Fundusze Europejskie
Wiedza Edukacja Rozwój

Rzeczpospolita Polska

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny

DU

DOSKONAŁY UNIWERSYTET

Teoria miary i całki

Rafał Czyż

Kraków, 2020

Spis treści

1 Teoria miary **2**
1.1 σ-algebry i przestrzenie mierzalne . . . 2
1.2 Zbiory borelowskie . . . 7
1.3 Odwzorowania mierzalne . . . 7
1.4 Miary nieujemne . . . 10
1.5 Miary zupełne . . . 12
1.6 Miary zewnętrzne. Konstrukcja Carathéodory'ego . . . 13
1.7 Miara Lebesgue'a . . . 17
1.8 Szczególne własności miary Lebesgue'a . . . 21
1.9 Miara Hausdorffa . . . 22
1.10 Twierdzenie o rozszerzaniu miary . . . 24
1.11 Dystrybuanta . . . 26
1.12 Równość prawie wszędzie . . . 26
1.13 Zadania . . . 27

2 Teoria całki **31**
2.1 Całka Lebesgue'a . . . 31
2.2 Twierdzenia graniczne . . . 38
2.3 Całka Lebesgue'a a całka Riemanna . . . 41
2.4 Zadania . . . 44

3 Wybrane zagadnienia z teorii miary i całki **48**
3.1 Twierdzenie o transporcie miary . . . 48
3.2 Miary produktowe. Twierdzenie Fubiniego . . . 49
3.3 Różniczkowanie miar . . . 56
3.4 Nierówności całkowe . . . 60
3.5 Przestrzenie L^p . . . 62
3.6 Zadania . . . 65

Bibliografia **67**

Indeks **68**

Rozdział 1

Teoria miary

1.1 σ-algebry i przestrzenie mierzalne

Definicja 1.1.1. Niech X będzie dowolnym zbiorem niepustym. Niepustą rodzinę jego podzbiorów $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ nazywamy *pierścieniem zbiorów*, gdy spełnia następujące warunki:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2. $\forall\, A, B \in \mathcal{A} :\ A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Pierścień zbiorów $\mathcal{A}$ nazywamy *algebrą zbiorów*, gdy $X \in \mathcal{A}$.

Obserwacja 1.1.2. *1. Pierścień zbiorów jest zamknięty ze względu na branie skończonych sum i skończonych przecięć zbiorów.*

2. Algebra zbiorów jest zamknięta na branie dopełnień.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że

1. $A \cap B = (A \cup B) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$ oraz
2. $A' = X \setminus A$. □

Definicja 1.1.3. Niepustą rodzinę zbiorów $\mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(X)$ nazywamy *σ-algebrą* na X, gdy spełnia następujące warunki:

1. $\emptyset \in \mathfrak{M}$;
2. $\forall\, A \in \mathfrak{M} :\ A' \in \mathfrak{M}$;
3. $\forall\, A_j \in \mathfrak{M}, j \in \mathbb{N} :\ \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$.

Parę $(X, \mathfrak{M})$ nazywamy *przestrzenią mierzalną*, a zbiory należące do rodziny $\mathfrak{M}$ *zbiorami $\mathfrak{M}$-mierzalnymi (lub mierzalnymi)*.

Przykład 1.1.4. Rodziny $\{\emptyset, X\}$ oraz $\mathcal{P}(X)$ są odpowiednio najmniejszą i największą (w sensie inkluzji) σ-algebrą na X.

Ćwiczenie 1.1.5. Sprawdzić, czy poniższe rodziny zbiorów są pierścieniami, algebrami, σ-algebrami na $\mathbb{R}$:

1. $\mathcal{A}_1 = \{A \subset \mathbb{R} : \#A < \infty\}$;
2. $\mathcal{A}_2 = \{A \subset \mathbb{R} : \#A < \infty \text{ lub } \#A' < \infty\}$;
3. $\mathcal{A}_3 = \{A \subset \mathbb{R} : \#A \leq \aleph_0 \text{ lub } \#A' \leq \aleph_0\}$;
4. $\mathcal{A}_4 = \{A \subset \mathbb{R} : A - \text{suma skończonej liczby przedziałów}\} \cup \{\emptyset\}$.

Obserwacja 1.1.6 (Własności σ-algebr)**.** *Niech $(X, \mathfrak{M})$ będzie przestrzenią mierzalną. Wtedy*

1. *$X \in \mathfrak{M}$;*
2. *jeżeli $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{M}$, to $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathfrak{M}$;*

3. *jeżeli* $A_j \in \mathfrak{M}$, $j \in \mathbb{N}$, *to* $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$;

4. *jeżeli* $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{M}$, *to* $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathfrak{M}$;

5. *jeżeli* $A, B \in \mathfrak{M}$, *to* $A \setminus B \in \mathfrak{M}$.

Dowód. 1. $X = X \setminus \emptyset$.

2. Przyjmijmy $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \emptyset$ w definicji σ-algebry.

3. Zauważmy, że $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j'\right)'$.

4. Przyjmijmy $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = X$ w definicji σ-algebry.

5. Zauważmy, że $A \setminus B = A \cap B'$. □

Uwaga 1.1.7. Każda σ-algebra jest algebrą.

Ćwiczenie 1.1.8. Niech $(X, \mathfrak{M})$ będzie przestrzenią mierzalną oraz $B \subset X$. Pokazać, że

1. rodzina
$$\mathfrak{M}|_B := \{A \cap B : A \in \mathfrak{M}\}$$
jest σ-algebrą na B;

2. jeżeli dodatkowo $B \in \mathfrak{M}$, to
$$\mathfrak{M}|_B = \{A : A \in \mathfrak{M}, A \subset B\}\,.$$

Obserwacja 1.1.9. *Niech* $f : X \to Y$ *będzie dowolną funkcją,* $X, Y \neq \emptyset$.

1. *Jeżeli* $\mathfrak{M}$ *jest* σ*-algebrą na* X, *to rodzina*
$$f_*\mathfrak{M} = f(\mathfrak{M}) = \left\{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathfrak{M}\right\}$$
jest σ*-algebrą na* Y.

2. *Jeżeli* $\mathfrak{N}$ *jest* σ*-algebrą na* Y, *to rodzina*
$$f^*\mathfrak{N} = f^{-1}(\mathfrak{N}) := \left\{f^{-1}(B) : B \in \mathfrak{N}\right\}$$
jest σ*-algebrą na* $f^{-1}(Y)$.

Dowód. Wynika z własności przeciwobrazu. □

Ćwiczenie 1.1.10. Niech $f : X \to Y$ będzie surjekcją, a $\mathfrak{M}$ σ-algebrą na X. Czy rodzina zbiorów
$$\{f(A) : A \in \mathfrak{M}\}$$
musi być σ-algebrą na Y?

Obserwacja 1.1.11. *Jeżeli* $\mathfrak{M}_j$ *jest* σ*-algebrą na* X, *dla* $j \in J$ *(*J *jest dowolnym zbiorem indeksów), to* $\bigcap_{j \in J} \mathfrak{M}_j$ *jest* σ*-algebrą na* X.

Dowód. Wynika z własności przecięcia. □

Ćwiczenie 1.1.12. Czy suma dowolnych σ-algebr musi być σ-algebrą?

Definicja 1.1.13. Dla dowolnej rodziny $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ zdefiniujmy *σ-algebrę generowaną przez* $\mathcal{F}$ na X jako
$$\sigma(\mathcal{F}) := \bigcap \{\mathfrak{M} : \mathcal{F} \subset \mathfrak{M}, \mathfrak{M} - \sigma \text{ algebra na } X\}\,.$$

Obserwacja 1.1.14. 1. $\sigma(\mathcal{F})$ *jest poprawnie zdefiniowaną najmniejszą* σ*-algebrą na* X *zawierającą* $\mathcal{F}$.

2. *Jeżeli* $\mathcal{F}$ *jest* σ*-algebrą, to* $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F})$.

3. *Dla dowolnych rodzin* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$, *jeżeli* $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{B})$, *to* $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B})$.

4. *Dla dowolnej niepustej rodziny zbiorów $\mathcal{A}$ mamy $\sigma(\sigma(\mathcal{A})) = \sigma(\mathcal{A})$.*

Dowód. Wynika z własności przecięcia. □

Obserwacja 1.1.15. *Niech $f : X \to Y$ będzie dowolną funkcją i niech $\mathcal{F}$ niepustą rodziną podzbiorów Y. Wykazać, że*

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{F})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{F})).$$

Dowód. Ponieważ $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{F})$, to $f^{-1}(\mathcal{F}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{F}))$ i otrzymujemy inkluzję

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{F})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{F})).$$

Aby wykazać inkluzję przeciwną, zdefiniujmy następującą rodzinę

$$\mathfrak{M} = \left\{A \in \sigma(\mathcal{F}) : f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{F}))\right\}.$$

Zauważmy, że $\mathfrak{M}$ jest σ-algebrę zawierającą rodzinę $\mathcal{F}$, więc $\mathfrak{M} = \sigma(\mathcal{F})$. Wtedy otrzymujemy $f^{-1}(\sigma(\mathcal{F})) = f^{-1}(\mathfrak{M}) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{F}))$. □

Ćwiczenie 1.1.16. Niech $X = [0, 3]$ oraz $A = [0, 2]$, $B = [1, 2]$. Znaleźć $\sigma(\{A, B\})$.

Przykład 1.1.17. Niech $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ będzie zbiorem skończonym. Wtedy

$$\sigma\left(\{\{x_1\}, \dots, \{x_n\}\}\right) = \mathcal{P}(X).$$

Ćwiczenie 1.1.18. Czy dla dowolnego zbioru X σ-algebra generowana przez wszystkie singletony jest równa $\mathcal{P}(X)$?

Definicja 1.1.19. Niech X będzie dowolnym zbiorem niepustym. Niepustą rodzinę $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ nazywamy *klasą monotoniczną*, gdy spełnia następujące warunki:

1. jeżeli $A_j \in \mathcal{M}$, $j \in \mathbb{N}$, jest wstępującym ciągiem zbiorów tzn. $A_j \subset A_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$, to $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}$ oraz
2. jeżeli $A_j \in \mathcal{M}$, $j \in \mathbb{N}$, jest zstępującym ciągiem zbiorów tzn. $A_{j+1} \subset A_j$, $j \in \mathbb{N}$, to $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}$.

Obserwacja 1.1.20. 1. *Przecięcie dowolnej ilości klas monotonicznych jest klasą monotoniczną.*

2. *Dla dowolnej rodziny zbiorów $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ istnieje najmniejsza klasa monotoniczna zawierająca $\mathcal{F}$*

$$\mathrm{M}(\mathcal{F}) := \bigcap \{\mathcal{M} : \mathcal{F} \subset \mathcal{M},\ \mathcal{M} - \text{ klasa monotoniczna na } X\}.$$

   Nazywamy ją klasą monotoniczną generowaną przez $\mathcal{F}$.

3. *Jeżeli $\mathcal{F}$ jest klasą monotoniczną, to $\mathcal{F} = \mathrm{M}(\mathcal{F})$.*
4. *Dla dowolnych rodzin $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$, jeżeli $\mathcal{A} \subset \mathrm{M}(\mathcal{B})$, to $\mathrm{M}(\mathcal{A}) \subset \mathrm{M}(\mathcal{B})$.*
5. *Dla dowolnej niepustej rodziny zbiorów $\mathcal{A}$ mamy $\mathrm{M}(\mathrm{M}(\mathcal{A})) = \mathrm{M}(\mathcal{A})$.*

Dowód. Wynika z własności przecięcia. □

Obserwacja 1.1.21. *Każda algebra $\mathcal{A}$, która jest klasą monotoniczną jest σ-algebrą.*

Dowód. Niech $A_j \in \mathcal{A}$, $j \in N$. Zdefiniujmy wstępujący ciąg zbiorów $B_k = A_1 \cup \dots \cup A_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$. Wtedy $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{A}$, bo $\mathcal{A}$ jest klasą monotoniczną. □

Twierdzenie 1.1.22 (Twierdzenie o klasie monotonicznej)**.** *Niech X będzie dowolnym zbiorem niepustym. Jeżeli $\mathfrak{N} \subset \mathcal{P}(X)$ jest algebrą na X, to klasa monotoniczna generowana przez $\mathfrak{N}$ jest równa σ-algebrze generowanej przez $\mathfrak{N}$, tzn.*

$$\mathrm{M}(\mathfrak{N}) = \sigma(\mathfrak{N}).$$

Dowód. Zauważmy, że każda σ-algebra jest klasą monotoniczną, czyli zachodzi następująca inkluzja

$$\mathrm{M}(\mathfrak{N}) \subset \sigma(\mathfrak{N}).$$

Aby zakończyć dowód wystarczy pokazać, że $\mathrm{M}(\mathfrak{N})$ jest σ-algebrą.

Dla dowolnej rodziny $L \subset \mathcal{P}(X)$ zdefiniujmy następującą rodzinę zbiorów:

$$\mathrm{J}(L) := \{A \subset X : \forall\, B \in L \quad A \cup B, A \setminus B, B \setminus A \in \mathrm{M}(\mathfrak{N})\}.$$

Rodzina $\mathrm{J}(L)$ ma następujące własności.

1. $\mathrm{J}(L)$ jest klasą monotoniczną.

   Weźmy dowolny ciąg wstępujący zbiorów $\{A_j\} \subset \mathrm{J}(L)$. Dla dowolnego zbioru $B \in L$ ciągi zbiorów $\{A_j \cup B\}$, $\{A_j \setminus B\}$ są wstępujące a ciąg $\{B \setminus A_j\}$ jest zstępujący. Wtedy dostajemy

$$\mathrm{M}(\mathfrak{N}) \ni \bigcup_{j=1}^{\infty}(A_j \cup B) = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \cup B,$$

$$\mathrm{M}(\mathfrak{N}) \ni \bigcup_{j=1}^{\infty}(A_j \setminus B) = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \setminus B,$$

$$\mathrm{M}(\mathfrak{N}) \ni \bigcap_{j=1}^{\infty}(B \setminus A_j) = B \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right),$$

   co oznacza, że $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathrm{J}(L)$.

   Dowód wygląda podobnie dla ciągów zstępujących.

2. Dla dowolnych rodzin $K, L \subset \mathcal{P}(X)$ mamy $K \subset \mathrm{J}(L) \Leftrightarrow L \subset \mathrm{J}(K)$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} K \subset \mathrm{J}(L) &\Leftrightarrow \forall\, A \in K \ A \in \mathrm{J}(L) \\ &\Leftrightarrow \forall\, A \in K\ \forall\, B \in L\ A \cup B, A \setminus B, B \setminus A \in \mathrm{M}(\mathfrak{N}) \\ &\Leftrightarrow \forall\, B \in L\ \forall\, A \in K\ A \cup B, A \setminus B, B \setminus A \in \mathrm{M}(\mathfrak{N}) \\ &\Leftrightarrow \forall\, B \in L\ B \in \mathrm{J}(K) \Leftrightarrow L \subset \mathrm{J}(K). \end{aligned}$$

Teraz zauważmy, że skoro $\mathfrak{N}$ jest algebrą, to $\mathfrak{N} \subset \mathrm{J}(\mathfrak{N})$. Ponieważ $\mathrm{J}(\mathfrak{N})$ jest klasą monotoniczną, to $\mathrm{M}(\mathfrak{N}) \subset \mathrm{J}(\mathfrak{N})$. Z punktu (2) wynika, że $\mathfrak{N} \subset \mathrm{J}(\mathrm{M}(\mathfrak{N}))$. Wtedy punkt (1) implikuje, że

$$\mathrm{M}(\mathfrak{N}) \subset \mathrm{J}(\mathrm{M}(\mathfrak{N})). \tag{1.1.1}$$

Zauważmy, że $X \in \mathfrak{N} \subset \mathrm{M}(\mathfrak{N})$, a więc również $\emptyset = X \setminus X \in \mathfrak{N} \subset \mathrm{M}(\mathfrak{N})$. Z inkluzji (1.1.1) wynika, że $\mathrm{M}(\mathfrak{N})$ jest algebrą. Z obserwacji 1.1.21 wynika, że $\mathrm{M}(\mathfrak{N})$ jest σ-algebrą. □

Definicja 1.1.23. Niepustą rodzinę zbiorów $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ nazywamy *π-układem*, gdy

$$\forall\, A, B \in \mathcal{A} : A \cap B \in \mathcal{A}.$$

Definicja 1.1.24. Niepustą rodzinę zbiorów $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ nazywamy *λ-układem (układem Dynkina*[1]*)* na X, gdy spełnia następujące warunki:

1. $X \in \mathcal{A}$;
2. $\forall\, A, B \in \mathcal{A} :\ A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{A}$;
3. $\forall\, A_j \in \mathcal{A},\ A_j \subset A_{j+1},\ j \in \mathbb{N} : \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

Pojęcia π-układu i λ-układu zostały po raz pierwszy wprowadzone przez Wacława Sierpińskiego[2].

[1] Eugene Dynkin (1924-2014) – rosyjski matematyk.
[2] Wacław Sierpiński (1882-1969) – polski matematyk.

Obserwacja 1.1.25. *Niepusta rodzina zbiorów $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ jest σ-algebrą wtedy i tylko wtedy, gdy jest π-układem i λ-układem.*

Dowód. Wprost z definicji wynika, że każda σ-algebra jest π-układem i λ-układem. I odwrotnie, jeżeli $\mathcal{A}$ jest π-układem i λ-układem, to $X \in \mathcal{A}$ i wtedy $X \setminus X = \emptyset \in \mathcal{A}$ oraz $\mathcal{A}$ jest zamknięta na branie dopełnień. Pokazaliśmy więc, że $\mathcal{A}$ jest algebrą. Naśladując dowód obserwacji 1.1.21, dostajemy, że $\mathcal{A}$ jest σ-algebrą. $\square$

Obserwacja 1.1.26.

1. *Przecięcie dowolnej ilości λ-układów jest λ-układem.*
2. *Dla dowolnej niepustej rodziny zbiorów $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ istnieje najmniejszy λ-układ zawierający $\mathcal{F}$*
$$\lambda(\mathcal{F}) := \bigcap \{\mathcal{M} : \mathcal{F} \subset \mathcal{M},\ \mathcal{M} - \ \lambda\text{-układ na } X\}.$$
Nazywamy go λ-układem generowanym przez $\mathcal{F}$.
3. *Jeżeli $\mathcal{F}$ jest λ-układem, to $\mathcal{F} = \lambda(\mathcal{F})$.*
4. *Dla dowolnych rodzin $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$, jeżeli $\mathcal{A} \subset \lambda(\mathcal{B})$, to $\lambda(\mathcal{A}) \subset \lambda(\mathcal{B})$.*
5. *Dla dowolnej niepustej rodziny zbiorów $\mathcal{A}$ mamy $\lambda(\lambda(\mathcal{A})) = \lambda(\mathcal{A})$.*

Dowód. Jest oczywisty. $\square$

Twierdzenie 1.1.27. *Jeżeli $\mathcal{A}$ jest π-układem, to*
$$\lambda(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}).$$

Dowód. Ponieważ każda σ-algebra jest λ-układem, to $\lambda(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A})$. Aby wykazać inkluzję przeciwną zauważmy, że wystarczy na mocy obserwacji 1.1.25 wykazać, że $\lambda(\mathcal{A})$ jest π-układem, bo wtedy $\lambda(\mathcal{A})$ jest σ-algebrą i mamy $\lambda(\mathcal{A}) \supset \sigma(\mathcal{A})$.

Dla zbioru $B \in \mathcal{A}$ zdefiniujmy rodzinę zborów:
$$\mathcal{A}_B = \{A \in \lambda(\mathcal{A}) : A \cap B \in \lambda(\mathcal{A})\}.$$
Zauważmy, że $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_B$, bo $\mathcal{A}$ jest π-układem. Wykażemy teraz, że $\mathcal{A}_B$ jest λ-układem.

- $X \in \mathcal{A}_B$, bo
$$X \in \lambda(\mathcal{A}) \text{ oraz } X \cap B = B \in \mathcal{A} \subset \lambda(\mathcal{A}).$$
- Niech $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_B$ oraz $A_1 \subset A_2$. Wtedy
$$A_1, A_2 \in \lambda(\mathcal{A}) \text{ oraz } A_1 \cap B, A_2 \cap B \in \lambda(\mathcal{A})$$
i ponieważ $\lambda(\mathcal{A})$ jest λ-układem i $A_1 \cap B \subset A_2 \cap B$, to
$$A_2 \setminus A_1 \in \lambda(\mathcal{A}) \text{ oraz } (A_1 \setminus A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \setminus (A_2 \cap B) \in \lambda(\mathcal{A}),$$
czyli $A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{A}_B$.
- Niech $A_j \in \mathcal{A}_B$, $j \in \mathbb{N}$, będzie wstępującym ciągiem zbiorów, wtedy $A_j \in \lambda(\mathcal{A})$ i ciąg $A_j \cap B \in \lambda(\mathcal{A})$ jest również wstępującym ciągiem zbiorów. Wówczas
$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \lambda(\mathcal{A}) \text{ oraz } \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \cap B = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \cap B) \in \lambda(\mathcal{A}),$$
z czego wynika, że $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}_B$.

Zauważmy, że $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_B \subset \lambda(\mathcal{A})$, czyli $\mathcal{A}_B = \lambda(\mathcal{A})$, bo $\lambda(\mathcal{A})$ jest najmniejszym λ-układem zawierającym $\mathcal{A}$. Otrzymaliśmy zatem
$$\forall\, B \in \mathcal{A} : \mathcal{A}_B = \lambda(\mathcal{A}), \text{ czyli } \forall\, B \in \mathcal{A}\ \forall\, A \in \lambda(\mathcal{A}) : A \cap B \in \lambda(\mathcal{A}).$$

Dla $B \in \lambda(\mathcal{A})$ zdefiniujmy rodzinę zbiorów
$$\mathcal{A}_B = \{A \in \lambda(\mathcal{A}) : A \cap B \in \lambda(\mathcal{A})\}.$$
Z powyższych rozważań wynika, że $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_B$. Rozumując jak wyżej, możemy wykazać, że $\mathcal{A}_B = \lambda(\mathcal{A})$, co oznacza, że $\lambda(\mathcal{A})$ jest π-układem. $\square$

1.2 Zbiory borelowskie

Definicja 1.2.1. Niech X będzie przestrzenią topologiczną i niech $\operatorname{top} X$ będzie rodziną zbiorów otwartych na X a $\operatorname{cotop} X$ będzie rodziną zbiorów domkniętych na X. σ-algebrę

$$\mathcal{B}(X) := \sigma(\operatorname{top} X)$$

generowaną przez rodzinę wszystkich zbiorów otwartych nazywamy *σ-algebrą zbiorów borelowskich*, a zbiory należące do niej nazywamy *zbiorami borelowskimi*.

Definicja 1.2.2. Zbiór $Y \subset X$ nazywamy

1. *zbiorem typu G_δ*, jeżeli
$$\exists\, G_j \in \operatorname{top} X, j \in \mathbb{N} : \; Y = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j;$$

2. *zbiorem typu F_σ*, jeżeli
$$\exists\, F_j \in \operatorname{cotop} X, j \in \mathbb{N} : \; Y = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j.$$

Obserwacja 1.2.3. *W dowolnej przestrzeni topologicznej zachodzi:*

1. $\mathcal{B}(X) = \sigma(\operatorname{cotop} X)$*;*

2. *zbiory typu G_δ i F_σ są borelowskie.*

Dowód. Wynika wprost z definicji. □

W przestrzeniach $\mathbb{R}^n$ będziemy zawsze rozważać topologię euklidesową.

Obserwacja 1.2.4. *Każda z poniższych rodzin generuje σ-algebrę zbiorów borelowskich $\mathcal{B}(\mathbb{R})$:*

1. $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$;

2. $\{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}$;

3. $\{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$;

4. $\{(-\infty, b) : b \in \mathbb{Q}\}$;

5. $\{(-\infty, b] : b \in \mathbb{Q}\}$.

Dowód. Ćwiczenie. □

Twierdzenie 1.2.5. $\#\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathfrak{c}$.

Dowód. Można znaleźć w książce [5]. □

1.3 Odwzorowania mierzalne

Definicja 1.3.1. Niech $(X, \mathfrak{M})$ i $(Y, \mathfrak{N})$ będą przestrzeniami mierzalnymi. Odwzorowanie $f : X \to Y$ nazywamy *$\mathfrak{M}$-mierzalnym* (*mierzalnym*), gdy
$$\forall\, A \in \mathfrak{N} : \; f^{-1}(A) \in \mathfrak{M}.$$
Zbiór odwzorowań $\mathfrak{M}$-mierzalnych oznaczamy przez $\mathcal{M}(X, Y, \mathfrak{M})$ (lub prościej $\mathcal{M}(X, Y)$).

Jeżeli X i Y są przestrzeniami topologicznymi i $(X, \mathcal{B}(X))$ i $(Y, \mathcal{B}(Y))$ są przestrzeniami mierzalnymi, to odwzorowanie $f : X \to Y$ nazywamy *borelowskim*, gdy

$$\forall\, A \in \operatorname{top} Y : \; f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(X).$$

Zauważmy, że z obserwacji 1.1.15 wynika, że aby sprawdzić mierzalność odwzorowania $f : (X, \mathfrak{M}) \to (Y, \sigma(\mathcal{F}))$ wystarczy wykazać, że

$$\forall\, A \in \mathcal{F} : \; f^{-1}(A) \in \mathfrak{M}.$$

W dalszej części wykładu będziemy rozważać głównie odwzorowania $f : X \to Y$, dla $Y \subset \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. W zbiorze $\overline{\mathbb{R}}$ można wprowadzić w sposób naturalny topologię, która jest rozszerzeniem topologii euklidesowej na $\mathbb{R}$. Jako bazę otoczeń $-\infty$, $+\infty$ można przyjąć odpowiednio zbiory postaci $[-\infty, a)$ i $(a, +\infty]$, dla $a \in \mathbb{R}$.

Przykład 1.3.2. Niech $X = [0, 2]$ i $\mathfrak{M} = \{\emptyset, [0, 1), [1, 2], X\}$. Wtedy

1. Funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ zadana wzorem $f(x) = x$ nie jest mierzalna.
2. Wszystkie funkcje mierzalne są postaci $g = a\chi_{[0,1)} + b\chi_{[1,2]}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Funkcja $\chi_A : X \to \mathbb{R}$, dla $A \subset X$ jest nazywana *funkcją charakterystyczną zbioru* A i jest zadana wzorem

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Obserwacja 1.3.3. *Niech $(X, \mathfrak{M})$ będzie przestrzenią mierzalną i $A \subset X$.*

1. *Funkcja χ_A jest $\mathfrak{M}$-mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy $A \in \mathfrak{M}$.*
2. *Załóżmy, że $A \in \mathfrak{M}$. Dla funkcji $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ zdefiniujmy*

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ c, & x \notin A, \end{cases}$$

gdzie c jest dowolną stałą. Wtedy $f \in \mathcal{M}(A, \overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{M}|_A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\tilde{f} \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{M})$.

Dowód. Wynika z własności przeciwobrazu. □

Obserwacja 1.3.4. *Niech $(X, \mathfrak{M})$ będzie przestrzenią mierzalną. Dla dowolnej funkcji $f : X \to \mathbb{R}$ następujące warunki są równoważne:*

1. *$f \in \mathcal{M}(X, \mathbb{R}, \mathfrak{M})$;*
2. *$\forall\, a \in \mathbb{R}\ \{x \in X : f(x) < a\} \in \mathfrak{M}$;*
3. *$\forall\, a \in \mathbb{R}\ \{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathfrak{M}$;*
4. *$\forall\, a \in \mathbb{Q}\ \{x \in X : f(x) < a\} \in \mathfrak{M}$;*
5. *$\forall\, a \in \mathbb{Q}\ \{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathfrak{M}$.*

Dowód. Wynika z obserwacji 1.2.4. □

Obserwacja 1.3.5. *Każde odwzorowanie ciągłe pomiędzy przestrzeniami topologicznymi jest borelowskie.*

Dowód. Wynika wprost z definicji odwzorowań borelowskich. □

Obserwacja 1.3.6. *Złożenie odwzorowań mierzalnych jest odwzorowaniem mierzalnym.*

Dowód. Niech $(X_j, \mathfrak{M}_j)$, $j = 1, 2, 3$, będą przestrzeniami mierzalnymi, $f : X_1 \to X_2$, $g : X_2 \to X_3$ będą odwzorowaniami mierzalnymi takimi, że odwzorowanie $g \circ f$ jest dobrze określone. Wtedy mierzalność złożenia wynika z następującego wzoru. Dla dowolnego zbioru $A \in \mathfrak{M}_3$ mamy

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right). \qquad \square$$

Obserwacja 1.3.7. *Niech $f, g, f_n \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{M})$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy*

1. *zbiory $\{x \in X : f(x) < g(x)\}$, $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ i $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ są $\mathfrak{M}$-mierzalne;*
2. *wszystkie funkcje stałe są mierzalne;*
3. *$-f \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{M})$;*

4. $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{M})$;

5. $\max(f, g), \min(f, g) \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{M})$;

6. $\limsup_{n\to\infty} f_n, \liminf_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{M})$;

7. *zbiór* $A = \{x \in X : \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\} \in \mathfrak{M}$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{M}(A, \overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{M}|_A)$.

Dowód. Punkt (1). Zauważmy, że $f(x) < g(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $q \in \mathbb{Q}$ taka, że $f(x) < q < g(x)$. Stąd dostajemy

$$\{x \in X : f(x) < g(x)\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} f^{-1}([-\infty, q)) \cap g^{-1}((q, +\infty]) \in \mathfrak{M}.$$

Ponadto

$$\{x \in X : f(x) \le g(x)\} = X \setminus \{x \in X : g(x) < f(x)\}$$

oraz

$$\{x \in X : f(x) = g(x)\} = \{x \in X : f(x) \le g(x)\} \cap \{x \in X : g(x) \le f(x)\}.$$

Punkt (2). Niech $f(x) = a$. Wtedy

$$f^{-1}(A) = \begin{cases} X, & a \in A, \\ \emptyset, & a \notin A. \end{cases}$$

Punkt (3). Zauważmy, że $\{x \in X : f(x) \le a\} = \{x \in X : -a \le -f(x)\}$.

Punkt (4). Zauważmy, że

$$\left\{x \in X : \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \ge a\right\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) \ge a\}$$

oraz $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = -\left(\inf_{n\in\mathbb{N}}(-f_n)\right)$.

Punkt (5). Wynika z punktu (4).

Punkt (6). Zauważmy, że $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\inf_{n\ge k} f_n(x)\right)$ oraz $\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_{k\in\mathbb{N}} \left(\sup_{n\ge k} f_n(x)\right)$.

