twierdzenie Jordana o rozcinaniu dla płaszczyzny i dla przestrzeni euklidesowej  $n$ -wymiarowej. Grupy homologii.

7. Ciągłość odwzorowań liniowych; warunki równoważne na ciągłość operatora, warunki równoważne na ciągłość funkcjonałów. Twierdzenie Riesz o postaci funkcjonału liniowego.

8. Przestrzenie Hilberta i nierówność Cauchy'ego-Schwarza. Nierówność Bessela. Charakteryzacje bazy ortonormalnej, szeregi Fouriera. Tożsamość Parsevala.

9. Twierdzenie Hahna-Banacha (wersja rzeczywista i ogólna); wnioski z twierdzenia Hahna-Banacha, twierdzenie o oddzielaniu zbiorów wypukłych (wersja rzeczywista i zespolona).

10. Przestrzenie Banacha. Twierdzenie Banacha-Alaoglu. Twierdzenie Banacha-Steinhaus. Twierdzenia Banacha o odwzorowaniu otwartym, odwzorowaniu odwrotnym i o wykresie domkniętym.

11. Sigma algebry: przykłady, iloczyny kartezjańskie, funkcje mierzalne, zbiory borelowskie. Miara: miara licząca, miara probabilistyczna, dystrybuanta. Twierdzenie Carathéodory'ego. Przeniesienie miary przez odwzorowanie. Iloczyn kartezjański miar.

12. Miara Lebesgue'a: zarys konstrukcji, zbiory miary zero, zbiory niemierzalne i rozkłady paradoksalne.

13. Całka; przykłady całek względem: miary liczącej, miary Lebesgue'a, miary zadanej przez dystrybuantę, całka względem transportu miary. Twierdzenie Fubini'ego, Zasada Cavalieriego. Zamiana zmiennych w całce. Porównanie całek Riemanna i Lebesgue'a.

Aktualizacja: 7 grudnia 2023 r.

**Lista zagadnień do egzaminu magisterskiego na kierunku matematyka w roku 2023/24**  
- do wyboru zgodnie z punktem 4 Uchwały z 27 czerwca 2019 Rady Wydziału Matematyki i Informatyki UJ „Zasady przeprowadzania egzaminu dyplomowego na studiach stacjonarnych II stopnia na kierunku matematyka obowiązujące od rekrutacji 2019/2020”

14. Miara absolutnie ciągła, gęstość. Twierdzenie Radona-Nikodyma. Twierdzenie o zmianie miary w całości.
15. Twierdzenia o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki, lemat Fatou, twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej, twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej.
16. Zmienne losowe i ich rozkłady. Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej. Niezależność zmiennych losowych.
17. Prawa wielkich liczb. Centralne twierdzenia graniczne.
18. Warunki równoważne na holomorficzną funkcję. (Równania Cauchy'ego-Riemanna, twierdzenie o niezależności całki krzywoliniowej od drogi całkowania, twierdzenie całkowite Cauchy'ego, twierdzenie o holomorficznosci funkcji określonej całką krzywoliniową).
19. Zasada identyczności dla szeregów i funkcji holomorficzych. Zasada maksimum i zasada minimum.
20. Punkty osobliwe - charakteryzacja. Twierdzenie o residuach i jego zastosowania do wyznaczania całek.
21. Odwzorowania konforemne, twierdzenie Riemanna.
22. Definicja dyfeomorfizmu, twierdzenie o funkcji uwikłanej, twierdzenie o lokalnym dyfeomorfizmie.
23. Różne wersje twierdzenia o przyrostach. Wersje wzoru Taylora z resztą Lagrange'a, z resztą Peano. Rozwijanie funkcji w szereg.
24. Podrozmaitości przestrzeni euklidesowych. Miara i całka Lebesgue'a na podrozmaitościach.
25. Ekstrema lokalne funkcji rzeczywistych - warunki istnienia; formy kwadratowe i ich określoność. Podrozmaitości przestrzeni euklidesowych i ekstrema warunkowe.
26. Formy różniczkowe własności, różniczkowanie, całkowanie. Lemat Poincarego. Twierdzenie Stokesa, twierdzenie Greena w  $\mathbb{R}^2$ , twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego w  $\mathbb{R}^3$ .
27. Równania różniczkowe zwyczajne – istnienie, jednoznaczność rozwiązań problemu Cauchy'ego, ciągła zależność rozwiązań od warunków początkowych.
28. Równania różniczkowe liniowe i ich dynamika. Związki z algebrą liniową – wartości i wektory własne, twierdzenie Jordana.
29. Układy dynamiczne generowane przez równania różniczkowe. Punkty stacjonarne i ich stabilność. Funkcje Lapunowa i linearyzacja. Kryteria niestabilności punktów stacjonarnych.
30. Równania różniczkowe cząstkowe – klasyczne równania fizyki (równanie Laplace'a, równanie ciepła, równanie falowe), wybrane metody rozwiązywania zagadnień początkowych i brzegowych.
31. Grupy i ich homomorfizmy, podgrupy normalne, grupy ilorazowe. Twierdzenie Lagrange'a. Grupy przekształceń, grupy permutacji.