Punkt (7). Wynika z punktów (1) i (6). $\square$

Obserwacja 1.3.8. *Niech* $(X, \mathfrak{M})$ *będzie przestrzenią mierzalną oraz* $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathbb{R}, \mathfrak{M})$. *Wtedy* $f+g, f-g, fg, |f| \in \mathcal{M}(X, \mathbb{R}, \mathfrak{M})$ *oraz* $\frac{f}{g} \in \mathcal{M}\left(X \setminus \{x \in X : g(x) = 0\}, \mathbb{R}, \mathfrak{M}|_{(X\setminus\{x\in X:g(x)=0\})}\right)$.

Dowód. Zauważmy, że funkcje $t \to ct$, $t \to c+t$, $t \to t^2$, $t \to |t|$ oraz $\mathbb{R}\setminus\{0\} \ni t \to \frac{1}{t} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $c \in \mathbb{R}$, są ciągłe, a więc mierzalne na podstawie obserwacji 1.3.5. Z obserwacji 1.3.6 wynika, że funkcje cf, $c + f$, f^2, $|f|$, $\frac{1}{f}$ są mierzalne.

Dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ mamy również, dzięki obserwacji 1.3.7

$$\{x \in X : f(x) + g(x) < a\} = \{x \in X : f(x) < -g(x) + c\} \in \mathfrak{M},$$

z czego wynika, że $f + g \in \mathcal{M}(X, \mathbb{R}, \mathfrak{M})$.

Zauważmy również, że $f - g = f + (-g)$ oraz $fg = \frac{1}{4}(f + g)^2 - \frac{1}{4}(f - g)^2$, z czego wynika mierzalność funkcji $f - g$ oraz fg. $\square$

Dla dowolnej funkcji $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ zdefiniujmy jej *część dodatnią*

$$f_+(x) = \max(f(x), 0)$$

oraz *część ujemną*

$$f_-(x) = \max(-f(x), 0).$$

Zauważmy, że $f_+, f_- \ge 0$, $f = f_+ - f_-$ oraz $|f| = f_+ + f_-$.

Obserwacja 1.3.9. *Niech* $(X, \mathfrak{M})$ *będzie przestrzenią mierzalną oraz* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. *Wtedy następujące warunki są równoważne:*

1. $f \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{M})$;

2. $f_+, f_- \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{M})$.

Dowód. Wynika z obserwacji 1.3.7 i obserwacji 1.3.8. $\square$

1.4 Miary nieujemne

Definicja 1.4.1. Niech $(X, \mathfrak{M})$ będzie przestrzenią mierzalną. Funkcję $\mu : \mathfrak{M} \to [0, +\infty]$ nazywamy *miarą nieujemną* (*miarą*), gdy spełnia poniższe warunki:

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. $\forall\, A_j \in \mathfrak{M}, j \in \mathbb{N}, A_j \cap A_k = \emptyset, j \neq k :\ \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

Warunek (2) nazywamy *warunkiem przeliczalnej addytywności.*

Trójkę $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ nazywamy *przestrzenią mierzalną z miarą.* Jeżeli $\mu(X) < +\infty$, to mówimy, że miara μ jest *skończona*, a jeżeli $\mu(X) = 1$, to nazywamy ją *miarą probabilistyczną.*

Obserwacja 1.4.2. *Warunki* (1) *i* (2) *w definicji 1.4.1 są równoważne warunkom* $\mu \not\equiv +\infty$ *i* (2)*.*

Dowód. Jeżeli $\mu(\emptyset) = 0$, to $\mu \not\equiv +\infty$. Z drugiej strony jeżeli $\mu \not\equiv +\infty$, to istnieje $A \in \mathfrak{M}$ taki, że $\mu(A) < +\infty$. Wtedy $A = A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$ i, korzystając z warunku (2), dostajemy

$$\mu(A) = \mu(A) + \sum_{j=2}^{\infty} \mu(\emptyset),$$

z czego wynika, że $\sum_{j=2}^{\infty} \mu(\emptyset) = 0$, czyli $\mu(\emptyset) = 0$. □

Przykład 1.4.3. Niech X będzie dowolnym zbiorem niepustym. Poniższe funkcje są miarami na $\mathcal{P}(X)$.

1. *Miara licząca*
$$\mu(A) = \begin{cases} \#A, & \text{gdy } A \text{ jest skończony,} \\ +\infty, & \text{gdy } A \text{ jest nieskończony.} \end{cases}$$
2. *Miara Diraca*[3] w punkcie $a \in X$
$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A, \\ 0, & a \notin A. \end{cases}$$
3. Niech $X = \mathbb{R}$, $\mathfrak{M} = \{A \subset \mathbb{R} : \#A \leq \aleph_0 \text{ lub } \#A' \leq \aleph_0\}$ oraz
$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & \#A' \leq \aleph_0, \\ 0, & \#A \leq \aleph_0. \end{cases}$$

Obserwacja 1.4.4. *Niech* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *będzie przestrzenią mierzalną z miarą. Wtedy*

1. *jeżeli* $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{M}$ *oraz* $A_j \cap A_k = \emptyset$, $j \neq k$, *to*
$$\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n) \text{ (skończona addytywność);}$$
2. *jeżeli* $A, B \in \mathfrak{M}$ *oraz* $A \subset B$, *to* $\mu(A) \leq \mu(B)$. *Jeżeli dodatkowo* $\mu(B) < +\infty$, *to* $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$;
3. *jeżeli* $B_j \in \mathfrak{M}$, $j \in \mathbb{N}$, *to*
$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \text{ (przeliczalna subaddytywność);}$$
4. *jeżeli* $B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{M}$, *to*
$$\mu(B_1 \cup \cdots \cup B_n) \leq \mu(B_1) + \cdots + \mu(B_n) \text{ (skończona subaddytywność);}$$

[3] Paul Dirac (1902-1984) – brytyjski fizyk.

5. *jeżeli* $\{B_j\} \subset \mathfrak{M}$, *jest wstępującym ciągiem zbiorów, to*

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(B_j);$$

6. *jeżeli* $\{B_j\} \subset \mathfrak{M}$, *jest zstępującym ciągiem zbiorów oraz* $\mu(B_1) < +\infty$, *to*

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(B_j);$$

7. *jeżeli* $A, Z \in \mathfrak{M}$ *oraz* $\mu(Z) = 0$, *to*

$$\mu(A \cup Z) = \mu(A \setminus Z) = \mu(A).$$

Dowód. Punkt (1) wynika wprost z definicji miary, gdy przyjmiemy $A_j = \emptyset$, dla $j > n$.

Punkt (2). Zauważmy, że $B = (B \setminus A) \cup A$ oraz $(B \setminus A) \cap A = \emptyset$. Dostajemy wtedy

$$\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A). \tag{1.4.1}$$

Ze wzoru (1.4.1) wynika, że $\mu(B) \geq \mu(A)$.

Jeżeli dodatkowo $\mu(B) < +\infty$, to również $\mu(B \setminus A) < +\infty$ i $\mu(A) < +\infty$. Wtedy wzór (1.4.1) możemy zapisać jako $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Punkt (3). Zdefiniujmy nowy ciąg zbiorów

$$A_1 = B_1,\ A_j = B_j \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_{j-1}), j \geq 2.$$

Ciąg $\{A_j\}$ jest ciągiem parami rozłącznych zbiorów mierzalnych, $A_j \subset B_j$ oraz $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Korzystając z definicji miary otrzymujemy

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j).$$

Punkt (4). Wystarczy w punkcie (3) przyjąć $B_j = \emptyset$ dla $j > n$.

Punkt (5). Zdefiniujmy nowy ciąg zbiorów

$$A_1 = B_1,\ A_j = B_j \setminus B_{j-1}, j \geq 2.$$

Ciąg $\{A_j\}$ jest ciągiem parami rozłącznych zbiorów mierzalnych oraz $A_1 \cup \cdots \cup A_k = B_k$, dla $k \in \mathbb{N}$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mu(B_k) = \mu(A_1 \cup \cdots \cup A_k) &= \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j) \overset{k\to+\infty}{\to} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \\ &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right).\end{aligned}$$

Punkt (6). Zauważmy, że ciąg zbiorów $\{B_1 \setminus B_j\}$ jest wstępujący. Korzystając z punktu (5) otrzymujemy

$$\lim_{j\to+\infty} \mu(B_1 \setminus B_j) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (B_1 \setminus B_j)\right) = \mu\left(B_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j\right).$$

Ponieważ $\mu(B_1) < +\infty$, to możemy skorzystać z punktu (2) i dostać

$$\begin{aligned}\mu(B_1 \setminus B_j) &= \mu(B_1) - \mu(B_j) \\ \mu\left(B_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j\right) &= \mu(B_1) - \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j\right),\end{aligned}$$

z czego wynika, że $\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(B_j)$.

Punkt (7). Mamy następujące nierówności

$$\mu(A) \leq \mu(A \cup Z) = \mu((A \setminus Z) \cup Z) = \mu(A \setminus Z) + \mu(Z) = \mu(A \setminus Z) \leq \mu(A). \qquad \square$$

Podamy teraz przykład pokazujący, że warunek $\mu(B) < +\infty$ jest konieczny w punkcie (2) w obserwacji 1.4.4.

Przykład 1.4.5. Niech μ będzie dowolną miarą na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ taką, że $\mu([j, +\infty)) = +\infty$, dla każdego $j \in \mathbb{N}$. Wtedy mamy $\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}[j, +\infty)\right) = \mu(\emptyset) = 0$, a z drugiej strony $\lim_{j\to\infty} \mu([j, +\infty)) = +\infty$.

1.5 Miary zupełne

Definicja 1.5.1. Miarę μ (lub przestrzeń $(X, \mathfrak{M}, \mu)$) nazywamy *zupełną*, gdy każdy podzbiór zbioru miary zero jest mierzalny, tzn.

$$\forall\, A \in \mathfrak{M}, \mu(A) = 0 : (B \subset A \Rightarrow B \in \mathfrak{M}).$$

Przykład 1.5.2. Niech $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathfrak{M} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, X\}$ i $\mu(\emptyset) = \mu(\{1, 2\}) = 0$, $\mu(\{3, 4\}) = \mu(X) = 1$. Wtedy $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ nie jest przestrzenią zupełną, bo zbiór $\{1\}$ nie jest mierzalny. Istnieje wiele rozszerzeń (uzupełnień) tej przestrzeni do przestrzeni zupełnej. Najmniejsze z nich jest następującą przestrzenią $(X, \mathfrak{N}, \nu)$, gdzie $\mathfrak{N} = \mathfrak{M} \cup \{\{1\}, \{2\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ a miara ν spełnia warunki: $\nu(A) = \mu(A)$, dla $A \in \mathfrak{M}$ oraz $\nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = 0$, $\nu(\{1, 3, 4\}) = \nu(\{2, 3, 4\}) = 1$.

Definicja 1.5.3. Dla przestrzeni $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ zdefiniujmy *rozszerzenie σ-algebry* $\mathfrak{M}$

$$\overline{\mathfrak{M}} := \{A \subset X : \exists\, L, R \in \mathfrak{M}\ L \subset A \subset R, \mu(R \setminus L) = 0\}$$

oraz uzupełnienie miary μ

$$\bar{\mu}(A) = \mu(L),\ \ A \in \overline{\mathfrak{M}}.$$

Twierdzenie 1.5.4. *Dla dowolnej przestrzeni mierzalnej z miarą $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ zachodzi:*

1. *$\overline{\mathfrak{M}}$ jest σ-algebrą oraz $\mathfrak{M} \subset \overline{\mathfrak{M}}$;*
2. *$\bar{\mu}$ jest dobrze zdefiniowaną miarą zupełną na $\overline{\mathfrak{M}}$;*
3. *rozszerzenie $(X, \overline{\mathfrak{M}}, \bar{\mu})$ jest minimalne, tzn. jeżeli $(X, \mathfrak{N}, \nu)$ jest przestrzenią zupełną taką, że $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ oraz $\nu|_{\mathfrak{M}} = \mu$, to $\overline{\mathfrak{M}} \subset \mathfrak{N}$ oraz $\nu|_{\overline{\mathfrak{M}}} = \bar{\mu}$.*

Dowód. Punkt (1). Wykażemy następujące fakty.

a) $\overline{\mathfrak{M}} = \{A \cup Z : A \in \mathfrak{M}, \exists\, B \in \mathfrak{M}\ \mu(B) = 0, Z \subset B\}$.

Oznaczmy przez $\mathcal{A}$ rodzinę z prawej strony. Załóżmy teraz, że zbiór $C \in \overline{\mathfrak{M}}$. Wtedy istnieją zbiory $L, K \in \mathfrak{M}$ takie, że $L \subset C \subset R$ oraz $\mu(R \setminus L) = 0$. Można przyjąć $A = L$, $Z = C \setminus L$ oraz $B = R \setminus L$. To oznacza, że $C \in \mathcal{A}$. Z drugiej strony jeżeli $C \in \mathcal{A}$. Wtedy istnieją zbiory $A \in \mathfrak{M}$, $Z \subset B$, $\mu(B) = 0$ oraz $C = A \cup Z$. Możemy przyjąć $L = A$ i $R = A \cup B$, co oznacza, że $C \in \overline{\mathfrak{M}}$.

b) $\mathfrak{M} \subset \overline{\mathfrak{M}}$.

Jeżeli $A \in \mathfrak{M}$, to przyjmując $L = R = A$, dostajemy, że $A \in \overline{\mathfrak{M}}$.

c) $\emptyset \in \overline{\mathfrak{M}}$.

Oczywiste, ponieważ $\emptyset \in \mathfrak{M}$.

d) Jeżeli $A \in \overline{\mathfrak{M}}$, to $A' \in \overline{\mathfrak{M}}$.

Załóżmy, że $A \in \overline{\mathfrak{M}}$, wtedy istnieją zbiory $L, K \in \mathfrak{M}$ takie, że $L \subset A \subset R$ oraz $\mu(R \setminus L) = 0$. Mamy $R' \subset A' \subset L'$, $L' \setminus R' = R \setminus L$ i $\mu(L' \setminus R') = \mu(R \setminus L) = 0$, a to oznacza, że $A' \in \overline{\mathfrak{M}}$.

e) Jeżeli $A_j \in \overline{\mathfrak{M}}$, $j \in \mathbb{N}$, to $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \overline{\mathfrak{M}}$.

Jeżeli $A_j \in \overline{\mathfrak{M}}$, to istnieją zbiory $R_j, L_j \in \mathfrak{M}$ takie, że $\mu(R_j \setminus L_j) = 0$ oraz $L_j \subset A_j \subset R_j$, $j \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy zbiory $L = \bigcup_{j=1}^{\infty} L_j \in \mathfrak{M}$ oraz $R = \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j \in \mathfrak{M}$, wtedy $L \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset R$. Mamy również

$$\begin{aligned} R \setminus L &= \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} R_j\right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} L_j\right) = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} R_j\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} L_j'\right) \\ &= \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(R_j \cap \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} L_j'\right)\right) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (R_j \cap L_j') = \bigcup_{j=1}^{\infty} (R_j \setminus L_j) \end{aligned}$$

i wtedy

$$\mu\left(R \setminus L\right) \leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\left(R_j \setminus L_j\right)\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty}\mu(R_j \setminus L_j) = 0,$$

co dowodzi, że $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \overline{\mathfrak{M}}$.

Punkt (2). Najpierw udowodnimy, że $\bar{\mu}$ jest dobrze określona. Przyjmijmy, że $A \in \overline{\mathfrak{M}}$ oraz istnieją zbiory $L_j, R_j \in \mathfrak{M}$ takie, że $L_j \subset A \subset R_j$ oraz $\mu(R_j \setminus L_j) = 0$, dla $j = 1, 2$. Wtedy $L_1 \setminus L_2 \subset A \setminus L_2 \subset R_2 \setminus L_2$, czyli $\mu(L_1 \setminus L_2) \leq \mu(R_2 \setminus L_2) = 0$. Podobnie można wykazać, że $\mu(L_2 \setminus L_1) = 0$. Z tego wynika, że

$$\begin{aligned}&\mu(L_1) = \mu(L_1 \setminus (L_1 \cap L_2)) + \mu(L_1 \cap L_2) = \mu(L_1 \setminus L_2) + \mu(L_1 \cap L_2)\\&= \mu(L_1 \cap L_2) = \mu(L_2 \setminus L_1) + \mu(L_1 \cap L_2) = \mu(L_2 \setminus (L_1 \cap L_2)) + \mu(L_1 \cap L_2)\\&= \mu(L_2).\end{aligned}$$

Teraz wykażemy, że $\bar{\mu}$ jest miarą zupełną.

- $\bar{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.
- Warunek przeliczalnej addytywności.

  Niech $A_j \in \overline{\mathfrak{M}}$, $j \in \mathbb{N}$, będą zbiorami parami rozłącznymi, wtedy istnieją zbiory $R_j, L_j \in \mathfrak{M}$, takie że $\mu(R_j \setminus L_j) = 0$ oraz $L_j \subset A_j \subset R_j$. Zauważmy, że zbiory L_j są również parami rozłączne. Wykazaliśmy wcześniej, że można przyjąć $L = \bigcup_{j=1}^{\infty} L_j$ oraz $R = \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$ tak, aby $L \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset R$, $\mu(R \setminus L) = 0$. Z definicji otrzymujemy

  $$\bar{\mu}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} L_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\mu(L_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\bar{\mu}(A_j).$$

- Zupełność.

  Niech $A \in \overline{\mathfrak{M}}$, $\bar{\mu}(A) = 0$ i niech $B \subset A$. Korzystając z punktu (a) dostajemy istnienie zbiorów C, D i Z takich, że $C \in \mathfrak{M}$, $D \subset Z$, $\mu(Z) = 0$ oraz $\bar{\mu}(A) = \mu(C) = 0$. Niech $B = \emptyset \cup B$, $\emptyset \in \mathfrak{M}$, $B \subset A = C \cup D \subset C \cup Z$ oraz $\mu(C \cup Z) \leq \mu(C) + \mu(Z) = 0$. To oznacza, że $B \in \overline{\mathfrak{M}}$.

Punkt (3). Będziemy korzystać z definicji $\overline{\mathfrak{M}}$ zawartej w punkcie (a). Załóżmy, że $(X, \mathfrak{N}, \nu)$ jest przestrzenią zupełną taką, że $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ oraz $\nu|_{\mathfrak{M}} = \mu$. Niech $A \in \overline{\mathfrak{M}}$, wtedy istnieją zbiory B, C i Z takie, że $A = B \cup C$, $B \in \mathfrak{M}$, $C \subset Z$ i $\mu(Z) = 0$. Z tego wynika, że $B, Z \in \mathfrak{N}$ i $\nu(Z) = 0$. Miara ν jest zupełna, więc $C \in \mathfrak{N}$, skoro $C \subset Z$ i $\nu(C) \leq \nu(Z) = 0$, a wtedy $A = B \cup C \in \mathfrak{N}$. Ponadto

$$\nu(A) = \nu(B \cup C) = \nu(B) + \nu(C \setminus B) = \nu(B) = \mu(B) = \bar{\mu}(A). \qquad \square$$

1.6 Miary zewnętrzne. Konstrukcja Carathéodory'ego

Definicja 1.6.1. Niech X będzie zbiorem niepustym. Funkcję $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ nazywamy *miarą zewnętrzną* na X, gdy spełnia poniższe warunki:

1. $\varphi(\emptyset) = 0$;
2. $\forall\, A \subset B \subset X : \varphi(A) \leq \varphi(B)$;
3. $\forall\, A_j \subset X, j \in \mathbb{N} : \varphi\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty}\varphi(A_j)$.

Ćwiczenie 1.6.2. Wykazać, że φ jest miarą zewnętrzną wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek (1) w definicji 1.6.1 oraz

$$\forall\, A, A_j \subset X, j \in \mathbb{N} : \left(A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \Rightarrow \varphi\left(A\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty}\varphi(A_j)\right).$$

Przykład 1.6.3. Przykłady miar zewnętrznych.

1. Każda miara określona na $\mathcal{P}(X)$ jest miarą zewnętrzną.

2. Funkcja $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ określona wzorem
$$\varphi(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset; \\ 1, & A \neq \emptyset \end{cases}$$
jest miarą zewnętrzną.

3. Funkcja $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ określona wzorem
$$\varphi(A) = \begin{cases} 0, & \#A \le \aleph_0; \\ 1, & \#A > \aleph_0 \end{cases}$$
jest miarą zewnętrzną.

4. Funkcja $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ określona wzorem
$$\varphi(A) = \begin{cases} 0, & \#A \le \aleph_0; \\ \frac{1}{2}, & \#A, \#A' > \aleph_0; \\ 1, & \#A' \le \aleph_0 \end{cases}$$
jest miarą zewnętrzną.

Ćwiczenie 1.6.4. Czy funkcja $\varphi(A) = \operatorname{diam}(A)$ jest miarą zewnętrzną na $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$?

Obserwacja 1.6.5. *Niech $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ będzie dowolną rodziną zbiorów taką, że $\emptyset \in \mathcal{A}$, a $\alpha : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ będzie dowolną funkcją taką, że $\alpha(\emptyset) = 0$. Wtedy funkcja*
$$\varphi_\alpha(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(A_j) : A_j \in \mathcal{A}, j \in \mathbb{N}, A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right\}, \quad A \subset X,$$
jest miarą zewnętrzną na X.

Dowód. Sprawdzimy trzy warunki z definicji 1.6.1.

1. Jest oczywiste, że $\varphi_\alpha(\emptyset) = 0$.

2. Jeżeli $A \subset B \subset X$, to każde pokrycie zbioru B jest również pokryciem zbioru A, z czego wynika, że obliczając wartość $\varphi_\alpha(A)$ bierzemy infimum po większej rodzinie zbiorów niż obliczając wartość $\varphi_\alpha(B)$. Z tego wynika, że $\varphi_\alpha(A) \le \varphi_\alpha(B)$.

3. Niech $A_j \in \mathcal{P}(X)$, $j \in \mathbb{N}$, będą dowolnymi zbiorami. Bez straty ogólności możemy założyć, że $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_\alpha(A_j) < +\infty$. Ustalmy dowolne $\epsilon > 0$. Wtedy dla dowolnego $j \in \mathbb{N}$ istnieje pokrycie $B_{jk} \in \mathcal{A}$ zbioru A_j, $A_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{jk}$ takie, że $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(B_{jk}) \le \varphi_\alpha(A_j) + 2^{-j}\epsilon$. Wtedy $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{jk}$ oraz
$$\varphi_\alpha\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \le \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(B_{jk}) \le \sum_{j=1}^{\infty}(\varphi_\alpha(A_j) + 2^{-j}\epsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_\alpha(A_j) + \epsilon.$$
Z dowolności $\epsilon > 0$ dostajemy tezę. □

Ćwiczenie 1.6.6. Czy zawsze musi zachodzić równość $\varphi_\alpha(A) = \alpha(A)$ dla $A \in \mathcal{A}$?

Definicja 1.6.7 (Konstrukcja Carathéodory'ego)**.** Niech $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ będzie miarą zewnętrzną. Zbiór A nazywamy *mierzalnym względem φ w sensie Carathéodory'ego*[4] *(φ-mierzalnym)*, gdy spełnia *warunek Carathéodory'ego*:
$$\forall\, T \subset X : \varphi(T) = \varphi(T \cap A) + \varphi(T \setminus A). \tag{1.6.1}$$

Rodzinę wszystkich zbiorów φ-mierzalnych będziemy oznaczać przez $\mathfrak{M}_\varphi$.

[4] Constantin Carathéodory (1873-1950) – grecki matematyk i fizyk.

Uwaga 1.6.8. Zauważmy, że dla dowolnych zbiorów T i A zachodzi $T \subset (T \cap A) \cup (T \setminus A)$, a więc z definicji miary zewnętrznej mamy zawsze nierówność

$$\varphi(T) \leq \varphi(T \cap A) + \varphi(T \setminus A).$$

Aby pokazać, że zbiór $A \in \mathfrak{M}_\varphi$, wystarczy więc wykazać, że

$$\forall T \subset X, \varphi(T) < +\infty : \varphi(T) \geq \varphi(T \cap A) + \varphi(T \setminus A). \tag{1.6.2}$$

Twierdzenie 1.6.9 (Twierdzenie Carathéodory'ego)**.** *Niech φ będzie miarą zewnętrzną na X. Wtedy:*

1. *$\mathfrak{M}_\varphi$ jest σ-algebrą;*
2. *$\varphi|_{\mathfrak{M}_\varphi}$ jest miarą zupełną na $\mathfrak{M}_\varphi$.*

Dowód. Punkt (1). Wykażemy następujące fakty.

a) Jeżeli $A, B \in \mathfrak{M}_\varphi$, to $A \cup B \in \mathfrak{M}_\varphi$.

Ustalmy dowolny zbiór $T \subset X$. Mamy

$$\begin{aligned}
\varphi(T) &\overset{A\in\mathfrak{M}_\varphi}{=} \varphi(T \cap A) + \varphi(T \setminus A) \\
&\overset{B\in\mathfrak{M}_\varphi}{=} \varphi(T \cap A) + \varphi((T \setminus A) \cap B) + \varphi((T \setminus A) \setminus B) \\
&= \varphi(T \cap (A \cup B) \cap A) + \varphi(T \cap (A \cup B) \setminus A) + \varphi(T \setminus (A \cup B)) \\
&\overset{A\in\mathfrak{M}_\varphi}{=} \varphi(T \cap (A \cup B)) + \varphi(T \setminus (A \cup B)),
\end{aligned}$$

co oznacza, że $A \cup B \in \mathfrak{M}_\varphi$.

b) Jeżeli $A \in \mathfrak{M}_\varphi$, to $A' \in \mathfrak{M}_\varphi$.

Ta własność wynika z faktu, że warunek Carathéodory'ego (1.6.1) można zapisać w formie symetrycznej względem dopełnienia

$$\forall T \subset X : \varphi(T) = \varphi(T \cap A) + \varphi(T \cap A').$$

c) Jeżeli $A_j \in \mathfrak{M}_\varphi$, $j \in \mathbb{N}$, to $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathfrak{M}_\varphi$.

Załóżmy na początek, że $A, B \in \mathfrak{M}_\varphi$ i $A \cap B = \emptyset$. Wtedy dla dowolnego zbioru $T \subset X$ mamy

$$\varphi(T \cap (A \cup B)) = \varphi(T \cap (A \cup B) \cap A) + \varphi(T \cap (A \cup B) \setminus A) = \varphi(T \cap A) + \varphi(T \cap B).$$

Jeżeli A_j, $j \in \mathbb{N}$ są parami rozłącznymi zbiorami, to na mocy zasady indukcji matematycznej otrzymujemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\sum_{j=1}^n \varphi(T \cap A_j) = \varphi\left(T \cap \bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \varphi\left(T \cap \bigcup_{j=1}^\infty A_j\right).$$

Przechodząc z $n \to \infty$, dostajemy

$$\sum_{j=1}^\infty \varphi(T \cap A_j) \leq \varphi\left(T \cap \bigcup_{j=1}^\infty A_j\right).$$

Ponieważ φ jest miarą zewnętrzną, to

$$\varphi\left(T \cap \bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) \leq \sum_{j=1}^\infty \varphi(T \cap A_j),$$

z czego wynika, że

$$\varphi\left(T \cap \bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) = \sum_{j=1}^\infty \varphi(T \cap A_j). \tag{1.6.3}$$

Skoro $\bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathfrak{M}_\varphi$, to

$$\varphi(T) = \varphi\left(T \cap \bigcup_{j=1}^n A_j\right) + \varphi\left(T \setminus \bigcup_{j=1}^n A_j\right) \geq \sum_{j=1}^n \varphi\left(T \cap A_j\right) + \varphi\left(T \setminus \bigcup_{j=1}^\infty A_j\right),$$

stąd w granicy $n \to \infty$ dostajemy

$$\varphi(T) \geq \sum_{j=1}^\infty \varphi\left(T \cap A_j\right) + \varphi\left(T \setminus \bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) = \varphi\left(T \cap \bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) + \varphi\left(T \setminus \bigcup_{j=1}^\infty A_j\right),$$

czyli $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathfrak{M}_\varphi$.

Dla dowolnych zbiorów $A_j \in \mathfrak{M}_\varphi$, $j \in \mathbb{N}$ możemy ich sumę przedstawić jako sumę zbiorów parami rozłącznych $\bigcup_{j=1}^\infty A_j = \bigcup_{j=1}^\infty B_j$, gdzie

$$B_1 = A_1,\ B_j = A_j \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{j-1}),\ j \geq 2.$$

c) $\emptyset \in \mathfrak{M}_\varphi$.

Dla dowolnego $T \subset X$ mamy

$$\varphi(T) = 0 + \varphi(T) = \varphi(T \cap \emptyset) + \varphi(T \setminus \emptyset).$$

Punkt (2). Podstawiając do równości (1.6.3) zbiór $T = X$, dostajemy

$$\varphi\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) = \sum_{j=1}^\infty \varphi(A_j),$$

a więc $\varphi|_{\mathfrak{M}_\varphi}$ jest miarą. Pozostaje pokazać, że miara ta jest zupełna. Załóżmy, że $\varphi(A) = 0$. Dla dowolnego $T \subset X$ mamy $\varphi(T \cap A) \leq \varphi(A) = 0$ i wtedy

$$\varphi(T) \leq \varphi(T \cap A) + \varphi(T \setminus A) \leq 0 + \varphi(T) = \varphi(T),$$

czyli zbiór A spełnia warunek Carathéodory'ego i $A \in \mathfrak{M}_\varphi$. $\square$

Definicja 1.6.10. Niech φ będzie miarą zewnętrzną na X, a $\mathfrak{M}_\varphi$ σ-algebrą zbiorów φ-mierzalnych. Mówimy, że miara zewnętrzna φ jest *miarą zewnętrzną regularną*, gdy

$$\forall\, Y \subset X\ \exists\, A \in \mathfrak{M}_\varphi : Y \subset A, \varphi(Y) = \varphi(A).$$

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, $Y, Z \subset X$. *Odstęp między zbiorami* Y, Z definiujemy jako

$$\mathrm{dist}(Y, Z) = \inf\left\{d(y, z) : y \in Y, z \in Z\right\}.$$

Jeżeli $Y = \emptyset$ lub $Z = \emptyset$, to przyjmujemy $\mathrm{dist}(Y, Z) = +\infty$.

Definicja 1.6.11. Miarę zewnętrzną φ nazywamy *metryczną*, gdy spełnia następujący warunek

$$\forall\, Y, Z \subset X : \mathrm{dist}(Y, Z) > 0 \Rightarrow \varphi(Y \cup Z) = \varphi(Y) + \varphi(Z).$$

Twierdzenie 1.6.12. *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i niech φ będzie miarą zewnętrzną na X, a $\mathfrak{M}_\varphi$ σ-algebrą zbiorów φ-mierzalnych. Jeżeli φ jest miarą zewnętrzną metryczną, to $\mathcal{B}(X) \subset \mathfrak{M}_\varphi$.*

Dowód. Wystarczy wykazać, że każdy zbiór otwarty jest φ-mierzalny. Niech $G \in \mathrm{top}\, X$. Zdefiniujmy zbiory $G_n = \{x : \mathrm{dist}(x, G') > \frac{1}{n}\}$, wtedy $\mathrm{dist}(G_n, G') \geq \frac{1}{n} > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Niech $D_n = \{x : \frac{1}{n+1} < \mathrm{dist}(x, G') \leq \frac{1}{n}\}$, wtedy $\mathrm{dist}(D_i, D_j) \geq \frac{1}{i+1} - \frac{1}{j}$ dla $i + 2 \leq j$. Zauważmy, że skoro G jest zbiorem otwartym to $G = \{x : \mathrm{dist}(x, G') > 0\}$ i wtedy

$$G \setminus G_n = \bigcup_{j=n}^\infty D_j,\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.6.4}$$

Aby pokazać, że G jest φ-mierzalny, wystarczy wykazać warunek (1.6.2)

$$\forall T \subset X, \varphi(T) < +\infty : \varphi(T) \geq \varphi(T \cap G) + \varphi(T \setminus G).$$

Weźmy dowolny zbiór $T \subset X$, $\varphi(T) < +\infty$, wtedy, korzystając z metryczności φ, otrzymujemy

$$\varphi(T \cap D_1) + \varphi(T \cap D_3) + \cdots + \varphi(T \cap D_{2n-1}) = \varphi(T \cap (D_1 \cup \cdots \cup D_{2n-1})) \leq \varphi(T).$$

Podobnie można dostać

$$\varphi(T \cap D_2) + \varphi(T \cap D_4) + \cdots + \varphi(T \cap D_{2n}) = \varphi(T \cap (D_2 \cup \cdots \cup D_{2n})) \leq \varphi(T),$$

z czego wynika, że $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(T \cap D_j) \leq 2\varphi(T) < +\infty$. Korzystając z warunku (1.6.4), otrzymujemy

$$\varphi(T \cap (G \setminus G_n)) \leq \sum_{j=n}^{\infty} \varphi(T \cap D_j) \to 0,\ n \to \infty.$$

Ponieważ $\operatorname{dist}(G_n, G') > 0$, to również $\operatorname{dist}(G_n \cap T, G' \cap T) > 0$ a wtedy dostajemy

$$\begin{aligned} &\varphi(T \cap G) + \varphi(T \setminus G) \leq \varphi(T \cap (G \setminus G_n)) + \varphi(T \cap G_n) + \varphi(T \setminus G) \\ &\leq \varphi(T \cap (G \setminus G_n)) + \varphi(T) \to 0 + \varphi(T) = \varphi(T),\ n \to \infty. \qquad \square \end{aligned}$$

1.7 Miara Lebesgue'a

Kostką domkniętą w $\mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór postaci $P = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, a *kostką otwartą* w $\mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór postaci $Q = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, gdzie $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_j < b_j$, $j = 1, \ldots, n$. Każda inna kostka ograniczona R jest zawarta w pewnej kostce P i zawiera pewną kostkę Q. *Objętość* tych kostek definiujemy jako

$$V^n(P) = V^n(Q) = V^n(R) = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n).$$

Przyjmijmy również, że $V^n(\emptyset) = 0$.

Definicja 1.7.1 (Miara zewnętrzna Lebesgue'a)**.** Funkcja

$$\mathcal{L}_e^n(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} V^n(P_j) : P_j - \text{kostki domknięte}, A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \right\},\ A \subset \mathbb{R}^n,$$

jest nazywana *miarą zewnętrzną Lebesgue'a*[5].

Ćwiczenie 1.7.2. Obliczyć $\mathcal{L}_e^1(\mathbb{Q} \cap [0, 1])$ i $\mathcal{L}_e^2(\mathbb{Q} \times \mathbb{R})$.

Obserwacja 1.7.3. *$\mathcal{L}_e^n(P) = V^n(P)$, dla dowolnej kostki $P \subset \mathbb{R}^n$.*

Dowód. Jeżeli P jest dowolną kostką, to $P \subset \overline{P}$ i

$$\mathcal{L}_e^n(P) \leq V^n(\overline{P}) = V^n(P).$$

Niech P_j, $j \in \mathbb{N}$, będą kostkami otwartymi takimi, że $P \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$. Ustalmy dowolne $\epsilon > 0$. Wtedy istnieje kostka domknięta $P_0 \subset P$ taka, że $V^n(P) - \epsilon < V^n(P_0)$. Ponieważ $P_0 \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$, korzystając ze zwartości P_0, dostajemy, że $P_0 \subset P_1 \cup \cdots \cup P_N$. Wtedy

$$V^n(P) - \epsilon < V^n(P_0) \leq V^n(P_1) + \cdots + V^n(P_N) \leq \sum_{j=1}^{\infty} V^n(P_j),$$

przechodząc do infimum po wszystkich możliwych pokryciach, mamy $V^n(P) - \epsilon < \mathcal{L}_e^n(P)$. Z dowolności ϵ dostajemy $V^n(P) \leq \mathcal{L}_e^n(P)$. $\square$

[5] Henri Lebesgue (1875-1941) – francuski matematyk.

Uwaga 1.7.4. 1. W definicji $\mathcal{L}_e^n$ kostki domknięte można zastąpić kostkami otwartymi. Niech Q_j będą kostkami otwartymi, $j \in \mathbb{N}$, $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bar{Q}_j$, wtedy

$$\mathcal{L}_e^n(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} V^n(\bar{Q}_j) = \sum_{j=1}^{\infty} V^n(Q_j).$$

Ustalmy teraz dowolne $\epsilon > 0$ i niech P_j, $j \in \mathbb{N}$, będzie pokryciem kostkami domkniętymi takie, że $\sum_{j=1}^{\infty} V^n(P_j) < \mathcal{L}_e^n(A) + \frac{1}{2}\epsilon$. Wtedy istnieją kostki otwarte Q_j, $j \in \mathbb{N}$, takie, że $P_j \subset Q_j$, $V^n(Q_j) < V^n(P_j) + 2^{-j-1}\epsilon$. Wtedy $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ oraz

$$\sum_{j=1}^{\infty} V^n(Q_j) \leq \mathcal{L}_e^n(A) + \epsilon,$$

z czego wynika, że

$$\mathcal{L}_e^n(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} V^n(Q_j) : Q_j - \text{kostki otwarte}, A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \right\}.$$

2. W definicji $\mathcal{L}_e^n$ można ograniczyć się do kostek otwartych lub domkniętych o średnicy mniejszej od dowolnie ustalonej stałej $\delta > 0$.

Definicja 1.7.5. Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ spełniający warunek Carathéodory'ego względem miary zewnętrznej Lebesgue'a $\mathcal{L}_e^n$ będziemy nazywać *mierzalnym w sensie Lebesgue'a*, a σ-algebrą $\mathfrak{M}_{\mathcal{L}_e^n}$ wszystkich tych zbiorów będziemy oznaczać przez $\mathfrak{L}_n$. Miarę nieujemną $\mathcal{L}_e^n|_{\mathfrak{L}_n}$ nazywamy *miarą Lebesgue'a* i oznaczmy ją przez $\mathcal{L}^n$. (Uwaga: miara Lebesgue'a jest również oznaczana przez m_n lub λ_n.)

Definicja 1.7.6. Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. Mówimy, że miara μ (lub przestrzeń $(X, \mathfrak{M}, \mu)$) jest *σ-skończona*, gdy

$$\exists A_j \in \mathfrak{M}, j \in \mathbb{N}, \mu(A_j) < +\infty : X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j.$$

Zauważmy, że w powyższej definicji można założyć, że zbiory A_j są parami rozłączne lub tworzą ciąg wstępujący.

Twierdzenie 1.7.7. *1. $\mathcal{L}^n$ jest miarą zupełną w $\mathbb{R}^n$.*

2. $\mathcal{L}_e^n$ jest miarą zewnętrzną metryczną w $\mathbb{R}^n$.

3. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{L}_n$.

4. Jeżeli P jest kostką w $\mathbb{R}^n$, to $\mathcal{L}^n(P) = V^n(P)$.

5. Jeżeli $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem ograniczonym, to $\mathcal{L}_e^n(A) < +\infty$.

6. $\mathcal{L}^n$ jest miarą σ-skończoną.

7. $\forall Y \subset \mathbb{R}^n \; \exists G \subset \mathbb{R}^n, G$ – typu $G_\delta, Y \subset G : \mathcal{L}_e^n(Y) = \mathcal{L}^n(G)$.

8. $\mathcal{L}_e^n$ jest miarą zewnętrzną regularną w $\mathbb{R}^n$.

9. Dla dowolnych $Y \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ zachodzi $\mathcal{L}_e^n(a + Y) = \mathcal{L}_e^n(Y)$.

10. Dla dowolnych $Y \subset \mathbb{R}^n$, $s \in [0, +\infty]$ zachodzi $\mathcal{L}_e^n(sY) = s^n \mathcal{L}_e^n(Y)$.

11. Dla dowolnych $Y \in \mathfrak{L}_n$, $a \in \mathbb{R}^n$ zachodzi $a + Y \in \mathfrak{L}_n$ oraz $\mathcal{L}^n(a + Y) = \mathcal{L}^n(Y)$.

12. Dla dowolnych $Y \in \mathfrak{L}_n$, $s \in [0, +\infty)$ zachodzi $sY \in \mathfrak{L}_n$ oraz $\mathcal{L}^n(sY) = s^n \mathcal{L}^n(Y)$.

Dowód. Punkt (1). Wynika z twierdzenia 1.6.9.

Punkt (2). Weźmy zbiory $A, B \subset \mathbb{R}^n$ takie, że ich odległość $\operatorname{dist}(A, B) = \rho > 0$. Można założyć, że $\mathcal{L}_e^n(A), \mathcal{L}_e^n(B) < +\infty$. Z własności miary zewnętrznej mamy $\mathcal{L}_e^n(A \cup B) \leq \mathcal{L}_e^n(A) + \mathcal{L}_e^n(B)$. Aby wykazać przeciwną nierówność weźmy pokrycie kostkami domkniętymi P_j, $j \in \mathbb{N}$, $A \cup B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$ oraz $\operatorname{diam} P_j < \frac{\rho}{3}$. Wtedy

$$A \subset \bigcup_{j : P_j \cap A \neq \emptyset} P_j \quad \text{oraz} \quad B \subset \bigcup_{j : P_j \cap B \neq \emptyset} P_j.$$

Z ciągu P_j odrzućmy te kostki, które nie mają punktów wspólnych z $A \cup B$. Wtedy albo $A \cap P_j \neq \emptyset$ albo $B \cap P_j \neq \emptyset$, bo $\operatorname{diam} P_j < \frac{\varrho}{3}$. Dostajemy

$$\mathcal{L}_e^n(A) + \mathcal{L}_e^n(B) \leq \sum_{j: P_j \cap A \neq \emptyset} V^n(P_j) + \sum_{j: P_j \cap B \neq \emptyset} V^n(P_j) = \sum_j V^n(P_j),$$

a po przejściu do infimum otrzymujemy $\mathcal{L}_e^n(A) + \mathcal{L}_e^n(B) \leq \mathcal{L}_e^n(A \cup B)$.

Punkt (3). Wynika z punktu (2).

Punkt (4). Każda kostka $P \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem borelowskim. Z obserwacji 1.7.3 dostajemy $V^n(P) = \mathcal{L}_e^n(P) = \mathcal{L}^n(P)$.

Punkt (5). Jeżeli Y jest zbiorem ograniczonym, to istnieje kostka domknięta P taka, że $Y \subset P$, a wtedy $\mathcal{L}_e^n(Y) \leq \mathcal{L}_e^n(P) = V^n(P) < +\infty$.

Punkt (6). Zauważmy, że $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} [-j, j]^n$.

Punkt (7). Jeżeli $\mathcal{L}_e^n(Y) = +\infty$, to wystarczy przyjąć $G = \mathbb{R}^n$. Załóżmy teraz, że $\mathcal{L}_e^n(Y) < +\infty$. Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ istnieje pokrycie kostkami otwartymi P_j^k takie, że $Y \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j^k$ oraz $\mathcal{L}_e^n(Y) + \frac{1}{k} \geq \sum_{j=1}^{\infty} V^n(P_j^k)$. Przyjmijmy $\tilde{G}_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j^k \in \operatorname{top} \mathbb{R}^n$. Wtedy

$$\mathcal{L}_e^n(Y) \leq \mathcal{L}_e^n(\tilde{G}_k) = \mathcal{L}^n(\tilde{G}_k) \leq \sum_{j=1}^{\infty} V^n(P_j^k) \leq \mathcal{L}_e^n(Y) + \frac{1}{k}.$$

Zdefiniujmy zbiory

$$G_k = \tilde{G}_1 \cap \cdots \cap \tilde{G}_k, \quad G = \bigcap_{j=1}^{\infty} \tilde{G}_j.$$

Wtedy $Y \subset G \subset G_k$, $G_k \in \operatorname{top} \mathbb{R}^n$, G jest zbiorem typu G_δ. Ponadto dostajemy

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}_e^n(Y) \leq \mathcal{L}_e^n(G_k) = & \mathcal{L}^n(G_k) \leq \mathcal{L}_e^n(Y) + & \dfrac{1}{k}, \\ & \downarrow k \to \infty & \downarrow k \to \infty \\ \mathcal{L}_e^n(Y) \leq & \mathcal{L}^n(G) \leq & \mathcal{L}_e^n(Y). \end{array}$$

Punkt (8). Wynika z punktu (7).

Punkt (9). Wystarczy zauważyć, że dla dowolnej kostki P zbiór $a + P$ jest też kostką oraz $V^n(a + P) = V^n(P)$. Ponadto każdemu pokryciu kostkami P_j zbioru Y odpowiada pokrycie $a + P_j$ zbioru $a + Y$, a każdemu pokryciu kostkami Q_j zbioru $a + Y$ odpowiada pokrycie $-a + Q_j$ zbioru Y.

Punkt (10). Dla $s = 0$ równość jest oczywista. Dla $s > 0$ wystarczy zauważyć, że dla dowolnej kostki P zbiór sP jest też kostką oraz $V^n(sP) = s^n V^n(P)$. Ponadto każdemu pokryciu kostkami P_j zbioru Y odpowiada pokrycie sP_j zbioru sY, a każdemu pokryciu kostkami Q_j zbioru sY odpowiada pokrycie $s^{-1}Q_j$ zbioru Y.

Punkty (11) i (12). Jeżeli $Y \in \mathfrak{L}_n$, to mierzalność zbiorów $a + Y$ i sY wynika z twierdzenia 1.7.8. Wzory $\mathcal{L}^n(a + Y) = \mathcal{L}^n(Y)$ i $\mathcal{L}^n(sY) = s^n \mathcal{L}^n(Y)$ wynikają z punktów (9) i (10). □

Twierdzenie 1.7.8. *Niech $A \subset \mathbb{R}^n$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

1. $A \in \mathfrak{L}_n$;
2. $\forall \epsilon > 0 \ \exists G \in \operatorname{top} \mathbb{R}^n : A \subset G,\ \mathcal{L}^n(G \setminus A) < \epsilon$;
3. $A = B \setminus C$, *gdzie B jest zbiorem typu G_δ i $\mathcal{L}^n(C) = 0$;*
4. $\forall \epsilon > 0 \ \exists F \in \operatorname{cotop} \mathbb{R}^n : F \subset A,\ \mathcal{L}^n(A \setminus F) < \epsilon$;
5. $A = B \cup C$, *gdzie B jest zbiorem typu F_σ i $\mathcal{L}^n(C) = 0$;*
6. $A = B \cup C$, *gdzie B jest zbiorem σ-zwartym*[6] *i $\mathcal{L}^n(C) = 0$.*

[6] Zbiór B jest zbiorem *σ-zwartym*, gdy jest przeliczalną sumą zbiorów zwartych.

Dowód. Implikacja (1) $\Rightarrow$ (2). Ustalmy dowolne $\epsilon > 0$. Ponieważ miara Lebesgue'a jest σ-skończona (twierdzenie 1.7.7), to istnieją zbiory $A_j \in \mathfrak{L}_n$, $j \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}^n(A_j) < +\infty$ oraz $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$. Skoro $\mathcal{L}^n_e(A_j) = \mathcal{L}^n(A_j)$, to korzystając z definicji miary zewnętrznej Lebesgue'a stwierdzamy, że istnieją zbiory otwarte $G_j \supset A_j$ (G_j jest przeliczalną sumą kostek otwartych) takie, że $\mathcal{L}^n(G_j) \le \mathcal{L}^n(A_j) + 2^{-j-1}\epsilon$. Niech $G = \bigcup_{j=1}^\infty G_j \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n$, wtedy $A \subset G$ oraz

$$G \setminus A = \left(\bigcup_{j=1}^\infty G_j\right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) \subset \bigcup_{j=1}^\infty (G_j \setminus A_j)$$

i w końcu

$$\mathcal{L}^n(G \setminus A) \le \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{j=1}^\infty (G_j \setminus A_j)\right) \le \sum_{j=1}^\infty \mathcal{L}^n(G_j \setminus A_j) \le \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Implikacja (2) $\Rightarrow$ (3). Dla dowolnego $j \in \mathbb{N}$ istnieje zbiór $G_j \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n$ taki, że $A \subset G_j$ oraz $\mathcal{L}^n(G_j \setminus A) \le \frac{1}{j}$. Zdefiniujmy zbiór $B = \bigcap_{j=1}^\infty G_j \supset A$. Wtedy B jest zbiorem typu G_δ i niech $C = B \setminus A \subset G_j \setminus A$. Dostajemy, że $\mathcal{L}^n(C) \le \mathcal{L}^n(G_j \setminus A) \le \frac{1}{j}$, czyli $\mathcal{L}^n(C) = 0$.

Implikacja (3) $\Rightarrow$ (1). Zbiory $B, C \in \mathfrak{L}_n$, a wtedy $A = B \setminus C \in \mathfrak{L}_n$.

Implikacja (2) $\Rightarrow$ (4). Jeżeli $A \in \mathfrak{L}_n$, to $A' \in \mathfrak{L}_n$. Ustalmy dowolne $\epsilon > 0$. Z punktu (2) wnioskujemy, że istnieje zbiór otwarty G taki, że $A' \subset G$ oraz $\mathcal{L}^n(G \setminus A') < \epsilon$ oraz $G \setminus A' = A \setminus G'$. Niech $F = G'$, a wtedy $F \subset A$ i $\mathcal{L}^n(A \setminus F) = \mathcal{L}^n(G \setminus A') < \epsilon$.

Implikacja (4) $\Rightarrow$ (5). Dla dowolnego $j \in \mathbb{N}$ istnieje zbiór $F_j \in \operatorname{cotop}\mathbb{R}^n$ taki, że $A \supset F_j$ oraz $\mathcal{L}^n(A \setminus F_j) \le \frac{1}{j}$. Zdefiniujmy zbiór $B = \bigcup_{j=1}^\infty F_j \subset A$. Wtedy B jest zbiorem typu F_σ i niech $C = A \setminus B \subset A \setminus F_j$. Dostajemy, że $\mathcal{L}^n(C) \le \mathcal{L}^n(A \setminus F_j) \le \frac{1}{j}$, czyli $\mathcal{L}^n(C) = 0$.

Implikacja (5) $\Rightarrow$ (6). Wystarczy zauważyć, że każdy zbiór domknięty jest σ-zwarty.

Implikacja (6) $\Rightarrow$ (1). Wystarczy zauważyć, że przeliczalna suma zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a jest mierzalna w sensie Lebesgue'a. □

Wniosek 1.7.9. *Miara Lebesgue'a jest* miarą regularną[7]*, tzn.*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(A) &= \inf\{\mathcal{L}^n(U) : U \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n, A \subset U\} \quad \textit{(miara zewnętrznie regularna)}\\ &= \sup\{\mathcal{L}^n(K) : K - \textit{zbiór zwarty}, K \subset A\} \quad \textit{(miara wewnętrznie regularna).}\end{aligned}$$

Ćwiczenie 1.7.10. Znaleźć zbiór nieborelowski mierzalny w sensie Lebesgue'a.

Teraz podamy przykład zbioru niemierzalnego.

Przykład 1.7.11. (Zbiór Vitalego[8]). Istnieje zbiór $V \subset \mathbb{R}$ niemierzalny w sensie Lebesgue'a[9]. Na odcinku $[0,1]$ zdefiniujmy relację równoważności

$$x \sim y \;\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Niech V będzie zbiorem utworzonym z reprezentantów klas abstrakcji $[0,1]/\sim$, tzn.

$$(A \in [0,1]/\sim) \Rightarrow (\#(A \cap V) = 1).$$

Niech r_n będzie ciągiem liczb wymiernych z odcinka $[-1,1]$. Zdefiniujmy $V_n = r_n + V$. Wtedy zbiory V_n są parami rozłączne, bo jeżeli istnieje $x \in V_n \cap V_m$, to $x = r_n + a = r_m + b$, i dochodzimy do sprzeczności, gdyż $a - b = r_m - r_n \in \mathbb{Q}$. Ponadto $[0,1] \subset \bigcup_{n=1}^\infty V_n \subset [-1,2]$, bo jeżeli $x \in [0,1]$, to $x \in [y] \in [0,1]/\sim$ oraz $x \in V_k$, gdzie $r_k = x - y \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$; jeżeli $z \in V_n$, to $z = r_n + x$, $r_n \in [-1,1]$, $x \in [0,1]$, czyli $z \in [-1,2]$. Załóżmy teraz, że $V \in \mathfrak{L}_1$, wtedy również $V_n \in \mathfrak{L}_1$. Ponieważ zbiory te są ograniczone to $\mathcal{L}^1(V) = \mathcal{L}^1(V_n) = c$, $n \in \mathbb{N}$. Skoro $[0,1] \subset \bigcup_{n=1}^\infty V_n$, to $c > 0$, a wtedy $\mathcal{L}^1\left(\bigcup_{n=1}^\infty V_n\right) = \sum_{n=1}^\infty c = +\infty$, co jest niemożliwe skoro $\bigcup_{n=1}^\infty V_n \subset [-1,2]$.

Przykład 1.7.12. (Zbiór Cantora[10]). Niech $C_0 = [0,1]$. Z odcinka C_0 usuwamy środkowy odcinek otwarty $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ i dostajemy zbiór domknięty C_1. Przypuśćmy, że wyznaczyliśmy już zbiór C_n, tak, że jest sumą 2^n rozłącznych odcinków domkniętych. Każdy z 2^n odcinków tworzących ten zbiór dzielimy na 3 rozłączne odcinki równej długości,

[7] Miarę nazywamy *regularną*, gdy jest miarą zewnętrznie regularną i wewnętrznie regularną.
[8] Giuseppe Vitali (1875-1932) – włoski matematyk.
[9] W konstrukcji zostanie wykorzystany Aksjomat wyboru.
[10] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) – niemiecki matematyk.

z których środkowy odcinek jest otwarty, a odcinki skrajne są domknięte. Usuwamy ze zbioru C_n wszystkie środkowe odcinki otwarte. Precyzyjniej

$$C_n = \frac{1}{3}C_{n-1} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{n-1}\right),\ n \geq 1,\ C_0 = [0,1].$$

Zbiór

$$C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

nazywamy *zbiorem Cantora.* Zbiór Cantora jest mocy continuum, jest zwarty, doskonały (nie ma punktów izolowanych), nigdziegęsty (wnętrze domknięcia jest puste) i ma miarę Lebesgue'a zero (bo $C_n \supset C_{n+1}$ oraz $\mathcal{L}^1(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$).

1.8 Szczególne własności miary Lebesgue'a

Miary Lebesgue'a nie można rozszerzyć na σ-algebrę, zawierającą kostki domknięte i większą niż rodzina zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a.

Twierdzenie 1.8.1. *Niech $\mathfrak{M}$ będzie σ-algebrą w $\mathbb{R}^n$ zawierającą kostki domknięte i taką, że $\mathcal{L}^n|_{\mathfrak{M}}$ jest miarą. Wtedy $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{L}_n$.*

Dowód. Skoro kostki domknięte są zawarte w $\mathfrak{M}$, to $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{M}$. Niech $Y \in \mathfrak{M}$ i $T \subset \mathbb{R}^n$. Wtedy z twierdzenia 1.7.7 istnieje zbiór $B \supset T$ typu G_δ, taki że $\mathcal{L}^n_e(T) = \mathcal{L}^n(B)$. Mamy

$$\mathcal{L}^n_e(T \cap Y) + \mathcal{L}^n_e(T \cap Y') \leq \mathcal{L}^n_e(B \cap Y) + \mathcal{L}^n_e(B \cap Y') = \mathcal{L}^n(B \cap Y) + \mathcal{L}^n(B \cap Y') = \mathcal{L}^n(B) = \mathcal{L}^n_e(T),$$

co oznacza na mocy warunku (1.6.2), że $Y \in \mathfrak{L}_n$. □

Miara Lebesgue'a jest jedyną miarą określoną na σ-algebrze zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a i taką, że miara kostki jest równa jej objętości.

Twierdzenie 1.8.2. *Niech μ będzie miarą określoną na σ-algebrze $\mathfrak{L}_n$ i taką, że dla dowolnej kostki domkniętej $P \subset \mathbb{R}^n$ mamy $\mu(P) = V^n(P)$. Wtedy $\mu = \mathcal{L}^n$.*

Dowód. Niech $A \in \mathfrak{L}_n$ i niech P_j, $j \in \mathbb{N}$, będzie ciągiem kostek domkniętych takim, że $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$. Wtedy

$$\mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j) = \sum_{j=1}^{\infty} V^n(P_j),$$

i, przechodząc do infimum po wszystkich pokryciach, dostajemy $\mu(A) \leq \mathcal{L}^n(A)$.

Teraz udowodnimy nierówność przeciwną. Załóżmy na początek, że $A \in \mathfrak{L}_n$ jest zbiorem ograniczonym, $P \supset A$, gdzie P jest kostką domkniętą. Mamy $\mu(P \setminus A) \leq \mathcal{L}^n(P \setminus A) < +\infty$, czyli $\mu(P) - \mu(A) \leq \mathcal{L}^n(P) - \mathcal{L}^n(A)$, a stąd dostajemy $\mathcal{L}^n(A) \leq \mu(A)$.

Jeżeli $A \in \mathfrak{L}_n$ jest zbiorem nieograniczonym, to istnieją zbiory $A_1 = A \cap [-1,1]^n$, $A_j = A \cap ([-1-j, j+1]^n \setminus [-j,j]^n)$, $j \geq 2$, mierzalne, rozłączne, ograniczone i takie, że $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Mamy

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(A_j) = \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mathcal{L}^n(A). \qquad \square$$

Miara Lebesgue'a jest jedyną miarą borelowską niezmienniczą ze względu na przesunięcia i taką, że miara kostki jednostkowej jest równa 1.

Twierdzenie 1.8.3. *Niech $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą. Jeżeli spełnione są warunki:*

1. *$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\, \forall\, a \in \mathbb{R}^n : \mu(a + A) = \mu(A)$;*

2. *$\mu([0,1)^n) = 1$,*

to $\mu = \mathcal{L}^n$.

Dowód. Niech $P_0 = [0,1)^n$ będzie kostką jednostkową, $\mu(P_0) = \mathcal{L}^n(P_0) = 1$.

- Podzielmy każdy bok kostki P_0 na k równych części, z których każdy jest odcinkiem lewostronnie domkniętym i prawostronnie otwartym. Dostaniemy wtedy podział kostki P_0 na k^n rozłącznych jednakowych kostek $P_j = a_j + Q_k$, $j = 1, \ldots, k^n$, gdzie $Q_k = \frac{1}{k}P_0$. Mamy

$$k^n\mu(Q_k) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{k^n} a_j + Q_k\right) = \mu(P_0) = \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{j=1}^{k^n} a_j + Q_k\right) = k^n\mathcal{L}^n(Q_k), \tag{1.8.1}$$

  czyli $\mu(Q_k) = \mathcal{L}^n(Q_k)$. Podobnie można wykazać, że miary te są równe na każdej kostce postaci $a + \frac{l}{k}P_0$ $(k, l \in \mathbb{N})$, z tego wnioskujemy, że $\mu = \mathcal{L}^n$ dla zbiorów otwartych.

- Z równości (1.8.1) dostajemy $\mu(a + \frac{1}{k}P_0) = k^{-n}$, a z tego wynika, że miara μ jest skończona dla zbiorów borelowskich i ograniczonych. Teraz weźmy ograniczony zbiór typu G_δ postaci $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$, gdzie zbiory A_j są otwarte i ograniczone. Mamy

$$\mu(A) = \lim_{j\to\infty}\mu(A_j) = \lim_{j\to\infty}\mathcal{L}^n(A_j) = \mathcal{L}^n(A).$$

- Niech A będzie zbiorem ograniczonym i borelowskim miary zero, wtedy z twierdzenia 1.7.8 $A \subset B$, gdzie B jest zbiorem ograniczonym typu G_δ i $\mathcal{L}^n(B) = 0$. Wtedy $\mu(A) \le \mu(B) = \mathcal{L}^n(B) = 0$.

- Jeżeli A jest zbiorem borelowskim i ograniczonym, to z twierdzenia 1.7.8 istnieją zbiór ograniczony B typu G_δ i zawarty w nim zbiór borelowski C miary Lebesgue'a zero takie, że $A = B \setminus C$. Wtedy

$$\mu(A) = \mu(B \setminus C) = \mu(B) - \mu(C) = \mathcal{L}^n(B) - \mathcal{L}^n(C) = \mathcal{L}^n(B \setminus C) = \mathcal{L}^n(A).$$

- Jeżeli A jest dowolnym zbiorem borelowskim, to $A \cap (-j,j)^n \nearrow A$ i z poprzedniego punktu mamy

$$\mu(A) = \lim_{j\to\infty}\mu(A_j) = \lim_{j\to\infty}\mathcal{L}^n(A_j) = \mathcal{L}^n(A). \qquad \square$$

1.9 Miara Hausdorffa

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i niech $p \in [0, +\infty)$. Dla $Y \subset X$ zdefiniujmy

$$h^p(Y) = \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{2^p\Gamma(\frac{p}{2}+1)}(\mathrm{diam}(Y))^p, & Y \neq \emptyset; \\ 0, & Y = \emptyset, \end{cases}$$

gdzie $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ jest *funkcją gamma Eulera*[11].