**Lista zagadnień do egzaminu magisterskiego na kierunku matematyka w roku 2023/24**  
- do wyboru zgodnie z punktem 4 Uchwały z 27 czerwca 2019 Rady Wydziału Matematyki i Informatyki UJ „Zasady przeprowadzania egzaminu dyplomowego na studiach stacjonarnych II stopnia na kierunku matematyka obowiązujące od rekrutacji 2019/2020”

32. Ciała ułamków. Rozszerzenia ciał. Ciało rozkładu wielomianu. Ciała algebraicznie domknięte.
33. Teoria Galois skończonych rozszerzeń ciał – grupa Galois rozszerzenia ciał, główne twierdzenie teorii Galois, grupa Galois wielomianu. Rozwiązalność równań algebraicznych (twierdzenie Abela-Ruffiniego, równania stopnia dwa, trzy i cztery).
34. Rozmaitości Riemanna, koneksje liniowe, tensor torsji i krzywizny, krzywizna sekcyjna.
35. Warunkowa wartość oczekiwana, procesy stochastyczne, filtracja, proces Wienera, momenty stopu.
36. Martyngały (podmartyngały, nadmartyngały), twierdzenie Dooba o stopowaniu, twierdzenie Dooba o opcji wyboru, nierówności maksymalne dla podmartyngałów, twierdzenie o zbieżności nadmartyngałów.
37. Metody numeryczne rozwiązywania układów równań liniowych: rozkład LU, QR, metody iteracyjne: Jacobiego, Gaussa-Seidel'a. Uwarunkowanie macierzy i jego związek z rozwiązywaniem numerycznym układów równań.
38. Interpolacja (wzór Lagrange'a, wzór Newtona). Metody aproksymacji: konstrukcja wielomianów ortogonalnych, wielomianów Legendre'a, Czebyszewa, Hermite'a i ich związek z aproksymacją. Całkowanie numeryczne (kwadratury Newtona-Cotes'a, Gaussa).
39. Programowanie liniowe, metoda sympleks w programowaniu liniowym i twierdzenie o dualności, metoda Kuhna-Tuckera w programowaniu nieliniowym.
40. Statystyka opisowa, estymacja punktowa/metoda największej wiarygodności, przedziały ufności, testowanie hipotez, wnioskowanie bayesowskie, metody regresji.
41. Narodziny metody dedukcyjnej w Grecji. Szkoła pitagorejska i jej osiągnięcia. Matematyka okresu hellenistycznego. „Elementy” Euklidesa i dzieło Apolloniusza. Fenomen Archimedes'a. Odkrywanie spuścizny greckiej w Europie łacińskiej poprzez tłumaczenia z greki i języka arabskiego. Rozwój uniwersytetów w Europie.
42. Nowożytna matematyka w Europie. Rozwój matematyki w XVII i XVIII wieku w Europie. Prace Kartezjusza, Fermata, Pascala, Newtona, Leibniza, Eulera oraz rodziny Bernoullich. Nowe dziedziny matematyki: rachunek różniczkowy i całkowy, równania różniczkowe, geometria analityczna, rachunek prawdopodobieństwa.
43. Matematyka w Polsce, początki na Akademii Krakowskiej (XV-XVI w.). Rozwój matematyki polskiej w XX w, jej przedstawiciele i największe osiągnięcia: szkoła lwowska, szkoła warszawska i szkoła krakowska.