Funkcję $(0, +\infty) \ni x \to x^p \in (0, +\infty)$ przedłużamy na $[0, +\infty] \to [0, +\infty]$ w ten sposób, aby $0^0 = (+\infty)^0 = 1$, $0^p = 0$, $(+\infty)^p = +\infty$, $p > 0$.

Definicja 1.9.1. Liczbę

$$\mathcal{H}^p_\delta(Y) := \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} h^p(Y_j) : Y_j \subset Y, j \in \mathbb{N}, Y \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Y_j, \mathrm{diam}(Y_j) \le \delta\right\}$$

nazywamy *p-tą δ-aproksymantą miary Hausdorffa*[12] zbioru Y.

Zauważmy, że jeśli $\delta_1 \le \delta_2$, to $\mathcal{H}^p_{\delta_2}(Y) \le \mathcal{H}^p_{\delta_1}(Y)$ (pokryć o średnicach większych jest więcej). Z tego wynika, że istnieje granica

$$\lim_{\delta \searrow 0^+}\mathcal{H}^p_\delta(Y) =: \mathcal{H}^p_e(Y).$$

Obserwacja 1.9.2. *$\mathcal{H}^p_\delta$ i $\mathcal{H}^p_e$ są miarami zewnętrznymi na X.*

[11] Leonhard Euler (1707-1783) – szwajcarski matematyk i fizyk.
[12] Felix Hausdorff (1868-1942) – niemiecki matematyk.

Dowód. Wynika z obserwacji 1.6.5. □

Definicja 1.9.3. Niech $\mathfrak{H}_p$ oznacza σ-algebrę zbiorów mierzalnych *względem p-miary zewnętrznej Hausdorffa $\mathcal{H}^p_e$.* Miarę $\mathcal{H}^p_e|_{\mathfrak{H}_p}$ nazywamy *p-tą miarą Hausdorffa* i oznaczamy $\mathcal{H}^p$.

Przykład 1.9.4. $\mathcal{H}^0$ jest miarą liczącą na X oraz $\mathfrak{H}_0 = \mathcal{P}(X)$.

Przykład 1.9.5. Niech $X = \mathbb{R}^3$, wtedy

1. dla $p = 3$ miara $\mathcal{H}^3$ mierzy objętości zbiorów;
2. dla $p = 2$ miara $\mathcal{H}^2$ mierzy pole powierzchni;
3. dla $p = 1$ miara $\mathcal{H}^1$ mierzy długości łuków;
4. dla $p = 0$ miara $\mathcal{H}^0$ jest miarą liczącą.

Obserwacja 1.9.6. *W $\mathbb{R}^n$ miary $\mathcal{L}^n$ i $\mathcal{H}^n$ zgadzają się na zbiorach borelowskich.*

Twierdzenie 1.9.7.

1. *$\mathcal{H}^p$ jest miarą zupełną.*
2. *$\mathcal{H}^p_e$ jest miarą zewnętrzną metryczną.*
3. *$\mathcal{B}(X) \subset \mathfrak{H}_p$.*
4. *Jeżeli $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem zwartym, to $\mathcal{H}^p(A) < +\infty$.*
5. *$\forall Y \subset X\ \exists G \subset X, G$ – typu $G_\delta, Y \subset G : \mathcal{H}^p_e(Y) = \mathcal{H}^p(G)$.*
6. *$\mathcal{H}^p_e$ jest miarą zewnętrzną regularną.*
7. *Dla dowolnych $Y \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ zachodzi $\mathcal{H}^p_e(a + Y) = \mathcal{H}^p_e(Y)$.*
8. *Dla dowolnych $Y \in \mathfrak{H}_p$, $a \in \mathbb{R}^n$ zachodzi $a + Y \in \mathfrak{H}_p$ oraz $\mathcal{H}^p(a + Y) = \mathcal{H}^p(Y)$.*
9. *Jeżeli $\mathcal{H}^p(A) < +\infty$ i $s > p$, to $\mathcal{H}^s(A) = 0$.*

Dowód. Jest analogiczny do dowodu twierdzenia 1.7.7. □

Liczbę
$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \inf\{p \geq 0 : \mathcal{H}^p(A) = 0\} \in [0, +\infty]$$
nazywamy *wymiarem Haussdorffa* zbioru A. Mamy następującą własność:
$$\mathcal{H}^p(A) = \begin{cases} +\infty, & p < \dim_{\mathcal{H}}(A); \\ c \in (0, \infty), & p = \dim_{\mathcal{H}}(A); \\ 0, & p > \dim_{\mathcal{H}}(A). \end{cases}$$

Twierdzenie 1.9.8. *Niech $A \subset X$, $\mathcal{H}^p_e(A) < +\infty$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

1. *$A \in \mathfrak{H}_p$;*
2. *$A = B \setminus C$, gdzie B jest zbiorem typu G_δ i $\mathcal{H}^p(C) = 0$;*
3. *$A = B \cup C$, gdzie $B \in \mathcal{B}(X)$ i $\mathcal{H}^p(C) = 0$;*

Dowód. Jest analogiczny do dowodu twierdzenia 1.7.8. □

1.10 Twierdzenie o rozszerzaniu miary

Definicja 1.10.1. Funkcję $\alpha : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ określoną na pewnej niepustej rodzinie zbiorów $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ nazywamy *σ-skończoną*, gdy istnieją zbiory $A_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$ takie, że $\alpha(A_j) < +\infty$ oraz $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$.

Twierdzenie 1.10.2 (Twierdzenie o rozszerzaniu miary)**.** *Niech $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ będzie pierścieniem zbiorów oraz niech $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ spełnia następujące warunki:*

1. $\mu_0(\emptyset) = 0$;
2. *jeżeli $A_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$, $A_j \cap A_k = \emptyset$, $j \neq k$ oraz $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$, to*

$$\mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j).$$

Wtedy istnieje miara $\mu : \sigma(\mathcal{A}) \to [0, +\infty]$ będąca rozszerzeniem μ_0 do σ-algebry generowanej przez $\mathcal{A}$, tzn. $\mu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$. Jeżeli dodatkowo μ_0 jest σ-skończona, to miara μ jest wyznaczona jednoznacznie i jest również σ-skończona.

Dowód. **Konstrukcja rozszerzenia.**

Niech $\mathcal{I}$ będzie klasą zbiorów mającą pokrycia przeliczalne zbiorami z pierścienia $\mathcal{A}$. Zdefiniujmy

$$\mu_0^*(A) := \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j) : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right\}, \ A \in \mathcal{I}.$$

Wtedy μ_0^* jest miarą zewnętrzną na $\mathcal{I}$. Wykażemy, że $\mu_0^* = \mu_0$ na $\mathcal{A}$. Niech $A \in \mathcal{A}$, wtedy A jest pokryciem zbioru A i z definicji μ_0^* mamy $\mu_0^*(A) \leq \mu_0(A)$. Aby udowodnić nierówność przeciwną weźmy $A \in \mathcal{A}$ i niech $A_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$, będzie pokryciem przeliczalnym zbioru A, tzn. $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Zdefiniujmy nowe pokrycie $B_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$:

$$B_1 = A \cap A_1, \ B_j = A \cap \left(A_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k\right) \subset A_j, \ j \geq 2, \tag{1.10.1}$$

wtedy zbiory B_j są parami rozłączne oraz $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = A$. Mamy wtedy

$$\mu_0(A) = \mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j)$$

biorąc infimum po wszystkich pokryciach dostajemy $\mu_0(A) \leq \mu_0^*(A)$.

Teraz możemy przeprowadzić konstrukcję Carathéodory'ego dla rodziny $\mathcal{I}$. Zbiór A nazwiemy *mierzalnym*, gdy spełnia warunek

$$\forall B \in \mathcal{I} : \mu_0^*(B) = \mu_0^*(B \cap A) + \mu_0^*(B \setminus A).$$

Zbiory mierzalne tworzą σ-algebrę $\mathfrak{M}_{\mu_0}$.

Wykażemy, że pierścień $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}_{\mu_0}$, wtedy rozszerzenie μ_0^* do $\mathfrak{M}_{\mu_0} \supset \sigma(\mathcal{A})$ będzie szukaną miarą μ.

Niech $A \in \mathcal{A}$, wtedy przypomnijmy, że zbiór A będzie mierzalny, gdy spełniony będzie warunek (1.6.2), tzn.

$$\forall B \in \mathcal{I} : \mu_0^*(B) \geq \mu_0^*(B \cap A) + \mu_0^*(B \setminus A).$$

Dla dowolnego pokrycia $A_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$, zbioru B zdefiniujmy pokrycie $B_j \in \mathcal{A}$ dane wzorami (1.10.1), wtedy rodziny $B_j \cap A$, $B_j \setminus A$ są pokryciami, odpowiednio zbiorów $B \cap A$ i $B \setminus A$. Mamy

$$\begin{aligned}\mu_0^*(B \cap A) + \mu_0^*(B \setminus A) &= \mu_0^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \cap A\right) + \mu_0^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \setminus A\right)\\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j \cap A) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j \setminus A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j)\end{aligned}$$

i biorąc infimum po wszystkich pokryciach A_j dostajemy $\mu_0^*(B \cap A) + \mu_0^*(B \setminus A) \le \mu_0^*(B)$, czyli $A \in \mathfrak{M}_{\mu_0}$.

Jedyność rozszerzenia.

Załóżmy, że μ_0 jest σ-skończona i ν_1 i ν_2 jej rozszerzeniami. Wtedy istnieją zbiory $A_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$ takie, że $\mu_0(A_j) < +\infty$ oraz $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, bez straty ogólności możemy założyć, że A_j jest ciągiem wstępującym. Zdefiniujmy rodziny zbiorów

$$\mathcal{D}_j = \{C \in \sigma(\mathcal{A}) : \nu_1(C \cap A_j) = \nu_2(C \cap A_j)\}.$$

Zauważmy, że

- $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_j$, $X \in \mathcal{D}_j$;
- $\mathcal{D}_j$ jest klasą monotoniczną;

  Dla ciągów wstępujących wynika to z własności miar, dla ciągów zstępujących wykorzystujemy dodatkowo skończoność miar tych zbiorów.
- Jeżeli $C \in \mathcal{D}_j$, to $C' \in \mathcal{D}_j$, bo

$$\nu_1(C' \cap A_j) = \nu_1(A_j) - \nu_1(C \cap A_j) = \nu_2(A_j) - \nu_2(C \cap A_j) = \nu_2(C' \cap A_j).$$

- Jeżeli $E, F \in \mathcal{D}_j$, to $F \subset E$ i wtedy $E \setminus F \in \mathcal{D}_j$, bo miary są skończone na $\mathcal{D}_j$ oraz

$$\begin{aligned} \nu_1((E \setminus F) \cap A_j) &= \nu_1(E \cap A_j) - \nu_1(F \cap A_j) \\ &= \nu_2(E \cap A_j) - \nu_2(F \cap A_j) = \nu_2((E \setminus F) \cap A_j). \end{aligned}$$

- $\mathcal{D}_j$ jest λ-układem.
- Z powyższych punktów i twierdzenia 1.1.27 wynika, że $\sigma(\mathcal{A}) \supset \mathcal{D}_j \supset \lambda(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.

Dla dowolnego $B \in \sigma(\mathcal{A})$ mamy

$$\nu_1(B) = \nu_1\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B \cap A_j\right) = \lim_{j\to\infty} \nu_1(B \cap A_j) = \lim_{j\to\infty} \nu_2(B \cap A_j) = \nu_2\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B \cap A_j\right) = \nu_2(B),$$

czyli $\nu_1 = \nu_2$ na $\sigma(\mathcal{A})$. □

Obserwacja 1.10.3. *1. Warunek (2) w twierdzeniu 1.10.2 jest równoważny następującemu warunkowi:*

$$\forall\, B_j \in \mathcal{A}, B_j \subset B_{j+1}, j \in \mathbb{N} : \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu_0(B_j).$$

2. Jeżeli dodatkowo $\mu_0(X) < +\infty$, to warunek (2) w twierdzeniu 1.10.2 jest równoważny następującemu warunkowi:

$$\forall\, B_j \in \mathcal{A}, B_j \supset B_{j+1}, j \in \mathbb{N} : \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu_0\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu_0(B_j).$$

Dowód. Punkt (1). Niech $B_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$ będzie wstępującym ciągiem zbiorów takim, że $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{A}$. Zdefiniujmy zbiory

$$A_1 = B_1,\ A_k = B_k \setminus B_{k-1},\ k \ge 2.$$

Wtedy zbiory $A_k \in \mathcal{A}$ są parami rozłączne, $B_k = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ oraz $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Mamy

$$\mu_0(B_k) = \mu_0(A_1 \cup \cdots \cup A_k) = \sum_{j=1}^{k} \mu_0(A_k) \to \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_k) = \mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right).$$

Niech teraz $A_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$ będą parami rozłączne i takie, że $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$. Zdefiniujmy zbiory $B_k = A_1 \cup \cdots \cup A_k$. Wtedy B_j jest ciągiem wstępującym i mamy

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_k) \leftarrow \sum_{j=1}^{k} \mu_0(A_k) = \mu_0(A_1 \cup \cdots \cup A_k) = \mu_0(B_k) \to \mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \mu_0\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right).$$

Punkt (2) dowodzi się analogicznie. □

1.11 Dystrybuanta

Definicja 1.11.1. Niech $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ będzie miarą probabilistyczną. *Dystrybuantą* miary μ nazywamy funkcję $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ taką, że

$$F(x) = \mu((-\infty, x]),\ x \in \mathbb{R}.$$

Obserwacja 1.11.2. *Niech F będzie dystrybuantą miary μ. Wtedy:*

1. *F jest funkcją niemalejącą;*
2. *F jest funkcją prawostronnie ciągłą;*
3. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ *i* $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Dowód. Ćwiczenie. □

Przykład 1.11.3. Dystrybuantą miary $\mu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$ jest funkcja

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{2}, & 0 \le x < 1; \\ 1, & 1 \le x. \end{cases}$$

Przykład 1.11.4. Dystrybuantą miary $\mu = \mathcal{L}^1|_{[0,1]}$ jest funkcja

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x, & 0 \le x < 1; \\ 1, & 1 \le x. \end{cases}$$

Twierdzenie 1.11.5. *Niech $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą warunki (1)–(3) z obserwacji 1.11.2. Wtedy istnieje dokładnie jedna miara probabilistyczna μ taka, że F jest jej dystrybuantą.*

Dowód. Zdefiniujmy $\mu_0((a,b]) = F(b) - F(a)$ i $\mu_0(\emptyset) = 0$, przyjmijmy również $F(-\infty) = 0$ i $F(+\infty) = 1$. Niech

$$\mathcal{P} = \{(a,b] : -\infty \le a < b \le +\infty\} \cup \{\emptyset\} \text{ oraz } \mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{j=1}^{n} A_j : n \in \mathbb{N}, A_j \in \mathcal{P} \right\}.$$

Wtedy $\mathcal{A}$ jest pierścieniem zbiorów, a μ_0 przedłuża się jednoznacznie na $\mathcal{A}$, bo każdy zbiór z $\mathcal{A}$ jest skończoną sumą zbiorów rozłącznych z rodziny $\mathcal{P}$.

Ponieważ funkcja F jest prawostronnie ciągła, to funkcja μ_0 jest σ-addytywna na pierścieniu $\mathcal{A}$. Mamy również $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ i z twierdzenia 1.10.2 dostajemy, że μ_0 przedłuża się do jedynej miary borelowskiej μ takiej, że $\mu = \mu_0$ na $\mathcal{A}$ i wtedy

$$\mu((-\infty, x]) = \mu\left(\bigcup_{j=[x]}^{\infty} (-j, x] \right) \leftarrow \mu((-j,x]) = \mu_0((-j,x]) = F(x) - F(-j) \to F(x), j \to \infty.$$

Z tego wynika, że F jest dystrybuantą miary μ. Dodatkowo punkt (3) daje nam $\mu(\mathbb{R}) = 1$, czyli μ jest miarą probabilistyczną. □

1.12 Równość prawie wszędzie

Definicja 1.12.1. Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą. Mówimy, że pewna własność W zachodzi *μ-prawie wszędzie (μ-p.w.)*, gdy istnieje zbiór $Z \in \mathfrak{M}$, $\mu(Z)$=0 taki, że własność W zachodzi na zbiorze $X \setminus Z$.

Obserwacja 1.12.2. *Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą zupełną.*

1. *Jeżeli $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}})$ oraz $f = g$ μ-p.w., to $g \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}})$.*
2. *Jeżeli $f, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}})$ oraz $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ μ-p.w., to $f \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}})$.*

Dowód. Ćwiczenie. □

Obserwacja 1.12.3. *Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą i niech $f \in \mathcal{M}(X, \mathbb{R})$. Wtedy albo f jest funkcją stałą μ-p.w. albo istnieje stała c taka, że*

$$\mu(\{x \in X : f(x) < c\}) > 0 \quad \textit{oraz} \quad \mu(\{x \in X : f(x) > c\}) > 0.$$

Dowód. Ćwiczenie. □

1.13 Zadania

Zadanie 1.13.1. Niech $\mathfrak{M}$ będzie σ-algebrą w $\mathbb{R}$ generowaną przez wszystkie przedziały postaci $[2k,\ 2k+3)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Rozstrzygnąć, czy $[1, +\infty) \in \mathfrak{M}$.

Zadanie 1.13.2. Wyznaczyć σ-algebrę zbiorów generowaną przez rodzinę

$$\mathcal{A} = \{\{n, n+2019\} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Zadanie 1.13.3. Niech $\mathcal{A} = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Wykazać, że jeżeli $A \in \sigma(\mathcal{A})$, to $A \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ albo $\mathbb{Z} \subset A$.

Zadanie 1.13.4. Sprawdzić, czy $[1, 6] \in \sigma(\{[-1, 4], [1, 5]\}) \subset \mathcal{P}([-1, 6])$.

Zadanie 1.13.5. Niech $X = \{0, 1, 2\}$ i niech $f : X \ni x \to x^2 - 2x \in \mathbb{R}$. Wypisać wszystkie elementy σ-algebry $\{A \in P(X) : \exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), A = f^{-1}(B)\}$ i rozstrzygnąć, czy funkcja $X \ni x \to x \in \mathbb{R}$ jest mierzalna względem tej σ-algebry.

Zadanie 1.13.6. Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą. Wykazać, że rodzina

$$\mathfrak{N} = \{A \in \mathfrak{M} : \mu(A) = 0 \text{ lub } \mu(A') = 0\}$$

jest σ-algebrą.

Zadanie 1.13.7. Wykazać, że rodzina zbiorów

$$\mathfrak{M} = \{A \subset \mathbb{R} : \quad \forall x\colon\ (x \in A \iff 1 - x \in A)\}$$

jest σ-algebrą. Zbadać mierzalność funkcji $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sin(\pi x) \in \mathbb{R}$ względem σ-algebry $\mathfrak{M}$.

Zadanie 1.13.8. Czy istnieje σ-algebra składająca się z przeliczalnej ilości zbiorów?

Zadanie 1.13.9. Niech rodzina podzbiorów $\mathcal{F}$ będzie mocy co najwyżej continuum. Wykazać, że $\sigma(\mathcal{F})$ jest mocy co najwyżej continuum.

Zadanie 1.13.10. Rozważmy rodziny podzbiorów $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{(-\infty, x] \times (-\infty, y] \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{B} &= \{[a, b] \times [c, d] \ : \ a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d\}. \end{aligned}$$

Rozstrzygnąć, czy któraś z inkluzji $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B})$, $\sigma(\mathcal{B}) \subset \sigma(\mathcal{A})$ jest prawdziwa. Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie 1.13.11. Niech $f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto (x - 3y + 2z,\ x + 4y - 5z) \in \mathbb{R}^2$ i niech $\mathcal{M}$ będzie σ-algebrą złożoną ze zbiorów postaci $f^{-1}(A)$, gdzie $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Sprawdzić, czy funkcja

$$g : (\mathbb{R}^3, \mathcal{M}) \ni (x, y, z) \mapsto x + y + z \in (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

jest mierzalna.

Zadanie 1.13.12. Rozstrzygnąć, czy funkcja $[0, \infty) \ni x \mapsto \lfloor \sqrt{x} \rfloor \in \mathbb{R}$ jest mierzalna względem σ-algebry generowanej przez przedziały postaci $[3n - 2, 3n + 3)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 1.13.13. Niech $(X, \mathfrak{M})$ będzie przestrzenią mierzalną. Niech $\mu : \mathfrak{M} \to [0, +\infty]$ będzie funkcją, taką że $\mu(\emptyset) = 0$, μ jest skończenie addytywna i przeliczalnie subaddytywna. Pokazać, że μ jest miarą.

Zadanie 1.13.14. Niech $(X, \mathfrak{M})$ będzie przestrzenią mierzalną. Niech $\mu : \mathfrak{M} \to [0, +\infty]$ będzie funkcją skończoną, taką że $\mu(\emptyset) = 0$ i μ jest skończenie addytywna. Pokazać, że μ jest miarą wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zstępującego ciągu zbiorów $A_n \searrow \emptyset$ zachodzi $\mu(A_n) \searrow 0$, $n \to \infty$.

Zadanie 1.13.15. Niech μ, ν będą miarami na przestrzeni mierzalnej $(X, \mathfrak{M})$ takimi, że $\mu(X) = \nu(X) < +\infty$. Niech $\mathcal{A}$ będzie π-układem generującym $\mathfrak{M}$ (tzn. $\sigma(\mathcal{A}) = \mathfrak{M}$). Wykazać, że jeżeli dla dowolnego $A \in \mathcal{A}$ zachodzi $\mu(A) = \nu(A)$, to $\mu = \nu$. Czy założenie dotyczące skończoności obu miar jest konieczne?

Zadanie 1.13.16. Czy istnieje miara μ na zbiorze wszystkich podzbiorów liczb naturalnych taka, że $\mu(2\mathbb{N}) = \mu(2\mathbb{N} + 1) = 1$?

Zadanie 1.13.17. Czy istnieje probabilistyczna miara borelowska μ na $\mathbb{R}$ taka, że

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ \ \ \mu((n,\infty)) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} ?$$

Zadanie 1.13.18. Czy istnieje niezerowa borelowska miara μ na $\mathbb{R}^2$ spełniająca warunek

$$\forall\, k,l \in \mathbb{Z} \ \ \mu([k,\infty)\times[l,\infty)) = \mu([k+1,\infty)\times[l+1,\infty)),$$

która jest

1. skończona?
2. σ-skończona?

Zadanie 1.13.19. Czy istnieje niezerowa borelowska miara μ na $\mathbb{R}$ spełniająca warunek

$$\forall\, k \in \mathbb{Z} \ \ \mu([k,k+1)) = (|k|+1)^{-1},$$

która jest

1. skończona?
2. σ-skończona?

Zadanie 1.13.20. Niech $\mathfrak{M}$ będzie σ-algebrą podzbiorów przedziału $(1,6]$ generowaną przez przedziały $(2,6]$ i $(3,6]$. Sprawdzić, czy funkcja

$$f : (1,6] \ni x \mapsto \left[\frac{6}{x}\right] \in \mathbb{R},$$

gdzie $[a]$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej a, jest mierzalna względem $\mathfrak{M}$.

Zadanie 1.13.21. Niech P będzie zbiorem zwartym w $\mathbb{R}^n$ o mierze $\mathcal{L}^n(P) = 10$. Zdefiniujmy stożek o podstawie P i wysokości $h > 0$ jako

$$S = \{(t, tx) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in (0,h), x \in P\}.$$

Uzasadnić, że stożek S jest mierzalny w sensie Lebesgue'a i obliczyć jego miarę $\mathcal{L}^{n+1}(S)$.

Zadanie 1.13.22. Pokazać, że funkcja $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & 0,1 \notin A, \\ \frac{1}{2}, & 0 \in A \text{ i } 1 \notin A, \\ 1, & 1 \in A \end{cases}$$

jest miarą zewnętrzną. Z warunku Carathéodory'ego wyznaczyć σ-algebrę zbiorów μ^* mierzalnych.

Zadanie 1.13.23. Sprawdzić, czy funkcja

$$\varphi(A) = \begin{cases} \sup\{|x| : (x,y) \in A\}, & A \neq \emptyset, \\ 0, & A = \emptyset \end{cases}$$

jest miarą zewnętrzną na $\mathbb{R}^2$. Jeśli tak, sprawdzić, czy zbiory $\{(2013,0),(2014,1)\}$ oraz $\{(3,4)\}$ są φ-mierzalne.

Zadanie 1.13.24. Definiujemy funkcję $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}\cup\{0\}) \to [0,+\infty]$ w ten sposób, że $\varphi(A)$ to liczba elementów zbioru $\{k \in \mathbb{N}\cup\{0\} : A \cap \{2k, 2k+1\} \neq \emptyset\}$. Wykazać, że φ jest miarą zewnętrzną oraz sprawdzić, czy zbiory

$$A = \{0,1,2,\cdots,2019,2020\}, \quad B = \{2n, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$$

spełniają warunek Carathéodory'ego względem φ.

Zadanie 1.13.25. Dla zbiorów $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ definiujemy funkcję

$$\varphi(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } A = \emptyset, \\ 1, & \text{gdy } A \text{ jest zbiorem jednoelementowym}, \\ 2, & \text{gdy } A \text{ ma co najmniej dwa elementy.} \end{cases}$$

Pokazać, że φ jest miarą zewnętrzną. Wyznaczyć σ-algebrę zbiorów spełniających warunek Carathéodory'ego względem φ.

Zadanie 1.13.26. Załóżmy, że μ jest miarą zewnętrzną na zbiorze X, i zdefiniujmy $\nu : 2^X \to [0, \infty]$ wzorem

$$\nu(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \mu(A) = 0, \\ 1, & \text{gdy } \mu(A) \neq 0. \end{cases}$$

Sprawdzić, że ν jest miarą zewnętrzną i wyznaczyć σ-algebrę zbiorów spełniających warunek Carathéodory'ego względem ν.

Zadanie 1.13.27. Pokazać, że funkcja $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \to [0, +\infty]$ określona wzorem

$$\varphi(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } A = \emptyset, \\ \frac{\sup\{|n|: n\in A\}}{\sup\{|n|: n\in A\}+1}, & \text{gdy zbiór } A \text{ jest skończony}, \\ 1, & \text{gdy zbiór } A \text{ jest nieskończony} \end{cases}$$

jest miarą zewnętrzną i wyznaczyć σ-algebrę zbiorów spełniających warunek Carathéodory'ego względem ν.

Zadanie 1.13.28. Niech μ będzie miarą borelowską na $\mathbb{R}^2$ taką, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Q}$ spełniony jest warunek

$$\mu((-\infty, a] \times (-\infty, b]) = e^{a+b}$$

Obliczyć $\mu((0, 1]^2)$ oraz $\mu([0, 1]^2)$.

Zadanie 1.13.29. Załóżmy, że μ jest taką miarą na σ-algebrze borelowskich podzbiorów $\mathbb{R}^2$, że

$$\mu((-\infty, x] \times (-\infty, y]) = \begin{cases} (x+y)^3, & \text{gdy } x + y > 0, \\ 0, & \text{gdy } x + y \leq 0, \end{cases}$$

dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Obliczyć $\mu([1, 2] \times [3, 4])$.

Zadanie 1.13.30. Niech μ będzie taką miarą na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, że

$$\mu((a, b)) = 3^b - 3^a \quad \text{dla } a, b \in \mathbb{Q},\ a < b.$$

Obliczyć $\mu((\sqrt{2}, +\infty))$, $\mu([\sqrt{2}, \sqrt{3}])$ oraz $\mu((-\infty, -\sqrt{2}])$.

Zadanie 1.13.31. Dla dowolnego $A \subset \mathbb{N}$ określmy

$$\phi(A) = \begin{cases} \frac{\#A}{1+\#A} & \text{gdy } A \text{ jest zbiorem skończonym}, \\ 1 & \text{gdy } A \text{ jest zbiorem nieskończonym.} \end{cases}$$

Pokazać, że ϕ jest miarą zewnętrzną i wyznaczyć rodzinę wszystkich zbiorów mierzalnych w sensie Carathédory'ego względem tej miary zewnętrznej.

Zadanie 1.13.32. Niech $X \neq \emptyset$. Określmy

$$\phi : \mathcal{P}(X) \ni A \mapsto \begin{cases} 0, & \text{gdy } A = \emptyset, \\ 1, & \text{gdy } A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Czy funkcja ϕ jest miarą zewnętrzną na X? Jeśli tak, to wyznaczyć zbiory mierzalne w sensie Caratheodory'ego względem ϕ.

Zadanie 1.13.33. Pokazać, że funkcja:

$$\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \ni A \mapsto \sup\{|x|, x \in A\} \in [0, +\infty]$$

jest miarą zewnętrzną (przyjmujemy $\sup\emptyset = 0$). Z warunku Carathéodory'ego wyznaczyć rodzinę zbiorów mierzalnych względem μ^*.

Zadanie 1.13.34. Niech $(X, \mathfrak{M})$ będzie przestrzenią mierzalną a μ, ν będą miarami na $\mathfrak{M}$. Zdefiniujmy dla $A \in \mathfrak{M}$

$$\begin{aligned}\sup(\mu,\nu)(A) &:= \sup\{\mu_1(B) + \mu_2(A \setminus B) : \ B \in \mathfrak{M}, B \subset A\},\\ \inf(\mu,\nu)(A) &:= \inf\{\mu_1(B) + \mu_2(A \setminus B) : \ B \in \mathfrak{M}, B \subset A\}.\end{aligned}$$

Wykazać, że μ i ν są miarami.

Zadanie 1.13.35. Niech μ będzie miarą skończoną na $(X, \mathfrak{M})$. Niech zbiór $C \in \mathfrak{M}$ będzie taki, że $\mu(X) = \mu(C)$. Czy jest prawdą, że $\mu(A) = \mu(A \cap C)$ dla dowolnego $A \in \mathfrak{M}$?

Zadanie 1.13.36. Niech $(X, \mathfrak{M})$ będzie przestrzenią mierzalną, a $f_n : X \to \mathbb{R}$ ciągiem funkcji mierzalnych. Wykazać, że zbiorem mierzalnym jest zbiór tych $x \in X$ dla których ciąg $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ jest rosnący.

Zadanie 1.13.37. Niech $\mathfrak{M}$ będzie σ-algebrą podzbiorów $[0, 1]$ taką, że

$$\forall x \in [0,1] \, : \{x\} \in \mathfrak{M}.$$

Niech μ będzie taką miarą skończoną na powyższej σ-algebrze, że

$$\forall x, y \in [0,1] \, : \, \mu(\{x\}) = \mu(\{y\})$$

Pokazać, że $\mu(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$.

Zadanie 1.13.38. Rozważmy nieprzeliczalny zbiór X z σ-algebrą jego podzbiorów, które są co najwyżej przeliczalne lub mają co najwyżej przeliczalne dopełnienie i załóżmy, że $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną. Udowodnić, że istnieje podzbiór Y zbioru X, taki że $X \setminus Y$ jest zbiorem przeliczalnym i $f|Y$ jest funkcją stałą.

Zadanie 1.13.39. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest klasy $\mathcal{C}^1$. Wykazać, że jeżeli $A \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem miary Lebesgue'a zero, to $f(A)$ jest też zbiorem miary Lebesgue'a zero.

Zadanie 1.13.40. Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Wykazać, że dla dowolnych $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{M}$ takich, że $\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) > n - 1$, zachodzi $\mu\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) > 0$.

Zadanie 1.13.41. $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ niech będzie przestrzenią mierzalną z miarą skończoną. Wykazać, że dla dowolnych zbiorów $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{M}$ zachodzi

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le j_1 < \ldots j_k \le n} \mu(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}).$$

Zadanie 1.13.42. Niech $A_1, \ldots, A_n \subset [0, 1]$ będą zbiorami borelowskimi takimi, że każdy x należy do przynajmniej k zbiorów. Pokazać, że istnieje takie $m \in \{1, \ldots, n\}$ takie, że $\mathcal{L}^1(A_m) \ge \frac{k}{n}$.

Zadanie 1.13.43. Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą. Wykazać, że dla dowolnych zbiorów $A_j \in \mathfrak{M}$, $j \in \mathbb{N}$ takich, że $\mu(A_j \cap A_k) = 0$, $j \neq k$, zachodzi

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Rozdział 2

Teoria całki

2.1 Całka Lebesgue'a

Definicja 2.1.1. Niech $(X, \mathfrak{M})$ będzie przestrzenią mierzalną. Oznaczmy przez $\mathcal{M}^+(X) = \mathcal{M}^+(X, [0, +\infty])$ zbiór nieujemnych funkcji mierzalnych. Zdefiniujmy zbiór nieujemnych *funkcji prostych mierzalnych* (ew. *funkcji schodkowych*)

$$\mathcal{M}_0^+(X) := \left\{ f \in \mathcal{M}^+(X) : \# f(X) < +\infty \right\}.$$

Jeżeli $f \in \mathcal{M}_0^+(X)$, to istnieją $a_1, \ldots, a_N \in [0, +\infty]$ takie, że $f(X) = \{a_1, \ldots, a_N\}$. Zdefiniujmy zbiory rozłączne $A_j = \{x \in X : f(x) = a_j\}$, $j = 1, \ldots, N$ i zauważmy, że

$$f = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{A_j}. \tag{2.1.1}$$

Równość (2.1.1) nazywamy *rozkładem kanonicznym* funkcji prostej.

Obserwacja 2.1.2. *Niech $(X, \mathfrak{M})$ będzie przestrzenią mierzalną. Niech $f = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{A_j}$, gdzie $A_j = \{x \in X : f(x) = a_j\}$, $j = 1, \ldots, N$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

1. *$f \in \mathcal{M}_0^+(X)$;*
2. *$A_j \in \mathfrak{M}$, $j = 1, \ldots, N$.*

Dowód. Ćwiczenie. □

Przypomnijmy teraz definicję funkcji „część całkowita" $[\,\cdot\,] : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$

$$[x] = \sup\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}, \ [-\infty] = -\infty, \ [+\infty] = +\infty.$$

Dla dowolnej funkcji $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ zdefiniujmy ciąg funkcji s_n:

$$s_n(x) = \min\left(n, 2^{-n}\left[2^n f_+(x)\right]\right) - \min\left(n, 2^{-n}\left[2^n f_-(x)\right]\right), \ x \in X, n \in \mathbb{N}.$$

Twierdzenie 2.1.3. *Niech $(X, \mathfrak{M})$ będzie przestrzenią mierzalną i niech $f \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}})$. Wtedy*

1. *s_n jest ciągiem funkcji prostych mierzalnych;*
2. *$s_n \to f$ punktowo, $n \to \infty$;*
3. *jeżeli $f \geq 0$, to $s_n \geq 0$;*
4. *jeżeli $f \geq 0$, to s_n jest ciągiem rosnącym;*
5. *jeżeli funkcja f jest ograniczona, to $s_n \rightrightarrows f$ jednostajnie, $n \to \infty$.*

Dowód. Punkt (1). Wynika z własności funkcji mierzalnych.

Punkt (2). Niech $f = f_+ - f_-$ będzie rozkładem funkcji f. Wtedy $f_+, f_- \geq 0$, a więc wystarczy pokazać zbieżność punktową dla funkcji nieujemnych. Zauważmy, że

$$0 \leq 2^n f(x) - [2^n f(x)] < 1, \text{ gdy } f(x) < +\infty,$$

a wtedy

$$0 \leq f(x) - 2^{-n} [2^n f(x)] < 2^{-n}, \text{ gdy } f(x) < +\infty. \tag{2.1.2}$$

Zauważmy, że gdy $f(x) = +\infty$, to $s_n(x) = n \to +\infty$.

Punkt (3) jest oczywisty.

Punkt (4). Zauważmy, że $[2^{n+1} f(x)] \geq 2[2^n f(x)]$, z czego wynika, że

$$2^{-n-1}[2^{n+1} f(x)] \geq 2^{-n}[2^n f(x)]$$

i wtedy $s_{n+1} \geq s_n$.

Punkt (5) wynika z nierówności (2.1.2). □

Definicja 2.1.4. Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą i $f \in \mathcal{M}_0^+(X)$ będzie funkcją prostą mierzalną o rozkładzie kanonicznym $f = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{A_j}$. *Całką z funkcji f względem miary μ* nazywamy liczbę

$$\int_X f \, d\mu := \sum_{j=1}^N a_j \mu(A_j).$$

Uwaga: przyjmujemy zawsze, że $0 \cdot (+\infty) = 0$.

Obserwacja 2.1.5. *Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą i $f \in \mathcal{M}_0^+(X)$, $c \geq 0$ i $B \in \mathfrak{M}$. Wtedy*

$$\int_X (f + c\chi_B) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + c\mu(B).$$

W szczególności z tego wynika, że definicja całki z funkcji prostej podana w definicji 2.1.4 nie zależy od jej reprezentacji, tzn.

$$\textit{jeżeli } f = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{A_j} = \sum_{j=1}^M b_j \chi_{B_j}, \textit{ to } \sum_{j=1}^N a_j \mu(A_j) = \sum_{j=1}^M b_j \mu(B_j).$$

Dowód. Niech $f = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{A_j}$ będzie rozkładem kanonicznym funkcji prostej mierzalnej f. Wtedy

$$\begin{aligned}
\int_X (f + c\chi_B) \, d\mu &= \sum_{j=1}^N (a_j + c)\mu(A_j \cap B) + \sum_{j=1}^N a_j \mu(A_j \cap B') \\
&= \sum_{j=1}^N a_j(\mu(A_j \cap B') + \mu(A_j \cap B')) + \sum_{j=1}^N c\mu(A_j \cap B) \\
&= \sum_{j=1}^N a_j \mu(A_j) + c\mu(B) = \int_X f \, d\mu + c\mu(B).
\end{aligned}$$

Pozostałą część można otrzymać stosując zasadę indukcji matematycznej. □

Obserwacja 2.1.6 (Własności całki z funkcji prostych)**.** *Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą i $f, g \in \mathcal{M}_0^+(X)$, $a \geq 0$. Wtedy*

1. $\int_X af \, d\mu = a \int_X f \, d\mu$;
2. $\int_X (f + g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$;
3. *jeżeli* $f \leq g$, *to* $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$;
4. *jeżeli* $\int_X f \, d\mu = 0$, *to* $\mu(\{x \in X : f(x) > 0\}) = 0$, *tzn.* $f = 0$ μ-*p.w.*;

5. *jeżeli* $\int_X f\,d\mu < +\infty$, *to* $\mu(\{x \in X : f(x) = +\infty\}) = 0$, *tzn. funkcja* f *jest skończona* μ*-p.w.*

Dowód. Punkt (1). Dla $a = 0$ równość jest oczywista. Przyjmijmy, że $a > 0$ i zauważmy, że jeżeli $f = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{A_j}$ będzie rozkładem kanonicznym funkcji prostej mierzalnej f, to $af = \sum_{j=1}^{N} aa_j \chi_{A_j}$ i wtedy

$$\int_X af\,d\mu = \sum_{j=1}^{N} aa_j\mu(A_j) = a\sum_{j=1}^{N} a_j\mu(A_j) = a\int_X f\,d\mu.$$

Punkt (2). Jeżeli $f = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{A_j}$ jest rozkładem kanonicznym funkcji prostej mierzalnej f i jeżeli $g = \sum_{i=1}^{M} b_i \chi_{B_i}$ jest rozkładem kanonicznym funkcji prostej mierzalnej g, to ich suma jest też funkcją prostą o rozkładzie (niekoniecznie kanonicznym)

$$f + g = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}(a_j + b_i)\chi_{A_j \cap B_i}.$$

Zauważmy, że

$$\bigcup_{j=1}^{N}(A_j \cap B_i) = B_i \text{ oraz } \bigcup_{i=1}^{M}(A_j \cap B_i) = A_j,$$

oraz zbiory w każdej z sum powyżej są parami rozłączne i wtedy

$$\sum_{j=1}^{N}\mu(A_j \cap B_i) = \mu(B_i) \text{ oraz } \sum_{i=1}^{M}\mu(A_j \cap B_i) = \mu(A_j).$$

Z obserwacji 2.1.5 dostajemy

$$\begin{aligned}\int_X (f+g)\,d\mu &= \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}(a_j + b_i)\mu(A_j \cap B_i)\\ &= \sum_{j=1}^{N} a_j \sum_{i=1}^{M}\mu(A_j \cap B_i) + \sum_{i=1}^{M} b_i \sum_{j=1}^{N}\mu(A_j \cap B_i)\\ &= \sum_{j=1}^{N} a_j\mu(A_j) + \sum_{i=1}^{M} b_i\mu(B_i) = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.\end{aligned}$$

Punkt (3). Jeżeli funkcja $f \in \mathcal{M}_0^+(X)$, to całka $\int_X f\,d\mu \geq 0$. Zauważmy, że $g = f + (g - f)$ oraz $g - f \in \mathcal{M}_0^+(X)$. Wtedy

$$\int_X g\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X (g-f)\,d\mu \geq \int_X f\,d\mu.$$

Punkt (4). Załóżmy, że $f = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{A_j}$ jest rozkładem kanonicznym funkcji prostej mierzalnej f. Gdyby $\mu(\{x \in X : f(x) > 0\}) > 0$, to istniałaby liczba $a_j > 0$ taka, że $\mu(A_j) > 0$, a wtedy

$$\int_X f\,d\mu = \cdots + a_j\mu(A_j) > 0,$$

co prowadzi do sprzeczności.

Punkt (5). Gdyby $\mu(\{x \in X : f(x) = +\infty\}) = \alpha > 0$, to wtedy całka

$$\int_X f\,d\mu = \cdots + (+\infty)\mu(\{x \in X : f(x) = +\infty\}) \geq \alpha(+\infty) = +\infty$$

co prowadzi do sprzeczności. □

Twierdzenie 2.1.7. *Niech* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ *będzie przestrzenią mierzalną z miarą.*

1. *Jeżeli* $f_n, f \in \mathcal{M}_0^+(X)$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n \nearrow f$, $n \to \infty$, *to*

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

2. Jeżeli $f_n, g_n \in \mathcal{M}_0^+(X)$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n \nearrow f$, $g_n \nearrow f$, $n \to \infty$, to

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu.$$

Dowód. Punkt (1). Z obserwacji 2.1.6 wynika, że ciąg $\int_X f_n \, d\mu$ jest rosnący, więc istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$. Wykażemy, że jest ona równa $\int_X f \, d\mu$. Niech $f = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{A_j}$ będzie rozkładem kanonicznym. Ustalmy dowolne $\epsilon \in (0,1)$.

Niech $A_{j,n} = \{x \in A_j : f_n(x) \geq \epsilon a_j\}$. Ponieważ $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, to $\bigcup_{n=1}^\infty A_{j,n} = A_j$. Zauważmy, że zbiory $A_{j,n}$ są mierzalne, $A_{j,n} \subset A_{j,n+1}$, bo ciąg f_n jest rosnący, a z tego otrzymujemy $\lim_{n\to\infty} \mu(A_{j,n}) = \mu(A_j)$. Niech $g_n = \sum_{j=1}^N \epsilon a_j \chi_{A_{j,n}}$. Ponieważ $g_n \leq f_n \leq f$, to

$$\epsilon \sum_{j=1}^N a_j \mu(A_{j,n}) = \int_X g_n \, d\mu \leq \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu.$$

Przechodząc z $n \to \infty$ dostajemy

$$\epsilon \sum_{j=1}^N a_j \mu(A_j) = \epsilon \int_X f \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu,$$

a przy $\epsilon \to 1$ dostajemy tezę.

Punkt (2). Niech $f_n, g_n \in \mathcal{M}_0^+(X)$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n \nearrow f$, $g_n \nearrow f$, $n \to \infty$, $f \in \mathcal{M}^+(X)$. Ustalmy $m \in \mathbb{N}$ i zdefiniujmy $h_n = \min(f_n, g_m)$. Wtedy $h_n \nearrow g_m$ i z punktu (1) dostajemy $\lim_{n\to\infty} \int_X h_n \, d\mu = \int_X g_m \, d\mu$. Ponieważ $h_n \leq f_n$, to $\int_X h_n \, d\mu \leq \int_X f_n \, d\mu$ i mamy

$$\int_X g_m \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X h_n \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

W końcu $\lim_{m\to\infty} \int_X g_m \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$. Odwracając rolami funkcje g_n i f_n otrzymujemy równość. □

Definicja 2.1.8. Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą i $f \in \mathcal{M}^+(X)$. Weźmy rosnący ciąg funkcji prostych mierzalnych $f_n \in \mathcal{M}_0^+(X)$ zbieżnych punktowo do f i zdefiniujmy *całkę z funkcji* f jako

$$\int_X f \, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Twierdzenie 2.1.7 gwarantuje, że definicja 2.1.8 jest poprawna (tzn. definicja całki nie zależy od wyboru ciągu aproksymacyjnego) i pokrywa się z definicją całki dla funkcji prostych (definicja 2.1.4).

Ćwiczenie 2.1.9. Całka z funkcji $f \in \mathcal{M}^+(X)$ może być zdefiniowana również w następujący (równoważny) sposób

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X g \, d\mu : g \in \mathcal{M}_0^+(X), g \leq f \right\}.$$

Obserwacja 2.1.10 (Własności całki z funkcji nieujemnych)**.** *Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą i $f, g \in \mathcal{M}^+(X)$, $a \geq 0$. Wtedy*

1. *$\int_X af \, d\mu = a \int_X f \, d\mu$;*
2. *$\int_X (f+g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$;*
3. *jeżeli $f \leq g$, to $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$;*
4. *jeżeli $\int_X f \, d\mu = 0$, to $\mu(\{x \in X : f(x) > 0\}) = 0$, tzn. $f = 0$ μ-p.w.;*
5. *jeżeli $\int_X f \, d\mu < +\infty$, to $\mu(\{x \in X : f(x) = +\infty\}) = 0$, tzn. funkcja f jest skończona μ-p.w.*

Dowód. Punkt (1). Jeżeli $f_n \in \mathcal{M}_0^+(X)$, $f_n \nearrow f$, $n \to \infty$, to $af_n \in \mathcal{M}_0^+(X)$, $af_n \nearrow af$, $n \to \infty$ i wtedy dostajemy

$$\int_X af \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X af_n \, d\mu = a \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = a \int_X f \, d\mu.$$

Punkt (2). Jeżeli $f_n, g_n \in \mathcal{M}_0^+(X)$, $f_n \nearrow f$,$g_n \nearrow g$, $n \to \infty$, to $f_n + g_n \in \mathcal{M}_0^+(X)$ oraz $f_n + g_n \nearrow f + g$, $n \to \infty$ i wtedy otrzymujemy

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X (f_n+g_n)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X g_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.$$

Punkt (3). Jeżeli $f \geq 0$, to istnieje ciąg rosnący funkcji dodatnich prostych i mierzalnych $f_n \nearrow f$, $n \to \infty$. Skoro $\int_X f_n\,d\mu \geq 0$, to $\int_X f\,d\mu \geq 0$. Mamy również $g = f + (g-f)$ oraz $g - f \in \mathcal{M}^+(X)$ i wtedy

$$\int_X g\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X (g-f)\,d\mu \geq \int_X f\,d\mu.$$

Punkt (4). Niech $B = \{x \in X : f(x) > 0\}$ i $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, gdzie $B_j = \left\{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{j}\right\}$. Ponieważ $f \geq \frac{1}{j}\chi_{B_j}$, to

$$0 \leq \mu(B_j) = j \int_X \frac{1}{j}\chi_{B_j}\,d\mu \leq j \int_X f\,d\mu = 0,$$

i wtedy dostajemy $\mu(B) = \lim_{j\to\infty} \mu(B_j) = 0$.

Punkt (5). Niech $B = \{x \in X : f(x) = +\infty\}$. Ponieważ $f \geq n\chi_B$, to

$$0 \leq \mu(B) = \frac{1}{n} \int_X n\chi_{B_j}\,d\mu \leq \frac{1}{n} \int_X f\,d\mu \to 0,\ n \to \infty$$

i wtedy otrzymujemy $\mu(B) = 0$. □

Definicja 2.1.11. Niech $f \in \mathcal{M}^+(X)$, $B \in \mathfrak{M}$, to *całką z funkcji f na zbiorze B* nazywamy liczbę

$$\int_B f\,d\mu = \begin{cases} \int_B f|_B\,d(\mu|_B), & B \neq \emptyset; \\ 0, & B = \emptyset. \end{cases}$$

Obserwacja 2.1.12. *Jeżeli $f \in \mathcal{M}^+(X)$, $B \in \mathfrak{M}$, to*

$$\int_B f\,d\mu = \int_X f\chi_B\,d\mu.$$

Dowód. Równość jest prawdziwa dla $B = \emptyset$. Załóżmy teraz, że $B \neq \emptyset$ i $f \in \mathcal{M}_0^+(X)$ ma rozkład kanoniczny $f = \sum_{j=1}^N a_j\chi_{A_j}$, wtedy

$$f|_B = \sum_{j=1}^N a_j\chi_{A_j\cap B,B} \text{ - funkcja określona tylko na zbiorze } B,$$
$$f\chi_{B,X} = \sum_{j=1}^N a_j\chi_{A_j\cap B,X} \text{ - funkcja określona na całym zbiorze } X.$$

Funkcje $f|_B$ i $f\chi_{B,X}$ to funkcje proste i mamy wtedy

$$\int_B \chi_{A_j\cap B,B}\,d\mu|_B = \mu(B\cap A_j) = \int_B \chi_{A_j\cap B,X}\,d\mu.$$

Mnożąc przez stałe i sumując, dostajemy tezę dla funkcji prostych mierzalnych. Dla dowolnego $f \in \mathcal{M}^+(X)$ istnieje ciąg rosnący funkcji prostych $f_n \nearrow f$, wtedy $f_n|_B \nearrow f|_B$, $f_n\chi_B \nearrow f\chi_B$ i otrzymujemy

$$\int_B f\,d\mu = \int_B f|_B\,d\mu|_B = \lim_{n\to\infty} \int_B f_n|_B\,d\mu|_B = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\chi_B\,d\mu = \int_X f\chi_B\,d\mu.$$ □

Twierdzenie 2.1.13. *Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą i $f \in \mathcal{M}^+(X)$.*

1. *Całka jest funkcją monotoniczną zbioru, tzn. dla dowolnych $B_1, B_2 \in \mathfrak{M}$, $B_1 \subset B_2$ zachodzi $\int_{B_1} f\,d\mu \leq \int_{B_2} f\,d\mu$.*
2. *Całka jest funkcją addytywną zbioru, tzn. dla dowolnych $B_1, B_2 \in \mathfrak{M}$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $B_1 \cup B_2 = X$ zachodzi $\int_{B_1} f\,d\mu + \int_{B_2} f\,d\mu = \int_X f\,d\mu$.*

Dowód. Punkt (1). Wystarczy zauważyć, że $f\chi_{B_1} \leq f\chi_{B_2}$ i wtedy teza wynika z twierdzenia 2.1.10 i obserwacji 2.1.12.

Punkt (2). Wystarczy zauważyć, że $f = f\chi_{B_1} + f\chi_{B_2}$ i wtedy teza wynika z twierdzenia 2.1.10 i obserwacji 2.1.12. □

Twierdzenie 2.1.14. *Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą.*

1. *Jeżeli $f \in \mathcal{M}^+(X)$ i $B \in \mathfrak{M}$, $\mu(B) = 0$, to $\int_X f\,d\mu = \int_{X\setminus B} f\,d\mu$.*
2. *Jeżeli $f, g \in \mathcal{M}^+(X)$ i $f = g$ μ-p.w., to $\int_X f\,d\mu = \int_X g\,d\mu$.*

Dowód. Punkt (1). Na początek zauważmy, że jeżeli $B \in \mathfrak{M}$, $\mu(B) = 0$, to $\mu|_B \equiv 0$ i z definicji 2.1.11 dostajemy $\int_B f\,d\mu = \int_B f|_B\,d\mu|_B = 0$. Z twierdzenia 2.1.13 otrzymujemy

$$\int_X f\,d\mu = \int_{X\setminus B} f\,d\mu + \int_B f\,d\mu = \int_{X\setminus B} f\,d\mu.$$

Punkt (2). Jeżeli $f = g$ μ-p.w., to zbiór $B = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ jest miary zero i wtedy z punktu (1) dostajemy

$$\int_X f\,d\mu = \int_{X\setminus B} f\,d\mu = \int_{X\setminus B} g\,d\mu = \int_X g\,d\mu.$$

□

Definicja 2.1.15. Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą. Mówimy, że funkcja $f \in \mathcal{M}(X)$ jest *całkowalna*, gdy

$$\int_X |f|\,d\mu < +\infty, \quad \text{lub równoważnie} \quad \int_X f_+\,d\mu < +\infty, \quad \int_X f_-\,d\mu < +\infty.$$

Zbiór funkcji całkowalnych względem miary μ oznaczamy $L^1(X, \mu)$ (lub krócej $L^1(X)$). Dla funkcji $f \in L^1(X, \mu)$ definiujemy całkę

$$\int_X f\,d\mu := \int_X f_+\,d\mu - \int_X f_-\,d\mu.$$

Obserwacja 2.1.16 (Własności całki)**.** *Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą i $f, g \in L^1(X, \mu)$, $a \in \mathbb{R}$. Wtedy*

1. *$|f| < +\infty$ μ-p.w.;*
2. *$af \in L^1(X, \mu)$ oraz $\int_X af\,d\mu = a\int_X f\,d\mu$;*
3. *$f + g \in L^1(X, \mu)$ oraz $\int_X (f + g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$;*
4. *jeżeli $f \leq g$, to $\int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu$;*
5. *jeżeli $\int_X |f|\,d\mu = 0$, to $f = 0$ μ-p.w.;*
6. *$\left|\int_X f\,d\mu\right| \leq \int_X |f|\,d\mu$.*

Dowód. Punkt (1). Skoro $\int_X f_+\,d\mu < +\infty$, $\int_X f_-\,d\mu < +\infty$, to z obserwacji 2.1.10 dostajemy $\mu(\{x \in X : f_+(x) = +\infty\}) = 0$ i $\mu(\{x \in X : f_-(x) = +\infty\}) = 0$, z czego wynika, że $\mu(\{x \in X : |f(x)| = +\infty\}) = 0$, czyli $|f| < +\infty$ μ-p.w.

Punkt (2). Dla $a = 0$ równość jest oczywista. Dla $a > 0$ zachodzi $(af)_+ = af_+$, $(af)_- = af_-$ i wtedy

$$\int_X af\,d\mu = \int_X af_+\,d\mu - \int_X af_-\,d\mu = a\left(\int_X f_+\,d\mu - \int_X f_-\,d\mu\right) = a\int_X f\,d\mu.$$

Dla $a < 0$ dowód jest analogiczny, zauważmy tylko, że w tej sytuacji $(af)_+ = -af_-$, $(af)_- = -af_+$.

Punkt (3). Z nierówności trójkąta dostajemy $|f + g| \leq |f| + |g|$ i wtedy

$$\int_X |f + g|\,d\mu \leq \int_X |f|\,d\mu + \int_X |g|\,d\mu < +\infty,$$

czyli $f + g \in L^1(X, \mu)$. Niech $B = \{x \in X : |f(x)| = +\infty \text{ lub } |g(x)| = +\infty\}$. Wtedy z punktu (1) wynika, że $\mu(B) = 0$, bo f i g są całkowalne. Na zbiorze $X \setminus B$ zachodzi

$$(f + g)_+ - (f + g)_- = f + g = (f_+ - f_-) + (g_+ - g_-),$$

a wtedy
$$(f+g)_+ + f_- + g_- = (f+g)_- + f_+ + g_+.$$
Całkując powyższą równość i porządkując otrzymane całki dostajemy tezę.

Punkt (4). Jeżeli $f \leq g$, to $f_+ \leq g_+$ oraz $g_- \leq f_-$ a wtedy
$$\int_X f\,d\mu = \int_X f_+\,d\mu - \int_X f_-\,d\mu \leq \int_X g_+\,d\mu - \int_X g_-\,d\mu = \int_X g\,d\mu.$$
Punkt (5). Jeżeli $\int_X |f|\,d\mu = \int_X f_+\,d\mu + \int_X f_-\,d\mu = 0$, to $\int_X f_+\,d\mu = \int_X f_-\,d\mu = 0$. Z obserwacji 2.1.10 dostajemy $f_+ = 0$ i $f_- = 0$ μ-p.w., i dlatego $f = f_+ - f_- = 0$ μ-p.w.

Punkt (6). Zauważmy, że $-|f| \leq f \leq |f|$ i korzystając z punktu (4) dostajemy tezę. □

Przykład 2.1.17. Niech $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą liczącą i niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją. Wtedy $f \in L^1(\mathbb{N}, \mu)$ wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ jest zbieżny bezwzględnie. Jeżeli warunki te są spełnione to
$$\int_{\mathbb{N}} f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Obserwacja 2.1.18. *Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą, $f \in L^1(X, \mu)$ i $g \in \mathcal{M}(X)$ takie, że $f = g$ μ-p.w. Wtedy $g \in L^1(X, \mu)$ oraz $\int_X f\,d\mu = \int_X g\,d\mu$.*

Dowód. Zdefiniujmy $A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$, wtedy $\mu(A) = 0$ oraz
$$\int_X |g|\,d\mu = \int_{X\setminus A} |g|\,d\mu = \int_{X\setminus A} |f|\,d\mu < +\infty,$$
czyli $g \in L^1(X, \mu)$. Ponadto $f_+ = g_+$, $f_- = g_-$ na zbiorze $X \setminus A$ i wtedy
$$\begin{aligned}\int_X f\,d\mu &= \int_X f_+\,d\mu - \int_X f_-\,d\mu = \int_{X\setminus A} f_+\,d\mu - \int_{X\setminus A} f_-\,d\mu \\ &= \int_{X\setminus A} g_+\,d\mu - \int_{X\setminus A} g_-\,d\mu = \int_X g_+\,d\mu - \int_X g_-\,d\mu = \int_X g\,d\mu.\end{aligned}$$
□

Obserwacja 2.1.19. *Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą, $f \in L^1(X, \mu)$. Jeżeli dla dowolnego $A \in \mathfrak{M}$ mamy $\int_A f\,d\mu = 0$, to $f = 0$ μ-p.w.*

Dowód. Niech $A_+ = \{x \in X : f(x) > 0\}$ i $A_- = \{x \in X : f(x) < 0\}$, wtedy $f = f_+$ i $f_- = 0$ na zbiorze A_+ oraz $f = -f_-$, $f_+ = 0$ na zbiorze A_-. Otrzymujemy
$$\begin{aligned}0 &= \int_{A_+} f\,d\mu = \int_{A_+} f_+\,d\mu = \int_X f_+\,d\mu \ \Rightarrow f_+ = 0,\ \mu - \text{p.w.};\\ 0 &= \int_{A_-} f\,d\mu = \int_{A_-} f_-\,d\mu = \int_X f_-\,d\mu \ \Rightarrow f_- = 0,\ \mu - \text{p.w.},\end{aligned}$$
a wtedy $f = 0$ μ-p.w. □

Twierdzenie 2.1.20 (Twierdzenie o wartości średniej)**.** *Niech $(A, \mathcal{B}(A), \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą, gdzie $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem zwartym i spójnym oraz $\mu(A) \in (0, \infty)$. Jeżeli $f : A \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to istnieje punkt $a \in A$ taki, że*
$$f(a) = \frac{1}{\mu(A)} \int_A f\,d\mu.$$

Dowód. Z twierdzenia Weierstrassa[1] istnieją punkty $x_1, x_2 \in A$ takie, że dla dowolnego $x \in A$ zachodzi $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$. Wtedy
$$f(x_1)\mu(A) = \int_A f(x_1)\,d\mu \leq \int_A f\,d\mu \leq \int_A f(x_2)\,d\mu = f(x_2)\mu(A),$$

[1] Karl Weierstrass (1815-1897) – niemiecki matematyk.

czyli

$$f(x_1) \leq \frac{1}{\mu(A)} \int_A f\,d\mu \leq f(x_2).$$

Funkcja f jest ciągła na zbiorze spójnym, więc z własności Darboux[2] istnieje punkt $a \in A$ taki, że

$$f(a) = \frac{1}{\mu(A)} \int_A f\,d\mu. \qquad \square$$

Twierdzenie 2.1.21. *Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą, $f \in L^1(X, \mu)$. Wtedy*

$$\forall\,\epsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall A \in \mathfrak{M} : \mu(A) < \delta \Rightarrow \left| \int_A f\,d\mu \right| < \epsilon.$$

Dowód. Z obserwacji 2.1.16 mamy $\left|\int_A f\,d\mu\right| \leq \int_A |f|\,d\mu$, z czego wynika, że wystarczy wykazać tezę dla funkcji nieujemnych. Ustalmy dowolną liczbę $\epsilon > 0$. Istnieje ciąg funkcji prostych mierzalnych $f_n \nearrow f$. Wtedy istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $\int_X f\,d\mu - \int_X f_n\,d\mu < \frac{\epsilon}{2}$. Ponadto możemy założyć, że funkcja f_n jest ograniczona, tzn. istnieje $M > 0$ takie, że $f_n \leq M$. Teraz weźmy $\delta = \frac{\epsilon}{2M}$ i dowolny zbiór $A \in \mathfrak{M}$ o mierze $\mu(A) < \delta$, a wtedy

$$\int_A f\,d\mu = \int_A (f - f_n)\,d\mu + \int_A f_n\,d\mu < \frac{\epsilon}{2} + \int_A M\,d\mu = \frac{\epsilon}{2} + M\frac{\epsilon}{2M} = \epsilon. \qquad \square$$

2.2 Twierdzenia graniczne

W całym podrozdziale będziemy zakładać, że $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ jest przestrzenią mierzalną z miarą.

Twierdzenie 2.2.1. *Jeżeli $f_n \in \mathcal{M}^+(X)$, $n \in \mathbb{N}$, jest ciągiem rosnącym $f_n \nearrow f$ μ-p.w., to $f \in \mathcal{M}^+(X)$ oraz*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

Dowód. Z obserwacji 1.12.2 wynika, że $f \in \mathcal{M}^+(X)$. Zauważmy, że funkcje f, f_n można poprawić na zbiorze miary zero (np. definiując tam $f = f_n = 0$) tak, aby zbieżność zachodziła na całym X i wartości całek nie ulegną zmianie. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje ciąg $f_n^k \in \mathcal{M}_0^+(X)$, $k \in \mathbb{N}$, taki, że $f_n^k \nearrow f_n$, $k \to \infty$, tzn.,

$$\begin{aligned}
&0 \leq f_1^1 \leq f_1^2 \leq \cdots \leq f_1^n \leq \cdots \leq f_1;\\
&0 \leq f_2^1 \leq f_2^2 \leq \cdots \leq f_2^n \leq \cdots \leq f_2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&0 \leq f_n^1 \leq f_n^2 \leq \cdots \leq f_n^n \leq \cdots \leq f_n;\\
&0 \leq f_{n+1}^1 \leq f_{n+1}^2 \leq \cdots \leq f_{n+1}^n \leq f_{n+1}^{n+1} \leq \cdots \leq f_{n+1};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Zdefiniujmy nowe funkcje $g_n = \max(f_1^n, \ldots, f_n^n)$, a wtedy $g_n \in \mathcal{M}_0^+(X)$ oraz

$$g_n = \max(f_1^n, \ldots, f_n^n) \leq \max(f_1^{n+1}, \ldots, f_{n+1}^n) \leq \max(f_1^{n+1}, \ldots, f_n^{n+1}, f_{n+1}^{n+1}) = g_{n+1}.$$

Wykażemy teraz, że $g_n \to f$, gdy $n \to \infty$. Ciąg g_n jest rosnący, więc ma granicę $\lim_{n\to\infty} g_n = g$. Ponieważ

$$g_n = \max(f_1^n, \ldots, f_n^n) \leq \max(f_1, \ldots, f_n) = f_n,$$

to $g \leq f$. Przypuśćmy dla dowodu nie wprost, że $g(x) < f(x)$ dla pewnego $x \in X$. Wtedy istnieje n_0 takie, że $f_{n_0}(x) > g(x)$ i dalej istnieje $m_0 : m_0 > n_0$ takie, że $f_{n_0}^{m_0}(x) > g(x)$. Z tego wynika, że

$$g(x) \geq g_{m_0}(x) \geq f_{n_0}^{m_0}(x) > g(x)$$

i otrzymaliśmy sprzeczność.

Zauważmy, że $g_n \leq f_n \leq f$ i po scałkowaniu otrzymujemy

$$\int_X g_n\,d\mu \leq \int_X f_n\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu.$$

Z definicji całki $\int_X g_n\,d\mu \to \int_X f\,d\mu$, bo g_n jest rosnącym ciągiem funkcji prostych mierzalnych, ostatecznie mamy $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu$. $\square$

[2] Jean Darboux (1842-1917) – francuski matematyk.

Twierdzenie 2.2.2. *Szereg funkcji nieujemnych mierzalnych można całkować wyraz po wyrazie, tzn. jeżeli* $f_n \in \mathcal{M}^+(X)$, $n \in \mathbb{N}$, *to*

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Dowód. Wynika z twierdzenia 2.2.1, wystarczy przyjąć $g_n = f_1 + \cdots + f_n \nearrow g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. □

Twierdzenie 2.2.3. *Jeżeli* $f_n \in \mathcal{M}(X)$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n \searrow f$ μ*-p.w. i* $\int_X f_1 \, d\mu < +\infty$, *to*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Dowód. Jeżeli $\int_X f_1 \, d\mu = -\infty$, to $\int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f_1 \, d\mu = -\infty$ i wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = -\infty = \int_X f \, d\mu.$$

Teraz załóżmy, że $\int_X f_1 \, d\mu \in \mathbb{R}$. Zdefiniujmy nowe funkcje $g_n = f_1 - f_n \in \mathcal{M}^+(X)$. Wtedy $g_n \nearrow g := f_1 - f$ μ-p.w. Z twierdzenia 2.2.1 mamy

$$\int_X f_1 \, d\mu - \int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu = \int_X f_1 \, d\mu - \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Ponieważ całka $\int_X f_1 \, d\mu$ jest skończona, to $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$. □

Przy badaniu zbieżności całek z funkcji mierzalnych bardzo ważną rolę odgrywa Lemat Fatou[3].

Lemat 2.2.4 (Lemat Fatou)**.** *Jeżeli* $f_n \in \mathcal{M}^+(X)$, $n \in \mathbb{N}$, *to*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Dowód. Zdefiniujmy funkcje $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$, wtedy $g_n \nearrow \liminf_{n\to\infty} f_n$ oraz $g_n \leq f_n$. Na podstawie twierdzenia 2.2.1 otrzymujemy

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$ □

Przykład 2.2.5. Niech $f_n = \chi_{[n,n+1)} \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}, \mathcal{L}^1)$. Wtedy $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ i w lemacie Fatou mamy silną nierówność, gdyż $\int_X f_n \, d\mathcal{L}^1 = 1$.

Twierdzenie 2.2.6 (Twierdzenie Lebesgue'a)**.** *Niech* $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f_n \in \mathcal{M}(X, \mu)$, $g : X \to [0, +\infty]$, $g \in L^1(X, \mu)$ *i* $|f_n| \leq g$ μ*-p.w. Wtedy funkcje* f_n, $\liminf_{n\to\infty} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ *są całkowalne oraz*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

Dowód. Skoro $|f_n| \leq g$, to $-g \leq f_n \leq g$, a wtedy $|\liminf_{n\to\infty} f_n| \leq g$ i $|\limsup_{n\to\infty} f_n| \leq g$, czyli funkcje f_n, $\liminf_{n\to\infty} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n \in L^1(X, \mu)$. Korzystając z lematu Fatou dla funkcji $f_n + g \geq 0$, dostajemy

$$\begin{aligned} &\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu + \int_X g \, d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} (f_n + g) \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (f_n + g) \, d\mu \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu + \int_X g \, d\mu, \end{aligned}$$

z czego wynika pierwsza nierówność w tezie. Aby zakończyć dowód zauważmy, że możemy powtórzyć powyższe rozumowanie dla funkcji $-f_n + g$ i wykorzystać równość $\liminf_{n\to\infty}(-f_n) = -\limsup_{n\to\infty} f_n$. □

Twierdzenie 2.2.7 (Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej)**.** *Załóżmy, że* $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f_n \in \mathcal{M}(X, \mu)$, $f_n \to f$, $n \to \infty$, μ*-p.w. i istnieje funkcja* $g : X \to [0, +\infty]$, $g \in L^1(X, \mu)$ *taka, że* $|f_n| \leq g$ μ*-p.w. Wtedy* $f_n, f \in L^1(X, \mu)$ *oraz*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

[3] Pierre Fatou (1878-1929) – francuski matematyk i astronom.

Dowód. Wynika z twierdzenia 2.2.6. □

Ćwiczenie 2.2.8. Obliczyć granice

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}\sin\left(\frac{1}{nx}\right)\,d\mathcal{L}^1(x),\ \lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}nx\sin\left(\frac{1}{nx}\right)\,d\mathcal{L}^1(x).$$

Wniosek 2.2.9. *Jeżeli $f_n : X\to\overline{\mathbb{R}}$, $f_n\in L^1(X,\mu)$ i $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|\in L^1(X,\mu)$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ jest μ-p.w. zbieżny oraz*

$$\int_X\sum_{n=1}^{\infty}f_n\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n\,d\mu.$$

Ćwiczenie 2.2.10. Korzystając z równości $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ dla $x\in(-1,1)$ i z Wniosku 2.2.9 wykazać, że $\ln(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$, $x\in(-1,1)$.

Twierdzenie 2.2.11 (Całka jako funkcja zbioru)**.** *Niech $f\in\mathcal{M}^+(X)$. Wtedy*

1. *funkcja zbioru $\nu(A)=\int_A f\,d\mu$, $A\in\mathfrak{M}$, jest miarą nieujemną;*
2. *$\forall\, g\in L^1(X,\nu)\cup\mathcal{M}^+(X)$ zachodzi*

$$\int_X g\,d\nu=\int_X gf\,d\mu,$$

przy czym $g\in L^1(X,\nu)\Leftrightarrow gf\in L^1(X,\mu)$.

Dowód. Punkt (1). Wykażemy, że ν jest miarą. Mamy

$$\nu(\emptyset)=\int_\emptyset f\,d\mu=0.$$

Niech zbiory $A_j\in\mathfrak{M}$, $j\in\mathbb{N}$, będą parami rozłączne i niech $A=\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j$. Wtedy funkcja $f\chi_A=\sum_{j=1}^{\infty}f\chi_{A_j}$ i korzystając z wniosku 2.2.9 mamy

$$\begin{aligned}\nu(A)&=\int_A f\,d\mu=\int_X f\chi_A\,d\mu=\int_X\sum_{j=1}^{\infty}f\chi_{A_j}\,d\mu\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\int_X f\chi_{A_j}\,d\mu=\sum_{j=1}^{\infty}\int_{A_j}f\,d\mu=\sum_{j=1}^{\infty}\nu(A_j).\end{aligned}$$

Punkt (2). Załóżmy na początek, że $g=\chi_A$, dla $A\in\mathfrak{M}$. Wtedy

$$\int_X g\,d\nu=\int_X\chi_A\,d\nu=\nu(A)=\int_A f\,d\mu=\int_X f\chi_A\,d\mu=\int_X fg\,d\mu. \tag{2.2.1}$$

Niech teraz $g\in\mathcal{M}_0^+(X)$, wtedy g jest kombinacją liniową funkcji prostych mierzalnych i teza wynika z równości (2.2.1).

Jeżeli $g\in\mathcal{M}^+(X)$, to istnieje ciąg funkcji prostych mierzalnych $g_n\nearrow g$, $n\to\infty$. Korzystając z twierdzenia 2.2.1 ($g_nf\nearrow gf$) dostajemy:

$$\int_X g\,d\nu\leftarrow\int_X g_n\,d\nu=\int_X g_nf\,d\mu\to\int_X gf\,d\mu. \tag{2.2.2}$$

Jeżeli $g\in L^1(X,\nu)$, to $g=g_+-g_-$ i stosując równość (2.2.2) do funkcji g_+ i g_- dostajemy tezę.

Równoważność $g\in L^1(X,\nu)\Leftrightarrow gf\in L^1(X,\mu)$ pozostawiamy jako ćwiczenie. □

Miarę ν zdefiniowaną w twierdzeniu 2.2.11, tzn. $\nu(A)=\int_X f\,d\mu$, oznaczamy przez $\nu=f\mu$.

2.3 Całka Lebesgue'a a całka Riemanna

Przypomnimy teraz konstrukcję całki Riemanna[4] w $\mathbb{R}^n$.

- Niech $P = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ będzie dowolną *kostką domkniętą (kostką)* w $\mathbb{R}^n$, gdzie $a_j < b_j$, $j = 1, \ldots, n$.
- *Objętością kostki* P nazywamy liczbę

$$V^n(P) = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n).$$

- *Podziałem kostki* P nazywamy skończoną rodzinę kostek $\Pi = \{P_1, \ldots, P_m\}$ takich, że $P = P_1 \cup \cdots \cup P_m$, $\operatorname{int} P_j \cap \operatorname{int} P_k = \emptyset$, $j \neq k$.
- *Średnicą podziału* $\Pi = \{P_1, \ldots, P_m\}$ nazywamy liczbę

$$\operatorname{diam}(\Pi) = \max\{\operatorname{diam} P_1, \ldots, \operatorname{diam} P_m\}.$$

- Niech Π_k, $k \in \mathbb{N}$, będzie ciągiem podziałów kostki P. Powiemy, że jest to *ciąg normalny*, gdy $\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam}(\Pi_k) = 0$.
- Niech $f : P \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Zdefiniujmy $i(f, P) := \inf f(P)$, $s(f, P) := \sup f(P)$. Dla dowolnego podziału $\Pi = \{P_1, \ldots, P_m\}$ kostki P zdefiniujmy poniższe *sumy Darboux*

$$L(f, \Pi) := \sum_{j=1}^{m} i(f, P_j) V^n(P_j) \quad (\textit{suma aproksymacyjna dolna } f \text{ przy podziale } \Pi);$$

$$U(f, \Pi) := \sum_{j=1}^{m} s(f, P_j) V^n(P_j) \quad (\textit{suma aproksymacyjna górna } f \text{ przy podziale } \Pi).$$

- Zdefiniujmy następujące całki

$$\underline{\int_P} f := \sup_{\Pi} L(f, \Pi) \quad (\textit{całka dolna } \text{z } f \text{ po kostce } P);$$

$$\overline{\int_P} f := \inf_{\Pi} U(f, \Pi) \quad (\textit{całka górna } \text{z } f \text{ po kostce } P).$$

Definicja 2.3.1. Powiemy, że funkcja f jest *całkowalna w sensie Riemanna* ($f \in \mathcal{R}(P)$), jeżeli $\underline{\int_P} f = \overline{\int_P} f$. Wtedy wspólną wartość tych całek nazywamy *całką Riemanna* z funkcji f po przedziale P i oznaczmy przez $\int_P f$.

- Niech $\Pi = \{P_1, \ldots, P_m\}$ będzie podziałem kostki P i niech $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$ będzie *ciągiem punktów pośrednich* $\xi_j \in P_j$, $j = 1, \ldots, m$. Dla funkcji ograniczonej $f : P \to \mathbb{R}$ zdefiniujmy *sumy aproksymacyjne Riemanna*

$$r(f, \Pi, \Xi) := \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j) V^n(P_j).$$

- Dla każdego normalnego ciągu podziałów Π_k, $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$\lim_{k\to\infty} L(f, \Pi_k) = \underline{\int_P} f \text{ oraz } \lim_{k\to\infty} U(f, \Pi_k) = \overline{\int_P} f.$$

- Funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stała $c \in \mathbb{R}$ taka, że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $\{\Pi_k\}_{k=1}^{\infty}$ i dla dowolnego ciągu punktów pośrednich $\{\Xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ istnieje granica $\lim_{k\to\infty} r(f, \Pi_k, \Xi_k) = c (= \int_P f)$.

[4] Bernhard Riemann (1826-1866) – niemiecki matematyk.

- Powiemy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ ma *miarę Jordana*[5] *(objętość)* równą zero, $|A| = 0$, gdy dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje skończona liczba kostek $P_1, \dots, P_m$, takich że
$$A \subset P_1 \cup \dots \cup P_m \text{ i } V^n(P_1) + \dots + V^n(P_m) < \epsilon.$$
Zauważmy, że jeżeli $|A| = 0$, to A jest podzbiorem zbioru o mierze Lebesgue'a zero, np.
$$A \subset \bigcap_{j=1}^{\infty} \left(P_1^j \cup \dots \cup P_{m(j)}^j\right), \text{ gdzie } \mathcal{L}^n \left(P_1^j \cup \dots \cup P_{m(j)}^j\right) \le \frac{1}{j}$$
to korzystając z zupełności miary Lebesgue'a, dostajemy, że $A \in \mathfrak{L}_n$.

- Funkcje ciągłe są całkowalne w sensie Riemanna.

- Powiemy, że zbiór ograniczony $A \subset \mathbb{R}^n$ jest *mierzalny w sensie Jordana*, gdy funkcja $\chi_A \in \mathcal{R}(P)$, dla $A \subset P$. Liczbę $|A| = \int_P \chi_A$ nazywamy *miarą Jordna (objętością)* zbioru A.

- Powiemy, że zbiór ograniczony $A \subset \mathbb{R}^n$ jest *regularny*, gdy $|\partial A| = 0$.

- Jeżeli funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest ograniczona i A jest zbiorem regularnym, to powiemy, że f jest *całkowalna w sensie Riemanna na zbiorze* A, gdy $f_0 \in \mathcal{R}(P)$, gdzie $P \supset A$ jest kostką i
$$f_0 = \begin{cases} f, & \text{na } A, \\ 0, & \text{na } P \setminus A. \end{cases}$$
Definiujemy wtedy $\int_A f := \int_P f_0$.

Ćwiczenie 2.3.2. Funkcja $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a, ale nie jest całkowalna w sensie Riemanna.

Twierdzenie 2.3.3 (Porównanie całki Lebesgue'a i całki Riemanna)**.** *Niech A będzie zbiorem ograniczonym i regularnym w $\mathbb{R}^n$ i niech $f : A \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Wtedy*

1. $A \in \mathfrak{L}_n$;
2. *jeżeli $f \in \mathcal{R}(A)$, to $f \in L^1(A, \mathcal{L}^n)$ oraz*
$$\int_A f = \int_A f \, d\mathcal{L}^n.$$
3. $f \in \mathcal{R}(A) \Leftrightarrow \mathcal{L}^n (\{a \in A : \ f \text{ nie jest ciągła w punkcie } a\}) = 0.$

Dowód. Punkt (1). Zauważmy, że $A = (\operatorname{int} A) \cup B$, gdzie $B \subset \partial A$, a więc $\mathcal{L}^n(B) = 0$. Z tego wynika, że $A \in \mathfrak{L}_n$.

Punkt (2) i (3). Zauważmy, że możemy założyć, że $f \ge 0$ i zbiór A jest kostką domkniętą $A = P$.

Niech $\Pi_j = \{\overline{P}_{1,j}, \dots, \overline{P}_{m(j),j}\}$ będzie ciągiem normalnym podziałów, gdzie $P_{k,j}$ są kostkami otwartymi i $\epsilon_j = \operatorname{diam}(\Pi_j) \to 0$. Przyjmijmy niech $i_{k,j} = i(f, \overline{P}_{k,j}) = \inf f(\overline{P}_{k,j})$, $s_{k,j} = s(f, \overline{P}_{k,j}) = \sup f(\overline{P}_{k,j})$ i wtedy
$$L_j = L(f, \Pi_j) := \sum_{k=1}^{m(j)} i_{k,j} V^n(\overline{P}_{k,j}) \to \underline{\int_P} f, j \to \infty;$$
$$U_j = U(f, \Pi_j) := \sum_{k=1}^{m(j)} s_{k,j} V^n(\overline{P}_{k,j}) \to \overline{\int_P} f, j \to \infty.$$

Niech $B_j = \bigcup_{k=1}^{m(j)} \partial P_{k,j}$, wtedy $P = P_{1,j} \cup \dots \cup P_{m(j),j} \cup B_j$, gdzie to suma parami rozłącznych zbiorów oraz $\mathcal{L}^n(B_j) = 0$. Zdefiniujmy funkcje proste $\psi_j, \Psi_j \in \mathcal{M}_0^+(P)$
$$\psi_j = \sum_{k=1}^{m(j)} i_{k,j}\chi_{P_{k,j}} + 0\chi_{B_j} \text{ oraz } \Psi_j = \sum_{k=1}^{m(j)} s_{k,j}\chi_{P_{k,j}} + 0\chi_{B_j}.$$

[5] Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922) – francuski matematyk.

Zauważmy, że
$$L_j = \int_P \psi_j \, d\mathcal{L}^n \text{ oraz } U_j = \int_P \Psi_j \, d\mathcal{L}^n.$$

Jeżeli $x \in P \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, to wtedy istnieją $k(j) \in \mathbb{N}$, takie że
$$\forall\, x \in P_{k(j),j} : \psi_j(x) = i_{k(j),j} = \inf f(\overline{P}_{k(j),j}).$$

Ponieważ $\operatorname{diam}(\overline{P}_{k(j),j}) \to 0$, to $\psi_j(x) \to \liminf_{y\to x} f(y) =: f_*(x)$. Podobnie można uzasadnić, że jeżeli $x \in P \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, to $\Psi_j(x) \to \limsup_{y\to x} f(y) =: f^*(x)$. Tak więc $\psi_j \to f_*$ i $\Psi_j \to f^*$, $j \to \infty$, $\mathcal{L}^n$-p.w., i z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej (twierdzenie 2.2.7) dostajemy
$$\int_P f_* \, d\mathcal{L}^n \leftarrow \int_P \psi_j \, d\mathcal{L}^n = L_j := \sum_{k=1}^{m(j)} i_{k,j} V^n(\overline{P}_{k,j}) \to \underline{\int_P} f, \; j \to \infty;$$
$$\int_P f^* \, d\mathcal{L}^n \leftarrow \int_P \Psi_j \, d\mathcal{L}^n = U_j := \sum_{k=1}^{m(j)} s_{k,j} V^n(\overline{P}_{k,j}) \to \overline{\int_P} f, \; j \to \infty,$$
czyli
$$\int_P f_* \, d\mathcal{L}^n = \underline{\int_P} f \text{ i } \int_P f^* \, d\mathcal{L}^n = \overline{\int_P} f.$$

Zauważmy, że $f \in \mathcal{R}(P)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\underline{\int_P} f = \overline{\int_P} f$, czyli
$$\int_P (f^* - f_*) \, d\mathcal{L}^n = 0,$$

To jest równoważne z faktem, że $f^* = f_*$ $\mathcal{L}^n$-p.w. (bo $f^* - f_* \geq 0$) co z kolei jest tożsame z równością
$$\mathcal{L}^n\left(\{a \in A : \; f \text{ nie jest ciągła w punkcie } a\}\right) = 0.$$

W końcu jeżeli $f \in \mathcal{R}(P)$, to $f = f^* = f_*$ $\mathcal{L}^n$-p.w. i
$$\int_P f = \overline{\int_P} f = \int_P f^* \, d\mathcal{L}^n = \int_P f \, d\mathcal{L}^n. \qquad \square$$

2.4 Zadania

Zadanie 2.4.1. Niech $(X, \mathfrak{M})$ będzie przestrzenią mierzalną, $x \in X$ i niech f będzie funkcją na X. Wykazać, że $\int_X f\, d\delta_x = f(x)$.

Zadanie 2.4.2. Niech $(X, \mathfrak{M})$ będzie przestrzenią mierzalną, μ_n niech będą miarami oraz $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Wykazać, że $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu_n$ jest miarą oraz dla dowolnej funkcji $f \in L^1(X, \mu)$ zachodzi

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_X f\, d\mu_n.$$

Zadanie 2.4.3. Niech $f \in L^1([a,b], \mathcal{L}^1|_{[a,b]})$. Udowodnić, że funkcja

$$F(x) = \int_{[a,x]} f\, d\mathcal{L}^1|_{[a,b]},\ x \in [a,b]$$

jest ciągła.

Zadanie 2.4.4. Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą.

1. Udowodnić, że funkcja
$$F(x) = \int_{[a,x]} f\, d\mathcal{L}^1|_{[a,b]},\ x \in [a,b]$$
jest różniczkowalna na odcinku (a,b) oraz $F'(x) = f(x)$, $x \in (a,b)$.

2. Jeżeli funkcja $G \in \mathcal{C}([a,b])$ jest funkcją pierwotną f, to
$$\int_{[a,b]} f\, d\mathcal{L}^1|_{[a,b]} = G(b) - G(a).$$

Zadanie 2.4.5. Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą, $\mu(X) < +\infty$ oraz $f \in \mathcal{M}(X)$. Wykazać, że następujące warunki są równoważne

1. $f \in L^1(X, \mu)$;
2. szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n\mu(\{x \in X : n \le |f(x)| < n+1\})$ jest zbieżny;
3. szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x \in X : n \le |f(x)|\})$ jest zbieżny.

Zadanie 2.4.6. Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą i $f \in \mathcal{M}(X)$. Udowodnić, że $f \in L^1(X, \mu)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g \in L^1((0, +\infty), \mathcal{L}^1)$, gdzie $g(t) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\})$, $t > 0$. Ponadto, gdy spełnione są powyższe warunki, to

$$\int_X |f|\, d\mu = \int_{(0,+\infty)} g\, d\mathcal{L}^1.$$

Zadanie 2.4.7. Podać przykład zbioru ograniczonego $A \subset \mathbb{R}^n$ takiego, że $\mathcal{L}^n(\partial A) > 0$.

Zadanie 2.4.8. Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą skończoną μ i niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją $\mathfrak{M}-$mierzalną. Wykazać, że istnieje funkcja $\mathfrak{M}-$mierzalna $g : X \to (0, \infty)$ taka, że

$$\int_X |fg| d\mu < \infty.$$

Zadanie 2.4.9. Obliczyć

$$\int_{[0,\infty)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n + x^2}\, d\mathcal{L}^1(x).$$

Zadanie 2.4.10. Niech dana będzie miara borelowska μ na $\mathbb{R}$ taka, że dla dowolnego zbioru borelowskiego $A \subset \mathbb{R}$

$$\mu(A) = \int_A |x+1|\, d\mathcal{L}^1(x).$$

Obliczyć

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{(0,1)} nx \sin\frac{1}{nx}\, d\mu(x).$$

Zadanie 2.4.11. Obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}+x^{n+2}}\,d\mathcal{L}^1(x).$$
Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie 2.4.12. Obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{[0,2]}\frac{\sin(\pi x)}{1+x^n}d\mathcal{L}^1(x).$$

Zadanie 2.4.13. Sprawdzić, czy funkcja
$$f(x,y)=\left[\frac{16}{x^2+y^2+7}\right]$$
jest funkcją prostą ($[a]$ - oznacza część całkowitą z liczby $a\in\mathbb{R}$). Obliczyć całkę $\int_{\mathbb{R}^2} f\,d\mathcal{L}^2$.

Zadanie 2.4.14. Pokazać, że funkcja określona wzorem
$$\mu:\mathcal{P}(\mathbb{R})\ni A\mapsto\sum_{n=1}^{\infty}\delta_{\frac{1}{n}}(A)\in[0,+\infty]$$
jest miarą (δ_a - oznacza miarę Diraca w punkcie $a\in\mathbb{R}$) i obliczyć całkę:
$$\int\limits_{(0,2014]}2^{-\frac{1}{x}}d\mu.$$

Zadanie 2.4.15. Obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty}\int_{(2,5)}(3^n+x^n)^{\frac{1}{n}}\,d\mathcal{L}^1(x).$$

Zadanie 2.4.16. Obliczyć granicę
$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,d\mathcal{L}^1(x).$$

Zadanie 2.4.17. Obliczyć
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin nx}{2^n}\,d\mathcal{L}^1(x).$$

Zadanie 2.4.18. Obliczyć granicę
$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_0^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}+x)^n}{(\frac{1}{2}+x)^n+1}e^{-2x}\,d\mathcal{L}^1(x).$$

Zadanie 2.4.19. Obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty}\int_{[1,\infty)}\frac{(x-1)^n}{(x-1)^n x^2+1}\,d\mathcal{L}^1(x)$$
i uzasadnić poprawność przeprowadzonych obliczeń.

Zadanie 2.4.20. Obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\sqrt[n]{1+x^n}e^{-3x}\,d\mathcal{L}^1(x)$$
i uzasadnić poprawność przeprowadzonych obliczeń.

Zadanie 2.4.21. Obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\frac{x^{n-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{n}}}{x^n+1}\ln x\,d\mathcal{L}^1(x)$$
i uzasadnić poprawność przeprowadzonych obliczeń.

Zadanie 2.4.22. Niech f będzie funkcją ciągłą na odcinku $[0,1]$. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 f(x)x^{n-1}\, d\mathcal{L}^1(x).$$

Zadanie 2.4.23. Znaleźć wszystkie borelowskie miary probabilistyczne μ na $[0,1]$, spełniające warunek

$$\int_{[0,1]} x d\mu(x) = 1.$$

Zadanie 2.4.24. Znaleźć wszystkie miary μ na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ takie, że dla dowolnej funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ zachodzi

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu(x) = f(0) + 2f(1).$$

Zadanie 2.4.25. Niech μ będzie taką probabilistyczną miarą borelowską na $\mathbb{R}$, że dla każdego borelowskiego $A \subset \mathbb{R}$ zachodzi

$$\int_A \sin(\pi x) d\mu(x) = 0.$$

Wyznaczyć $\mu(\mathbb{Z})$.

Zadanie 2.4.26. (Twierdzenie Łuzina[6]) *Niech μ będzie miarą regularną na przestrzeni topologicznej X. Jeżeli funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest mierzalna, to dla każdej liczby $\epsilon > 0$ istnieje zbiór domknięty $Y \subset X$ taki, że funkcja $f|Y$ jest ciągła oraz $\mu(X \setminus Y) < \epsilon$.*

Zadanie 2.4.27. (Twierdzenie Jegorowa[7]) *Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą skończoną $\mu(X) < +\infty$. Niech $f, f_n \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$, $n \in \mathbb{N}$ i f, f_n są skończone μ-p.w. oraz $f_n \to f$, $n \to \infty$ μ-p.w. Wtedy dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje zbiór $Y \in \mathfrak{M}$ taki, że*

$$\mu(X \setminus Y) < \epsilon \textit{ oraz } f_n \rightrightarrows f,\ n \to \infty,\ \textit{jednostajnie na } Y.$$

Jeżeli dodatkowo X jest przestrzenią topologiczną i μ jest miarą regularną, to istnieje zbiór domknięty Y o podanych własnościach.

Zadanie 2.4.28. Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą i niech $f_n, f : X \to \mathbb{R}$, $f, f_n \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$, $n \in \mathbb{N}$. Powiemy, że ciąg f_n jest *zbieżny względem miary μ (μ-zbieżny)* do funkcji f, gdy

$$\forall\, \epsilon > 0 \ \lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}\right) = 0.$$

Wykazać, że

1. jeżeli $\mu(X) < +\infty$ to zbieżność punktowa μ-p.w. implikuje zbieżność względem miary μ;
2. zbieżność jednostajna μ-p.w. implikuje zbieżność względem miary μ;
3. z każdego ciągu zbieżnego względem miary μ można wybrać podciąg zbieżny jednostajnie μ-p.w.

Zadanie 2.4.29. Wykazać, że

1. każdy zbiór o objętości zero jest ograniczony;
2. każdy zbiór skończony ma objętość zero;
3. podzbiór zbioru o objętości zero ma objętość zero;
4. suma skończonej liczby zbiorów o objętości zero ma objętość zero;
5. jeżeli $\mathbb{R}^n \ni a_j \to a \in \mathbb{R}^n$, to zbiór $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ ma objętość zero;

[6] Nikołaj Nikołajewicz Łuzin (1883-1950) – rosyjski matematyk.
[7] Dmitrij Fiodorowicz Jegorow (1869-1931) – rosyjski matematyk.

6. jeżeli $A \subset \mathbb{R}^n$ ma objętość zero, to dla dowolnego zbioru ograniczonego $B \subset \mathbb{R}^m$ zbiór $A \times B$ ma objętość zero. W szczególności, dla dowolnej kostki ograniczonej $P \subset \mathbb{R}^n$ mamy $|\partial P| = 0$;

7. jeżeli $|A| = 0$, to $|\bar{A}| = 0$.

Zadanie 2.4.30. Niech $P \subset \mathbb{R}^m$ będzie kostką domkniętą i niech $f : P \to \mathbb{R}^{n-m}$ będzie funkcją ciągłą i $1 \le m \le n-1$. Wtedy wykres funkcji $\{(x, f(x)) : x \in P\}$ ma objętość zero.

Zadanie 2.4.31. Niech $P \subset \mathbb{R}^m$ będzie kostką domkniętą i niech $f : P \to \mathbb{R}^n$ będzie funkcją spełniającą warunek Höldera[8] z wykładnikiem α (warunek Lipschitza[9])[10]. Wtedy

1. jeżeli $\alpha n > m$ $(\alpha > m)$, to zbiór $f(P)$ ma objętość zero;

2. jeżeli $\alpha n \ge m$ $(\alpha \ge m)$, to zbiór $f(Z)$ ma objętość zero, dla dowolnego zbioru $Z \subset P$ o objętości zero.

Zadanie 2.4.32. Wykazać, że

1. jeżeli $|A| = 0$, to zbiór A jest regularny;

2. każda kostka jest regularna;

3. jeżeli zbiór A jest regularny, to zbiór $\operatorname{int} A$ jest regularny; implikacja przeciwna nie jest prawdziwa;

4. jeżeli zbiór A jest regularny, to zbiór $\bar{A}$ jest regularny; implikacja przeciwna nie jest prawdziwa;

5. jeżeli zbiory A, B sa regularne, to zbiory $A \cap B$, $A \cup B$ i $A \setminus B$ są regularne;

6. jeżeli zbiory $A \subset \mathbb{R}^n$ i $B \subset \mathbb{R}^m$ są regularne, to zbiór $A \times B$ jest regularny.

Zadanie 2.4.33. Niech A będzie zbiorem regularnym w $\mathbb{R}^{n-1}$ i niech $f \in \mathcal{R}(A)$. Wykazać, że wykres $\{(x, f(x)) : x \in P\} \subset \mathbb{R}^n$ ma objętość zero.

---

[8]Otto Ludwig Hölder (1859-1937) – niemiecki matematyk.

[9]Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903) – niemiecki matematyk.

[10]funkcja $f : P \to \mathbb{R}$ spełnia *warunek Höldera* z wykładnikiem $0 < \alpha < 1$ (dla $\alpha = 1$ warunek Lipschitza), gdy istnieje stała $C > 0$ taka, że $\forall\, x, y \in [a, b] : |f(x) - f(y)| \le C|x - y|^\alpha$.

Rozdział 3

Wybrane zagadnienia z teorii miary i całki

3.1 Twierdzenie o transporcie miary

Definicja 3.1.1. Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą i niech $(Y, \mathfrak{N})$ będzie przestrzenią mierzalną. Załóżmy, że $f : X \to Y$ będzie odwzorowaniem mierzalnym. Funkcję $\mu_f : \mathfrak{N} \to [0, +\infty]$ daną wzorem

$$\mu_f(B) = \mu(f^{-1}(B)),\ \ B \in \mathfrak{N}$$

nazywamy *transportem (obrazem) miary μ przez odwzorowanie f.*

Obserwacja 3.1.2. *Funkcja μ_f z definicji 3.1.1 jest miarą.*

Dowód. Mamy $\mu_f(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$. Weźmy teraz ciąg zbiorów mierzalnych $B_j \in \mathfrak{N}$ i parami rozłącznych. Wtedy zbiory $f^{-1}(B_j) \in \mathfrak{M}$ są również parami rozłączne i mamy

$$\mu_f\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(B_j)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(f^{-1}(B_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_f(B_j). \qquad \square$$

Przykład 3.1.3. Niech $\big([0,3], \mathcal{B}([0,3]), \mathcal{L}^1|_{[0,3]}\big)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą i niech $f = \chi_{[0,2]} - 4\chi_{(2,3]}$. Wówczas

$$\mu_f = 2\delta_1 + \delta_{-4}.$$

Twierdzenie 3.1.4 (Twierdzenie o transporcie miary)**.** *Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą, $(Y, \mathfrak{N})$ będzie przestrzenią mierzalną i niech $f : X \to Y$ będzie odwzorowaniem mierzalnym. Jeżeli $g : Y \to \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem mierzalnym, to*

$$\int_Y g\, d\mu_f = \int_X g \circ f\, d\mu,$$

przy czym każda z powyższych całek istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje druga z nich. Ponadto dla dowolnego $B \in \mathfrak{N}$ zachodzi również

$$\int_B g\, d\mu_f = \int_{f^{-1}(B)} g \circ f\, d\mu.$$

Dowód. a) Niech $g = \chi_B$, gdzie $B \in \mathfrak{N}$. Wtedy mamy

$$\int_Y g\, d\mu_f = \int_Y \chi_B\, d\mu_f = \mu_f(B) = \mu(f^{-1}(B));$$
$$\int_X g \circ f\, d\mu = \int_X \chi_B \circ f\, d\mu = \int_X \chi_{f^{-1}(B)}\, d\mu = \mu(f^{-1}(B)).$$

b) Niech $g \in \mathcal{M}_0^+(Y)$, wtedy $g = \sum_{j=1} b_j \chi_{B_j}$ i teza wynika z punktu (a).

c) Niech $g \in \mathcal{M}^+(Y)$, wtedy istnieje ciąg funkcji prostych mierzalnych $g_n \nearrow g$. Teraz teza wynika z punktu (b) i twierdzenia 2.2.1.

d) Niech $g \in L^1(Y, \mu_f)$, wtedy $g = g_+ - g_-$ i stosujemy punkt (c).

e) Jeżeli $B \in \mathfrak{M}$, to mamy

$$\int_B g\,d\mu_f = \int_Y g\chi_B\,d\mu_f = \int_X (g\chi_B)\circ f\,d\mu = \int_{f^{-1}(B)} g\circ f\,d\mu.$$

$\square$

Przykład 3.1.5. Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, a $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją mierzalną, która przyjmuje co najwyżej przeliczalną liczbę wartości (tzn. jest dyskretną zmienną losową). Niech $f(X) = \{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ i $p_j = \mu(\{x \in X : f(x) = a_j\})$. Wówczas transport miary μ przez funkcję f jest równy

$$\mu_f = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \delta_{a_j},$$

a wartość oczekiwana (o ile istnieje) wynosi

$$\int_X f\,d\mu = \int_{\mathbb{R}} x\,d\mu_f = \sum_{j=1}^{\infty} a_j p_j.$$

Na koniec tego podrozdziału opiszemy jak wygląda transport miary Lebesgue'a przez dyfeomorfizm. Niech $\Psi : U \to V$ będzie dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^1$, gdzie $U, V \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n$ (tzn. Φ jest bijekcją oraz Ψ i Ψ^{-1} są klasy $\mathcal{C}^1$). Oznaczmy przez $\operatorname{Jac}\Psi$ wyznacznik macierzy Jacobiego[1] dyfeomorfizmu $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_n)$, tzn.

$$\operatorname{Jac}\Psi = \det\left[\frac{\partial \Psi_j}{\partial x_k}\right]_{j,k=1}^{n}.$$

Twierdzenie 3.1.6 (Twierdzenie o zmianie zmiennej dla całki Lebesgue'a)**.** *Niech $\Psi : U \to V$ będzie dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^1$, gdzie $U, V \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n$. Wtedy*

1. *dla dowolnego zbioru $A \subset V$, $A \in \mathfrak{L}_n$ zachodzi $\Psi^{-1}(A) \in \mathfrak{L}_n$ oraz*

$$\mathcal{L}^n(A) = \int_{\Psi^{-1}(A)} |\operatorname{Jac}\Psi|\,d\mathcal{L}^n;$$

2. *dla dowolnego zbioru $A \subset V$, $A \in \mathfrak{L}_n$ i funkcji $g \in \mathcal{M}^+(A, \mathcal{L}^n)$ (odpowiednio: $g \in L^1(A, \mathcal{L}^n)$) zachodzi $(g\circ\Psi)|\operatorname{Jac}\Psi| \in \mathcal{M}^+(\Psi^{-1}(A), \mathcal{L}^n)$ (odpowiednio: $(g\circ\Psi)|\operatorname{Jac}\Psi| \in L^1(\Psi^{-1}(A), \mathcal{L}^n)$) oraz*

$$\int_A g\,d\mathcal{L}^n = \int_{\Psi^{-1}(A)} (g\circ\Psi)|\operatorname{Jac}\Psi|\,d\mathcal{L}^n.$$

3.2 Miary produktowe. Twierdzenie Fubiniego

W tym podrozdziale będziemy zawsze zakładali, że $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ i $(Y, \mathfrak{N}, \nu)$ są przestrzeniami mierzalnymi z miarami σ-skończonymi.

Definicja 3.2.1. Na iloczynie kartezjańskim $X \times Y$ zdefiniujmy *σ-algebrę produktową* $\mathfrak{M}\otimes\mathfrak{N}$ jako najmniejszą σ-algebrę zawierającą iloczyny kartezjańskie zbiorów mierzalnych, tzn.

$$\mathfrak{M}\otimes\mathfrak{N} := \sigma\left(\{A\times B : A \in \mathfrak{M}, B \in \mathfrak{N}\}\right) = \sigma\left(\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}\right).$$

Miarę φ określoną na przestrzeni mierzalnej $(X\times Y, \mathfrak{M}\otimes\mathfrak{N})$ nazywamy *miarą produktową* (*produktem*) miar μ i ν, gdy spełnia następujący warunek

$$\forall\, A \in \mathfrak{M}\ \forall\, B \in \mathfrak{N} : \varphi(A\times B) = \mu(A)\nu(B).$$

[1] Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851) – niemiecki matematyk.

Definicja 3.2.2. Dla zbioru $C \subset X \times Y$ zdefiniujmy zbiory

$$C_x = \{y \in Y : (x,y) \in C\}, \text{ dla } x \in X;$$
$$C^y = \{x \in X : (x,y) \in C\}, \text{ dla } y \in Y.$$

Podobnie dla funkcji $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ zdefiniujmy dla $x \in X$ i $y \in Y$ funkcje

$$f_x : Y \to \overline{\mathbb{R}},\ f_x(y) = f(x,y);$$
$$f^y : X \to \overline{\mathbb{R}},\ f^y(x) = f(x,y).$$

Lemat 3.2.3. *Niech $C \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$ i $f \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N})$. Wówczas:*

1. $\forall\, x \in X : C_x \in \mathfrak{N}$ *oraz* $\forall\, y \in Y : C^y \in \mathfrak{M}$*;*
2. $\forall\, x \in X : f_x \in \mathcal{M}(Y, \mathfrak{N})$ *oraz* $\forall\, y \in Y : f^y \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$*;*
3. $\alpha_C(x) := \nu(C_x) \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})$ *oraz* $\beta_C(y) := \mu(C^y) \in \mathcal{M}(Y, \mathfrak{N})$.

Dowód. Punkt (1). Zdefiniujmy rodzinę zbiorów

$$\mathcal{A} = \{E \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N} : \forall\, x \in X\ E_x \in \mathfrak{N}\}.$$

Teza zostanie wykazana, gdy udowodnimy, że $\mathcal{A}$ jest σ-algebrą zawierającą iloczyny kartezjańskie zbiorów mierzalnych.

- $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \subset \mathcal{A}$.

  Niech $E = A \times B$, $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{N}$. Wtedy dostajemy

  $$E_x = \begin{cases} B, & x \in A; \\ \emptyset, & x \notin A, \end{cases}$$

  z czego wynika, że $E \in \mathcal{A}$.
- Jeżeli $E \in \mathcal{A}$, to $E' \in \mathcal{A}$.

  Wystarczy zauważyć, że $(E')_x = (E_x)'$ dla dowolnego $x \in X$.
- Jeżeli $E_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$, to $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{A}$.

  Wystarczy zauważyć, że $E_x = \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j)_x$ dla $x \in X$.

Analogicznie można wykazać drugą część tezy.

Punkt (2). Niech V będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{R}$, wtedy

$$E = f^{-1}(V) = \{(x,y) : f(x,y) \in V\} \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}.$$

Z punktu (1) dostajemy, że przekrój $E_x = \{y : f_x(y) \in V\} \in \mathfrak{N}$, z czego wynika, że funkcja $f_x \in \mathcal{M}(Y, \mathfrak{N})$. Analogicznie można wykazać drugą część tezy.

Punkt (3). Załóżmy na początek, że miara ν jest skończona. Zauważmy, że z punktu (1) wynika, że funkcja α_C jest dobrze zdefiniowana. Zdefiniujmy następującą rodzinę zbiorów

$$\mathcal{D} = \{C \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N} : \alpha_C \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{M})\}.$$

Zauważmy, że rodzina $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ jest π-układem, bo dla dowolnych $A = A_1 \times A_2, B = B_1 \times B_2$ mamy

$$A \cap B = (A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}.$$

Teza zostanie wykazana, gdy udowodnimy, że $\mathcal{D}$ jest λ-układem zawierającym $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, bo wtedy z twierdzenia 1.1.27

$$\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N} \supset \mathcal{D} \supset \lambda(\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}) = \sigma(\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}) = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}.$$

- $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \subset \mathcal{D}$, w szczególności $X \times Y \in \mathcal{D}$.

  Niech $E = A \times B$, $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{N}$. Wtedy otrzymujemy

$$\alpha_E(x) = \begin{cases} \nu(B), & x \in A; \\ 0, & x \notin A, \end{cases} = \nu(B)\chi_A$$

  z czego wynika, że $E \in \mathcal{D}$.

- Jeżeli $E, F \in \mathcal{D}$, $E \subset F$, to $F \setminus E \in \mathcal{D}$.

  Wystarczy zauważyć, że $(F \setminus E)_x = F_x \setminus E_x$ i wtedy dostajemy

$$\alpha_{F\setminus E}(x) = \nu((F \setminus E)_x) = \nu(F_x \setminus E_x) = \nu(F_x) - \nu(E_x) = \alpha_F(x) - \alpha_E(x).$$

- Załóżmy, że E_j jest ciągiem wstępującym $E_j \nearrow E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, wtedy $(E_j)_x \nearrow E_x = \bigcup_{j=1}^{\infty}(E_j)_x$ i mamy

$$\alpha_{E_j}(x) = \nu((E_j)_x) \nearrow \nu\,(E_x) = \alpha_E(x),\ j \to \infty.$$

Załóżmy teraz, że miara ν jest σ-skończona. Wtedy istnieje ciąg zbiorów wstępujących $Y_j \in \mathfrak{N}$, $\nu(Y_j) < +\infty$ oraz $Y = \bigcup_{j=1}^{\infty} Y_j$. Niech $\nu_j(B) = \nu(B \cap Y_j)$, wtedy ν_j są miarami skończonymi. Zauważmy, że funkcje $(\alpha_C)_j(x) = \nu_j(C_x)$ są mierzalne oraz

$$(\alpha_C)_j(x) = \nu_j(C_x) = \nu(Y_j \cap C_x) \nearrow \nu(C_x) = \alpha_C(x),$$

z czego wynika, że α_C jest funkcją mierzalną.

Analogicznie można wykazać drugą część tezy. $\square$

Twierdzenie 3.2.4. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$.

Dowód. Aby wykazać inkluzję $\supset$ zauważmy, że każdy zbiór $U \in \operatorname{top}(\mathbb{R}^{n+m})$ można przedstawić w postaci

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j,$$

gdzie $A_j \in \operatorname{top}(\mathbb{R}^n)$, $B_j \in \operatorname{top}(\mathbb{R}^m)$, $j \in \mathbb{N}$. Wtedy $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ i inkluzja została wykazana.

Teraz wykażemy inkluzję $\subset$. Dla dowolnego $A \subset \mathbb{R}^n$ zdefiniujmy rodzinę zbiorów

$$\mathcal{F}(A) = \left\{B \subset \mathbb{R}^m : A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})\right\}.$$

Rodzina ta ma następujące własności:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}(A)$.

   Dla dowodu wystarczy zauważyć, że $A \times \emptyset = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$.

2. Jeśli $B, C \in \mathcal{F}(A)$, to $B \setminus C \in \mathcal{F}(A)$.

   Aby to wykazać zauważmy, że $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

3. Jeśli $B_j \in \mathcal{F}(A)$, $j \in \mathbb{N}$, to $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{F}(A)$.

   Własność ta wynika z równości $A \times \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty}(A \times B_j)$.

4. Jeśli $A \in \operatorname{top}(\mathbb{R}^n)$, to $\mathcal{F}(A)$ jest σ-algebrą zawierającą $\operatorname{top}(\mathbb{R}^m)$.

   Zauważmy, że gdy $A \in \operatorname{top}(\mathbb{R}^n)$, to dla dowolnego $B \in \operatorname{top}(\mathbb{R}^n)$, mamy $A \times B \in \operatorname{top}(\mathbb{R}^{n+m})$, czyli $B \in \mathcal{F}(A)$. Z tego wynika, że $\mathcal{F}(A)$ jest σ-algebrą zawierającą $\operatorname{top}(\mathbb{R}^m)$.

Zdefiniujmy teraz rodzinę zbiorów

$$\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R}^n : \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{F}(A)\}.$$

Z punktu (4) wynika, że $\operatorname{top}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}$. Tak więc, aby zakończyć dowód, wystarczy pokazać, że $\mathcal{A}$ jest σ-algebrą, bo wtedy $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}$, co daje $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$, czyli $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$.

- Wykażemy, że jeśli $A \in \mathcal{A}$, to $A' \in \mathcal{A}$.

  Niech $A \in \mathcal{A}$ i $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, wtedy $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$. Mamy również $A' \times B = (A \times B)' \cap (\mathbb{R}^n \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$, czyli $B \in \mathcal{F}(A')$. Ponieważ B był dowolnym zbiorem borelowskim, to $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{F}(A')$, czyli $A' \in \mathcal{A}$.

- Wykażemy, że jeśli $A_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$, to $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

  Niech $A_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$, i $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, wtedy $A_j \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$. Mamy również $\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \times B = \bigcup_{j=1}^{\infty}(A_j \times B)$, czyli $B \in \mathcal{F}(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)$. Ponieważ B był dowolnym zbiorem borelowskim to $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{F}(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)$, czyli $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$. □

Obserwacja 3.2.5. $\mathfrak{L}_n \otimes \mathfrak{L}_m \subsetneq \mathfrak{L}_{n+m}$.

Dowód. Wykażemy, że
$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}) \subset \mathfrak{L}_n \otimes \mathfrak{L}_m \subset \mathfrak{L}_{n+m}.$$
Zauważmy, że kostki $n+m$ wymiarowe należą do $\mathfrak{L}_n \otimes \mathfrak{L}_m$ i kostki te generują rodzinę $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$, z czego wynika pierwsza inkluzja.

Aby wykazać drugą inkluzję weźmy zbiory $A \in \mathfrak{L}_n$ i $B \in \mathfrak{L}_m$. Wtedy z twierdzenia 1.7.8 istnieją zbiory $A_1 \subset \mathbb{R}^n$ i $B_1 \subset \mathbb{R}^m$ typu F_σ oraz zbiory $C_1 \in \mathfrak{L}_n$, $\mathcal{L}^n(C_1) = 0$, $C_2 \in \mathfrak{L}_m$, $\mathcal{L}^m(C_2) = 0$ oraz $A = A_1 \cup C_1$, $B = B_1 \cup C_2$. Wtedy
$$A \times B = (A_1 \times B_1) \cup (A_1 \times C_2) \cup (C_1 \times B_1) \cup (C_1 \times C_2) = (A_1 \times B_1) \cup C,$$
ponadto zbiór $A_1 \times B_1$ jest typu F_σ oraz
$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{n+m}(C) &\le \mathcal{L}^{n+m}(A_1 \times C_2) + \mathcal{L}^{n+m}(C_1 \times B_1) + \mathcal{L}^{n+m}(C_1 \times C_2)\\ &= \mathcal{L}^n(A_1)\mathcal{L}^m(C_2) + \mathcal{L}^n(C_1)\mathcal{L}^m(B_1) + \mathcal{L}^n(C_1)\mathcal{L}^m(C_2) = 0,\end{aligned}$$
czyli $A \times B \in \mathfrak{L}_{n+m}$. Z tego wynika, że
$$\sigma\left(\mathfrak{L}_n \times \mathfrak{L}_m\right) = \mathfrak{L}_n \otimes \mathfrak{L}_m \subset \mathfrak{L}_{n+m}.$$
Na koniec wykażemy, że nie ma równości w ostatniej inkluzji. Niech $A \neq \emptyset$, $\mathcal{L}^n(A) = 0$ i niech $B \notin \mathfrak{L}_m$. Wtedy $A \times B \notin \mathfrak{L}_n \otimes \mathfrak{L}_m$, bo inaczej z lematu 3.2.3 zbiór $(A \times B)_x = B$ musiałby być mierzalny. Z drugiej strony $A \times B \in \mathfrak{L}_{n+m}$, bo $A \times B \subset A \times \mathbb{R}^m$, miara $\mathcal{L}^{n+m}$ jest zupełna i $\mathcal{L}^{n+m}(A \times \mathbb{R}^m) = 0$. □

Twierdzenie 3.2.6 (Twierdzenie o istnieniu miary produktowej)**.** *Załóżmy, że μ, ν są miarami σ-skończonymi. Wtedy istnieje dokładnie jedna miara produktowa*
$$\mu \otimes \nu : \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N} \to [0, +\infty]$$
taka, że
$$\forall\, A \in \mathfrak{M}, \forall\, B \in \mathfrak{N} : \mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

Dowód. Niech $C \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$ wtedy z lematu 1.1.22 funkcja $\alpha_C \ge 0$ jest mierzalna i możemy z twierdzenia 2.2.11 zdefiniować miarę
$$\mu \otimes \nu(C) = \int_X \alpha_C(x)\, d\mu(x).$$
Dla $A \in \mathfrak{M}$ i $B \in \mathfrak{N}$ mamy
$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \int_X \alpha_{A\times B}(x)\, d\mu(x) = \int_X \nu(B)\chi_A(x)\, d\mu(x) = \mu(A)\nu(B).$$
Teraz wykażemy jedyność miary produktowej. Złóżmy dla dowodu nie wprost, że istnieją dwie miary produktowe λ_1 i λ_2. Ponieważ miary są σ-skończone, to istnieją zbiory parami rozłączne $X_j \in \mathfrak{M}$, $\mu(X_j) < +\infty$, $\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j = X$ oraz zbiory parami rozłączne $Y_k \in \mathfrak{N}$, $\nu(Y_k) < +\infty$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k = Y$.

Zdefiniujmy rodziny zbiorów
$$\mathcal{A}_{j,k} = \{E \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N} : \lambda_1(E \cap (X_j \times Y_k)) = \lambda_2(E \cap (X_j \times Y_k))\}.$$
Pokażemy, że $\mathcal{A}_{j,k} = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$. Zauważmy, że wystarczy wykazać, że $\mathcal{A}_{j,k}$ jest λ-układem zawierającym $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, bo wtedy z twierdzenia 1.1.27
$$\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N} \supset \mathcal{A}_{j,k} \supset \lambda(\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}) = \sigma(\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}) = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}.$$

a) $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}\subset\mathcal{A}_{j,k}$, w szczególności $X\times Y\in\mathcal{A}_{j,k}$.

Wynika to z faktu, że λ_1 i λ_2 to miary produktowe.

b) Niech $E_n\in\mathcal{A}_{j,k}$ będzie wstępującym ciągiem zbiorów, $E_n\nearrow E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$. Wtedy

$$\lambda_1(E\cap(X_j\times Y_k))=\lim_{n\to\infty}\lambda_1(E_n\cap(X_j\times Y_k))=\lim_{n\to\infty}\lambda_2(E_n\cap(X_j\times Y_k))=\lambda_2(E\cap(X_j\times Y_k)),$$

z czego wynika, że $E\in\mathcal{A}_{j,k}$.

c) Jeżeli $E,F\in\mathcal{A}_{j,k}$, $E\subset F$, to $F\setminus E\in\mathcal{A}_{j,k}$ i otrzymujemy

$$\begin{aligned}&\lambda_1((F\setminus E)\cap(X_j\times Y_k))=\lambda_1\left((F\cap(X_j\times Y_k)\setminus(E\cap(X_j\times Y_k))\right)=\\&=\lambda_1(F\cap(X_j\times Y_k))-\lambda_1(E\cap(X_j\times Y_k))=\lambda_2(F\cap(X_j\times Y_k))-\lambda_2(E\cap(X_j\times Y_k))\\&=\lambda_2\left((F\cap(X_j\times Y_k)\setminus(E\cap(X_j\times Y_k))\right)=\lambda_2((F\setminus E)\cap(X_j\times Y_k)).\end{aligned}$$

Zdefiniujmy teraz rodzinę zbiorów

$$\mathcal{A}=\{E\in\mathfrak{M}\otimes\mathfrak{N}:\lambda_1(E)=\lambda_2(E)\}.$$

Wykażemy, że $\mathcal{A}=\mathfrak{M}\otimes\mathfrak{N}$. Zauważmy, że wystarczy jak poprzednio wykazać, że $\mathcal{A}$ jest λ-układem zawierającym $\mathfrak{M}\times\mathfrak{N}$. Punkty (a) i (b) wykazuje się analogicznie. Pozostaje do wykazania punkt (c): jeżeli $E,F\in\mathcal{A}$, $E\subset F$, to $F\setminus E\in\mathcal{A}$. Niech $F_{j,k}=F\cap(X_j\times Y_k)$ oraz $E_{j,k}=E\cap(X_j\times Y_k)$, wtedy dostajemy

$$\lambda_1(F\setminus E)=\lambda_1\left(\bigcup_{j,k=1}^{\infty}(F_{j,k}\setminus E_{j,k})\right)=\sum_{j,k=1}^{\infty}\lambda_1(F_{j,k}\setminus E_{j,k})=\sum_{j,k=1}^{\infty}(\lambda_1(F_{j,k})-\lambda_1(E_{j,k}))$$

$$=\sum_{j,k=1}^{\infty}(\lambda_2(F_{j,k})-\lambda_2(E_{j,k}))=\sum_{j,k=1}^{\infty}\lambda_2(F_{j,k}\setminus E_{j,k})=\lambda_2\left(\bigcup_{j,k=1}^{\infty}(F_{j,k}\setminus E_{j,k})\right)=\lambda_2(F\setminus E).\square$$

Twierdzenie 3.2.7. (Zasada Cavaleriego[2]) *Niech μ, ν będą miarami σ-skończonymi. Jeżeli $C\in\mathfrak{M}\otimes\mathfrak{N}$, to $\alpha_C\in\mathcal{M}(X)$, $\beta_C\in\mathcal{M}(Y)$ oraz*

$$\mu\otimes\nu(C)=\int_X\alpha_C(x)\,d\mu(x)=\int_Y\beta_C(y)\,d\nu(y).$$

Dowód. Wynika z lematu 3.2.3 i twierdzenia 3.2.6. □

Przykład 3.2.8. Dla zbioru $C=\{(x,y)\in[0,1]^2:0\le y\le x^2\}\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ i miary produktowej $\mathcal{L}^1\otimes\mathcal{L}^1$ mamy

$$C_x=\begin{cases}[0,x^2], & x\in[0,1];\\ \emptyset, & x\notin[0,1],\end{cases}\quad\text{oraz } \alpha_C(x)=\begin{cases}\mathcal{L}^1([0,x^2])=x^2, & x\in[0,1];\\ \mathcal{L}^1(\emptyset)=0, & x\notin[0,1]\end{cases}$$

i wtedy

$$\mathcal{L}^1\otimes\mathcal{L}^1(C)=\int_{\mathbb{R}}\alpha_C(x)\,d\mathcal{L}^1(x)=\int_{[0,1]}x^2\,d\mathcal{L}^1(x)=\frac{1}{3}.$$

Twierdzenie 3.2.9. (Twierdzenie Tonellego[3]) *Niech μ, ν będą miarami σ-skończonymi. Załóżmy, że $f\in\mathcal{M}^+(X\times Y,\mathfrak{M}\otimes\mathfrak{N})$ i zdefiniujmy funkcje*

$$\tilde{\alpha}(x):=\int_Y f_x\,d\nu,\ x\in X\ \text{ oraz }\tilde{\beta}(y):=\int_X f^y\,d\mu,\ y\in Y.$$

Wówczas $\tilde{\alpha}\in\mathcal{M}^+(X)$ i $\tilde{\beta}\in\mathcal{M}^+(Y)$ oraz

$$\int_{X\times Y}f\,d(\mu\otimes\nu)=\int_X\tilde{\alpha}\,d\mu=\int_Y\tilde{\beta}\,d\nu.$$

Równość powyższą można również zapisać w postaci

$$\int_{X\times Y}f\,d(\mu\otimes\nu)=\int_X\left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x)=\int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y).$$

[2]Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647) – włoski matematyk i astronom.
[3]Leonida Tonelli (1885–1946) – włoski matematyk.

Dowód. Z lematu 3.2.3 wiemy, że funkcje f_x i f^y są poprawnie określone i mierzalne.

a) Niech $f = \chi_C$, dla $C \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$. Wtedy $\tilde{\alpha}(x) = \nu(C_x) = \alpha_C(x)$, $\tilde{\beta}(y) = \mu(C^y) = \beta_C(y)$ i otrzymujemy

$$\int_{X\times Y} \chi_C \, d(\mu\otimes\nu) = \mu\otimes\nu(C),$$
$$\int_X \tilde{\alpha}(x)\, d\mu(x) = \int_X \alpha_C(x)\, d\mu(x) = \mu\otimes\nu(C),$$
$$\int_Y \tilde{\beta}(y)\, d\nu(y) = \int_Y \beta_C(y)\, d\nu(y) = \mu\otimes\nu(C).$$

b) Jeżeli $f \in \mathcal{M}_0^+(X\times Y, \mathfrak{M}\otimes\mathfrak{N})$, to f jest kombinacją liniową funkcji charakterystycznych zbiorów mierzalnych i teza wynika z punktu (a).

c) Jeżeli $f \in \mathcal{M}^+(X\times Y, \mathfrak{M}\otimes\mathfrak{N})$, to f jest granicą rosnącego ciągu funkcji mierzalnych prostych i teza wynika z punktu (b) i twierdzenia o monotonicznym przejściu pod znakiem całki (twierdzenie 2.2.1). $\square$

Przykład 3.2.10. Niech $C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$ i $f(x,y) = y^2\sqrt{1-x^2}\chi_C$. Wtedy

$$\int_C f(x,y)\, d(\mathcal{L}^1\otimes\mathcal{L}^1) = \int_{[-1,1]} \left(\int_{[-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2}]} y^2\sqrt{1-x^2}\, d\mathcal{L}^1(y) \right) d\mathcal{L}^1(x)$$
$$= \int_{[-1,1]} \frac{2}{3}(1-x^2)^2\, d\mathcal{L}^1(x) = \frac{42}{35}.$$

Ćwiczenie 3.2.11. Niech μ będzie miarą σ-skończoną i $f\ge 0$, $f\in L^1(X,\mu)$. Wtedy

$$\int_X f\, d\mu = (\mu\otimes\mathcal{L}^1)(\{(x,y)\in X\times\mathbb{R} : 0\le y\le f(x)\}).$$

Obserwacja 3.2.12. *Niech μ, ν będą miarami σ-skończonymi. Jeżeli funkcja $f\in L^1(X\times Y, \mathfrak{M}\otimes\mathfrak{N})$, to $f_x \in L^1(Y,\nu)$ dla μ-p.w. $x\in X$ oraz $f^y\in L^1(X,\mu)$ dla ν-p.w. $y\in Y$.*

Dowód. Niech $f = f_+ - f_-$, wtedy f_+, f_- są całkowalne. Stosując do nich twierdzenie Tonellego, dostajemy $\tilde{\alpha}_+, \tilde{\alpha}_- \in L^1(X,\mu)$ i wtedy

$$\tilde{\alpha}_+(x) < +\infty,\ \text{dla } \mu - \text{p.w. } x\in X \ \Rightarrow (f_x)_+ \in L^1(Y,\nu) \text{ dla } \mu - \text{p.w. } x\in X,$$
$$\tilde{\alpha}_-(x) < +\infty,\ \text{dla } \mu - \text{p.w. } x\in X \ \Rightarrow (f_x)_- \in L^1(Y,\nu) \text{ dla } \mu - \text{p.w. } x\in X,$$

czyli $f_x = (f_x)_+ - (f_x)_- \in L^1(Y,\nu)$ dla μ-p.w. $x\in X$.

Dowód jest analogiczny dla funkcji f^y. $\square$

Twierdzenie 3.2.13. (Twierdzenie Fubiniego[4]) *Niech μ, ν będą miarami σ-skończonymi. Załóżmy, że $f\in L^1(X\times Y, \mathfrak{M}\otimes\mathfrak{N})$ i zdefiniujmy funkcje*

$$\tilde{\tilde{\alpha}}(x) := \begin{cases} \int_Y f_x\, d\nu, & x : f_x \in L^1(Y,\nu); \\ 0, & x : f_x \notin L^1(Y,\nu), \end{cases}$$

oraz

$$\tilde{\tilde{\beta}}(y) := \begin{cases} \int_X f^y\, d\mu, & y : f^y \in L^1(X,\mu); \\ 0, & y : f^y \notin L^1(X,\mu). \end{cases}$$

Wówczas $\tilde{\tilde{\alpha}} \in L^1(X,\mu)$ i $\tilde{\tilde{\beta}} \in L^1(Y,\nu)$ oraz

$$\int_{X\times Y} f\, d(\mu\otimes\nu) = \int_X \tilde{\tilde{\alpha}}\, d\mu = \int_Y \tilde{\tilde{\beta}}\, d\nu.$$

Równość powyższą można również zapisać w postaci

$$\int_{X\times Y} f\, d(\mu\otimes\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

[4] Guido Fubini (1879-1943) – włoski matematyk.

Dowód. Niech $f \in L^1(X \times Y, \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N})$, wtedy $f = f_+ - f_-$ i $f_+, f_- \geq 0$ są całkowalne. Mamy również $\tilde{\tilde{\alpha}} = \tilde{\tilde{\alpha}}_+ - \tilde{\tilde{\alpha}}_- \in L^1(X, \mu)$ oraz $\tilde{\tilde{\alpha}}_+, \tilde{\tilde{\alpha}}_- \in L^1(X, \mu)$. Twierdzenie Tonellego zachodzi dla par funkcji $\tilde{\tilde{\alpha}}$ i f_+ oraz $\tilde{\tilde{\alpha}}_-$ i f_-. Wszystkie otrzymane całki są skończone, po ich odjęciu dostajemy tezę.

Dowód jest analogiczny dla funkcji f^y i $\tilde{\tilde{\beta}}$. □

Poniższy przykład pokazuje, że twierdzenie Fubiniego nie jest prawdziwe dla miar, które nie są σ-skończone.

Przykład 3.2.14. Niech μ będzie miarą liczącą, $(\mathbb{R}^2, \mathcal{P}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{L}_1, \mu \otimes \mathcal{L}^1)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą i niech

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y; \\ 0, & x \neq y. \end{cases}$$

Wtedy

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, d\mu(x) \right) d\mathcal{L}^1(y) = \int_{\mathbb{R}} 1\, d\mathcal{L}^1(y) = +\infty,$$
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, d\mathcal{L}^1(y) \right) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} 0\, d\mu(x) = 0.$$

Teza twierdzenia Tonellego, tzn. równość całek iterowanych, nie zachodzi ponieważ μ nie jest miarą σ-skończoną.

Podamy teraz przykład pokazujący, że twierdzenie Fubiniego nie jest prawdziwe dla funkcji, które nie są całkowalne.

Przykład 3.2.15. Niech $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{L}_1 \otimes \mathfrak{L}_1, \mathcal{L}^1 \otimes \mathcal{L}^1)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą i niech

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, x \leq y < x + 1; \\ -1, & x \geq 0, x + 1 \leq y < x + 2; \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Wtedy

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, d\mathcal{L}^1(x) \right) d\mathcal{L}^1(y) = \int_0^1 y\, d\mathcal{L}^1(y) + \int_1^2 (2 - y)\, d\mathcal{L}^1(y) = 1,$$
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, d\mathcal{L}^1(y) \right) d\mathcal{L}^1(x) = \int_{\mathbb{R}} 0\, d\mathcal{L}^1(x) = 0.$$

Teza twierdzenia Fubiniego, tzn. równość całek iterowanych, nie zachodzi ponieważ funkcja f nie jest całkowalna.

Przykład 3.2.16. Niech $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$. Ciąg funkcji f_n można utożsamić z funkcją $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. Na zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ weźmy miarę produktową $\mu \otimes \mathcal{L}^1 : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathfrak{L}_1 \to [0, +\infty]$, gdzie μ jest miarą liczącą. Z twierdzenia Tonellego wynika twierdzenie o całkowaniu szeregu funkcyjnego

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) d\mathcal{L}^1(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{N}} f(n, x)\, d\mu(y) \right) d\mathcal{L}^1(x) = \int_{\mathbb{N} \times \mathbb{R}} f(n, x)\, d(\mu \otimes \mathcal{L}^1)(n, x)$$
$$= \int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(n, x)\, d\mathcal{L}^1(x) \right) d\mu(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, d\mathcal{L}^1(x).$$

Przestrzeń $(X \times Y, \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}, \mu \otimes \nu)$ nie musi być zupełna, nawet gdy miary μ, ν są zupełne. Stosując konstrukcję Carathéodory'ego, można ją uzupełnić do przestrzeni $(X \times Y, \overline{\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}}, \overline{\mu \otimes \nu})$.

Będziemy potrzebować następującej obserwacji.

Obserwacja 3.2.17. *Niech $(X, \mathfrak{A}, \alpha)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą i niech $(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\alpha})$ będzie jej uzupełnieniem. Wtedy dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathfrak{A}})$ istnieje funkcja $g \in \mathcal{M}(X, \mathfrak{A})$ taka, że $f = g$ α-p.w.*

Dowód. Zauważmy, że wystarczy wykazać tezę dla $f \geq 0$. Wtedy istnieje ciąg funkcji mierzalnych prostych $f_n \nearrow f$, $f_n = \sum_{j=1}^{k(n)} a_j^n \chi_{A_j^n}$, gdzie $A_j^n \in \overline{\mathfrak{A}}$. Z twierdzenia 1.5.4 mamy $A_j^n = B_j^n \cup C_j^n$, gdzie $B_j^n \in \mathfrak{A}$ oraz istnieją $Z_j^n \in \mathfrak{A}$, $\alpha(Z_j^n) = 0$ i $C_j^n \subset Z_j^n$. Zdefiniujmy zbiór $Z = \bigcup_{j,n} Z_j^n \in \mathfrak{A}$ i zauważmy, że $\alpha(Z) = 0$. Niech

$$g_n = \sum_{j=1}^{k(n)} a_j^n \chi_{B_j^n \setminus Z},$$

wtedy $g_n \in \mathcal{M}_0^+(X, \mathfrak{A})$ jest ciągiem rosnącym do pewnej funkcji $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{A})$. Skoro $g_n(x) = f_n(x)$ dla $x \notin Z$, to $g = f$ α-p.w. □

Obserwacja 3.2.18. *Niech μ, ν będą miarami zupełnymi i σ-skończonymi. Wtedy*

1. *jeżeli $C \in \overline{\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}}$, to $C_x \in \mathfrak{N}$ dla μ-p.w. $x \in X$ oraz $C^y \in \mathfrak{M}$ dla ν-p.w. $y \in Y$;*
2. *jeżeli $f \in \mathcal{M}(X \times Y, \overline{\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}})$, to $f_x \in \mathcal{M}(Y, \nu)$ dla μ-p.w. $x \in X$ oraz $f^y \in \mathcal{M}(X, \mu)$ dla ν-p.w. $y \in Y$.*

Dowód. Punkt (1). Niech $C \in \overline{\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}}$, wtedy z twierdzenia 1.5.4 $C = A \cup B$, gdzie $A \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$ oraz istnieje $Z \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$, $\mu \otimes \nu(Z) = 0$ i $B \subset Z$. Z Lematu 3.2.3 mamy $C_x = A_x \cup B_x$, $A_x \in \mathfrak{N}$, $B_x \subset Z_x$. Korzystając z zasady Cavaleriego, otrzymujemy

$$\mu \otimes \nu(Z) = \int_X \nu(Z_x)\, d\mu = 0.$$

Z obserwacji 2.1.10 mamy $\nu(Z_x) = 0$ μ-p.w. $x \in X$, czyli z zupełności miary ν dostajemy $\nu(B_x) = 0$ μ-p.w. $x \in X$. Z tego wynika, że $C_x \in \mathfrak{N}$ dla μ-p.w. $x \in X$.

Dowód jest analogiczny dla zbiorów C^y.

Punkt (2). Niech $f \in \mathcal{M}(X \times Y, \overline{\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}})$, wtedy z obserwacji 3.2.17 istnieje funkcja $g \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N})$ taka, że $f = g$ na zbiorze $X \times Y \setminus Z$ i $\mu \otimes \nu(Z) = 0$. Z dowodu punktu (1) wynika wtedy, że $\nu(Z_x) = 0$ dla μ-p.w. $x \in X$, czyli $g_x = f_x$ dla $x \notin Z_x$, co daje nam $f_x \in \mathcal{M}(Y, \nu)$ dla μ-p.w. $x \in X$. □

Twierdzenie 3.2.19. *Mamy $\mathfrak{L}_{n+m} = \overline{\mathfrak{L}_n \otimes \mathfrak{L}_m}$ oraz $\mathcal{L}^{n+m} = \overline{\mathcal{L}^n \otimes \mathcal{L}^m}$. Ponadto jeżeli $C \in \mathfrak{L}_{n+m}$, to $C_x \in \mathfrak{L}_m$ dla $\mathcal{L}^n$-p.w. $x \in \mathbb{R}^n$ oraz $C^y \in \mathfrak{L}_n$ dla $\mathcal{L}^m$-p.w. $y \in \mathbb{R}^m$.*

Dowód. Z obserwacji 3.2.5 wiemy, że $\mathfrak{L}_n \otimes \mathfrak{L}_m \subset \mathfrak{L}_{n+m}$, czyli $\overline{\mathfrak{L}_n \otimes \mathfrak{L}_m} \subset \mathfrak{L}_{n+m}$. Teraz wykażemy inkluzję przeciwną.

Zauważmy, że miary $\mathcal{L}^{n+m}$ i $\mathcal{L}^n \otimes \mathcal{L}^m$ są borelowskie, niezmiennicze względem przesunięć i przyjmują te same wartości na kostkach $n+m$-wymiarowych. Z twierdzenia 1.8.3 wynika, że $\mathcal{L}^{n+m} = \mathcal{L}^n \otimes \mathcal{L}^m$ na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$. Niech teraz $Q \in \mathfrak{L}_{n+m}$, wtedy, korzystając z twierdzenia 1.7.8, mamy

$$Q = B_1 \cup C_1,\ B_1 - \text{typu } F_\sigma,\ B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}),\ \mathcal{L}^{n+m}(C_1) = 0;$$
$$Q = B_2 \setminus C_2,\ B_2 - \text{typu } G_\delta,\ B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}),\ \mathcal{L}^{n+m}(C_2) = 0.$$

Z powyższych równości wynika, że $B_1 \subset Q \subset B_2$, $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$ i $\mathcal{L}^{n+m}(B_2 \setminus B_1) = 0$. Zatem

$$\mathcal{L}^n \otimes \mathcal{L}^m(B_2 \setminus B_1) = \mathcal{L}^{n+m}(B_2 \setminus B_1) = 0,$$

czyli $Q \in \overline{\mathfrak{L}_n \otimes \mathfrak{L}_m}$. Ponadto

$$\overline{\mathcal{L}^n \otimes \mathcal{L}^m}(Q) = \mathcal{L}^n \otimes \mathcal{L}^m(B_1) = \mathcal{L}^{n+m}(B_1) = \mathcal{L}^{n+m}(Q).$$

Tak więc $\mathcal{L}^{n+m} = \overline{\mathcal{L}^n \otimes \mathcal{L}^m}$ na $\mathfrak{L}_{n+m}$, z czego wynika, że $\mathfrak{L}_{n+m}$ jest uzupełnieniem σ-algebry $\mathfrak{L}_n \otimes \mathfrak{L}_m$ względem miary $\mathcal{L}^n \otimes \mathcal{L}^m$.

Punkt (2) wynika z obserwacji 3.2.18. □

Uwaga 3.2.20. Jeżeli miary μ i ν są zupełne i σ-skończone to zasada Cavaleriego, twierdzenie Tonellego i twierdzenie Fubiniego pozostają prawdziwe, gdy przestrzeń mierzalną $(X \times Y, \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}, \mu \otimes \nu)$ zastąpimy jej uzupełnieniem $(X \times Y, \overline{\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}}, \overline{\mu \otimes \nu})$.

Uwaga 3.2.21. Twierdzenie Tonellego i twierdzenie Fubiniego pozostają prawdziwe dla funkcji $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, gdzie $A \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}$ (lub $A \in \overline{\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{N}}$).

3.3 Różniczkowanie miar

W tym podrozdziale będziemy zawsze zakładali, że μ i ν są miarami nieujemnymi, określonymi na przestrzeni mierzalnej $(X, \mathfrak{M})$.

Obserwacja 3.3.1. *Jeżeli $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{M})$, to miara ν zadana wzorem*

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu,\ A \in \mathfrak{M}$$

spełnia warunek

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0. \tag{3.3.1}$$

Dowód. Z twierdzenia 2.2.11 wiemy, że ν jest miarą. Jeżeli $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{M})$, to istnieje ciąg funkcji prostych mierzalnych $f_n \nearrow f$, $f_n = \sum_{j=1}^{k(n)} a_j^n \chi_{A_j^n}$. Jeżeli $A \in \mathfrak{M}$, $\mu(A) = 0$, to

$$\nu(A) = \int_A f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k(n)} a_j^n \mu(A_j^n \cap A) = 0. \qquad \square$$

Naszym celem jest udowodnienie twierdzenia odwrotnego do obserwacji 3.3.1, czyli do znalezienia charakteryzacji wszystkich miar spełniających warunek (3.3.1).

Definicja 3.3.2. 1. Mówimy, że miara ν jest *absolutnie ciągła względem miary* μ, (piszemy $\nu \ll \mu$), gdy

$$\forall\, A \in \mathfrak{M} : \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0.$$

2. Mówimy, że miara μ jest *skupiona* na zbiorze $A \in \mathfrak{M}$, gdy

$$\forall\, B \in \mathfrak{M} : \mu(B) = \mu(A \cap B).$$

3. Mówimy, że miara ν jest *osobliwa względem miary* μ (piszemy $\nu \perp \mu$), gdy istnieją zbiory $A, B \in \mathfrak{M}$, $A \cap B = \emptyset$ takie, że μ jest skupiona na A i ν jest skupiona na B.

4. Jeżeli miary μ i ν są związane wzorem $\nu(A) = \int_A f\,d\mu$, dla $A \in \mathfrak{M}$, to funkcję $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathfrak{M})$ nazywamy *gęstością miary ν względem miary μ* lub *pochodną Radona*[5]*–Nikodyma*[6] i piszemy $\nu = f\mu (d\nu = f d\mu)$ lub $f = \frac{d\nu}{d\mu}$.

Obserwacja 3.3.3. *Niech μ, ν, ν_1, ν_2 będą miarami na $(X, \mathfrak{M})$. Wtedy*

1. *$\nu \perp \mu$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zbiór $C \in \mathfrak{M}$ taki, że $\mu(C) = 0$ i $\nu(C') = 0$;*
2. *jeżeli $\nu \perp \mu$, to $\mu \perp \nu$;*
3. *jeżeli $\nu_1 \perp \mu$ i $\nu_2 \perp \mu$, to $(\nu_1 + \nu_2) \perp \mu$;*
4. *jeżeli $\nu_1 \ll \mu$ i $\nu_2 \ll \mu$, to $(\nu_1 + \nu_2) \ll \mu$;*
5. *jeżeli $\nu_1 \ll \mu$ i $\nu_2 \perp \mu$, to $\nu_1 \perp \nu_2$;*
6. *jeżeli $\nu \ll \mu$ i $\nu \perp \mu$, to $\nu = 0$.*

Dowód. Punkt (1). Jeżeli istnieje zbiór $C \in \mathfrak{M}$ taki, że $\mu(C) = 0$ i $\nu(C') = 0$, to μ jest skupiona na C' i ν jest skupiona na C. I odwrotnie gdy istnieją zbiory $A, B \in \mathfrak{M}$, $A \cap B = \emptyset$ takie, że μ jest skupiona na A i ν jest skupiona na B, to można przyjąć $C = B$.

Punkt (2) wynika z symetrii warunku z punktu (1).

Punkt (3). Załóżmy, że istnieją zbiory $A, B \in \mathfrak{M}$: $\mu(A) = 0$, $\nu_1(A') = 0$ i $\mu(B) = 0$, $\nu_2(B') = 0$. Niech $C = A \cup B$ wtedy mamy $\mu(C) = \mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B) = 0$ oraz $C' = A' \cap B'$ i wtedy $\nu_1(C') + \nu_2(C') \le \nu_1(A') + \nu_2(B') = 0$, czyli $(\nu_1 + \nu_2) \perp \mu$.

Punkt (4). Jeżeli $A \in \mathfrak{M}$ jest taki, że $\mu(A) = 0$, $\nu_1(A) = 0$ i $\nu_2(A) = 0$, to wtedy $\nu_1(A) + \nu_2(A) = 0$, czyli $(\nu_1 + \nu_2) \ll \mu$.

Punkt (5). Jeżeli istnieje zbiór $C \in \mathfrak{M}$ taki, że $\mu(C) = 0$ i $\nu_2(C') = 0$ i wtedy $\nu_1(C) = 0$, czyli $\nu_1 \perp \nu_2$.

Punkt (6). Z punktu (5) wynika, że $\nu \perp \nu$, a wtedy to $\nu = 0$. $\square$

Ćwiczenie 3.3.4. Mamy $\mathcal{L}^1|_{[0,1]} \perp \mathcal{L}^1|_{[2,3]}$ oraz $\mathcal{L}^1 \perp \delta_0$.

Twierdzenie 3.3.5. *Załóżmy, że miary μ, λ są miarami σ-skończonymi.*

1. **(Rozkład Lebesgue'a)** *Istnieje dokładnie jedna para miar λ_a i λ_o taka, że*

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_o,\ \ \lambda_a \ll \mu,\ \ \lambda_o \perp \mu.$$

[5] Johann Karl August Radon (1887-1956) – austriacki matematyk.
[6] Otto Marcin Nikodym (1887-1974) – polski matematyk.

2. **(Twierdzenie Radona–Nikodyma)** *Istnieje dokładnie jedna funkcja $f \in \mathcal{M}^+(X,\mu)$ (z dokładnością μ-p.w.) taka, że*
$$\forall\, E \in \mathfrak{M} : \lambda_a(E) = \int_E f\, d\mu.$$
Ponadto, jeżeli $\lambda(X) < +\infty$, to $f \in L^1(X,\mu)$.

Zanim podamy dowód twierdzenia 3.3.5 przypomnimy kilka faktów dotyczących przestrzeni Hilberta[7].

Uwaga 3.3.6. Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą. Zdefiniujmy normę

$$\|f\|_2 := \left(\int_X |f|^2\, d\mu \right)^{\frac{1}{2}},$$

przestrzeń
$$L^2(X,\mu) := \{ f \in \mathcal{M}(X) : \|f\|_2 < +\infty \}$$
i relację równoważności w tej przestrzeni

$$f \sim g \iff f = g\ \mu - \text{p.w.}$$

Wtedy $L^2(X,\mu)/\!\sim$ jest przestrzenią wektorową oznaczaną również przez $L^2(X,\mu)$.
Przestrzeń $L^2(X,\mu)$ jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$\langle f, g\rangle = \int_X fg\, d\mu.$$

W dowolnej przestrzeni Hilberta z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zachodzi

- nierówność Schwarza[8]: *dla dowolnych $x, y \in H$ mamy*
$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|, \text{ gdzie } \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$
- twierdzenie Riesza[9]: *dla dowolnego ciągłego funkcjonału liniowego*[10] *L na H istnieje dokładnie jeden $y \in H$ taki, że*
$$L(x) = \langle x, y\rangle.$$

Teraz udowodnimy twierdzenie 3.3.5.

Dowód. (**von Neumanna**[11])
Jednoznaczność rozkładu Lebesgue'a.
Niech $\lambda = \lambda_a + \lambda_o = \lambda'_a + \lambda'_o$, wtedy $\lambda_a - \lambda'_a = \lambda'_s - \lambda_s$ oraz

$$\lambda_a - \lambda'_a \ll \mu \text{ i } \lambda'_o - \lambda_o \perp \mu,$$

czyli z obserwacji 3.3.3 mamy $\lambda_a - \lambda'_a = \lambda'_o - \lambda_o = 0$.
Istnienie rozkładu i pochodnej Radona–Nikodyma.
I. Załóżmy na początek, że miary μ i λ są skończone.
Niech $\varphi = \mu + \lambda$ będzie miarą dodatnią. Zauważmy, że

$$\int_X f\, d\varphi = \int_X f\, d\lambda + \int_X f\, d\mu,$$

co można łatwo sprawdzić najpierw dla $f = \chi_E$, potem dla $f \in \mathcal{M}_0^+$ i w końcu dla $f \in \mathcal{M}^+$. Jeżeli funkcja $f \in L^2(X,\varphi)$, to z nierówności Schwarza otrzymujemy

$$\left| \int_X f\, d\lambda \right| \leq \int_X |f|\, d\lambda \leq \int_X |f|\, d\varphi \leq \left(\int_X |f|^2\, d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} (\varphi(X))^{\frac{1}{2}}.$$

[7] David Hilbert (1862-1943) – niemiecki matematyk.
[8] Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) – matematyk niemiecki.
[9] Frigyes Riesz (1880-1956) – węgierski matematyk.
[10] tzn. $L : H \to \mathbb{R}$ jest liniowe i istnieje $C > 0$ takie, że dla dowolnego $x \in H$ mamy $\|L(x)\| \leq C\|x\|$.
[11] John von Neumann (1903-1957) – węgierski matematyk.

Ponieważ $\varphi(X) < +\infty$, to odwzorowanie

$$f \mapsto \int_X f \, d\lambda$$

jest funkcjonałem ciągłym na $L^2(X, \varphi)$. Zatem z twierdzenia Riesza istnieje dokładnie jedna funkcja $g \in L^2(X, \varphi)$ (g jest określona φ-p.w.) taka, że

$$\forall\, f \in L^2(X, \varphi) : \int_X f \, d\lambda = \int_X fg \, d\varphi. \tag{3.3.2}$$

Dla $E \in \mathfrak{M}$, $\varphi(E) > 0$ i $f = \chi_E$ mamy z równości (3.3.2)

$$\lambda(E) = \int_X f \, d\lambda = \int_E g \, d\varphi,$$

a więc

$$0 \le \frac{1}{\varphi(E)} \int_E g \, d\varphi \le \frac{1}{\lambda(E)} \int_E g \, d\varphi = 1.$$

Stąd wnioskujemy, że $g(x) \in [0, 1]$ dla φ-p.w. $x \in X$. Aby to wykazać weźmy odcinek $(a - r, a + r) \subset \mathbb{R} \setminus [0, 1]$. Wystarczy pokazać, że $\varphi(E) = 0$, gdzie $E = g^{-1}((a - r, a + r))$. Gdyby $\varphi(E) > 0$, to

$$\left| \frac{1}{\varphi(E)} \int_E g \, d\varphi - a \right| = \frac{1}{\varphi(E)} \left| \int_E (g - a) \, d\varphi \right| \le \frac{1}{\varphi(E)} \int_E |g - a| \, d\varphi \le \frac{1}{\varphi(E)} \int_E r \, d\varphi = r,$$

czyli $\frac{1}{\varphi(E)} \int_E g \, d\varphi \notin [0, 1]$. Możemy teraz poprawić funkcję g na zbiorze miary zero tak, aby otrzymać

$$\forall\, x \in [0, 1] : 0 \le g(x) \le 1.$$

Równość (3.3.2) możemy napisać w postaci

$$\forall\, f \in L^2(X, \varphi) : \int_X f \, d\lambda = \int_X fg \, d\varphi = \int_X fg \, d\mu + \int_X fg \, d\lambda,$$

czyli

$$\forall\, f \in L^2(X, \varphi) : \int_X (1 - g) f \, d\lambda = \int_X fg \, d\mu. \tag{3.3.3}$$

Zdefiniujmy zbiory

$$A := \{x \in X : 0 \le g(x) < 1\} \text{ oraz } B := \{x \in X : g(x) = 1\},$$

a wtedy mamy

$$\forall\, E \in \mathfrak{M} : \lambda_a(E) := \lambda(A \cap E) \text{ oraz } \lambda_o(E) := \lambda(B \cap E).$$

Biorąc $f = \chi_B$ w równości (3.3.3) mamy

$$0 = \int_B (1 - g) \, d\lambda = \int_X (1 - g)\chi_B \, d\lambda = \int_X g\chi_B \, d\mu = \int_X \chi_B \, d\mu = \mu(B),$$

czyli $\mu(B) = 0$, a więc $\lambda_o \perp \mu$.

Ponieważ funkcja g jest ograniczona, to do równości (3.3.3) można podstawić funkcję $f = (1 + g + \cdots + g^n)\chi_E$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $E \in \mathfrak{M}$. Wtedy otrzymujemy

$$\int_E (1 - g^{n+1}) \, d\lambda = \int_E g(1 + g + \cdots + g^n) \, d\mu. \tag{3.3.4}$$

Dla $x \in B$ mamy $g(x) = 1$ i wtedy $1 - g(x)^{n+1} = 0$ oraz dla $x \in A$ mamy $g^{n+1}(x) \nearrow 0$, $n \to \infty$. Zatem przy $n \to \infty$ dostajemy

$$\int_E (1 - g^{n+1}) \, d\lambda = \int_{E \cap B} (1 - g^{n+1}) \, d\lambda + \int_{E \cap A} (1 - g^{n+1}) \, d\lambda \to \int_{E \cap A} 1 \, d\lambda = \lambda(E \cap A) = \lambda_a(E).$$

Ponadto $g(1 + g + \cdots + g^n) \nearrow \frac{g}{1-g} = h \in \mathcal{M}^+(X)$ ($h = +\infty$ na zbiorze miary zero B). Z twierdzenia o zbieżności monotonicznej mamy

$$\int_E g(1 + g + \cdots + g^n) \, d\mu \to \int_E h \, d\mu, \; n \to \infty,$$

czyli

$$\lambda_a(E) = \int_E h\, d\mu.$$

Biorąc $E = X$ mamy

$$+\infty > \lambda_a(X) = \int_X h\, d\mu$$

czyli $h \in L^1(X,\mu)$ i $\lambda_a \ll \mu$.

II. Załóżmy, że μ jest σ-skończona i λ jest skończona.

Wtedy istnieją zbiory rozłączne mierzalne X_n takie, że $\mu(X_n) < +\infty$ i $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Stosujemy punkt I do miar na zbiorze X_n. Dostajemy rozkład miar $\lambda(E \cap X_n)$, które w sumie dają rozkład miary λ. Otrzymujemy również funkcje h_n na X_n, które definiują funkcję h na X ($x \in X_n$ to $h(x) = h_n(x)$). Ponieważ $\lambda(X) < +\infty$, $h \in L^1(X,\mu)$.

III. Załóżmy, że miary μ i λ są σ-skończone.

Powtarzamy rozumowanie z punktu *II*. Wtedy tylko funkcja h nie musi być całkowalna.

Jednoznaczność pochodnej Radona–Nikodyma.

Załóżmy, że istnieją dwie funkcje h_1 i h_2 takie, że

$$\forall\, E \in \mathfrak{M}: \ \lambda_a(E) = \int_E h_1\, d\mu = \int_E h_2\, d\mu.$$

Jeżeli λ jest skończona, to $h_1, h_2 \in L^1(X,\mu)$ i wtedy

$$\forall\, E \in \mathfrak{M}: \ \int_E (h_1 - h_2)\, d\mu = 0,$$

czyli $h_1 = h_2$ μ-p.w.

Jeżeli λ jest σ-skończona, to wtedy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy $h_1 = h_2$ μ-p.w. na zbiorze X_n, z czego wynika, że $h_1 = h_2$ μ-p.w. □

Twierdzenie Radona–Nikodyma nie jest prawdziwe dla miar, które nie są σ-skończone.

Przykład 3.3.7. Niech μ będzie miarą liczącą na $\mathbb{R}$. Wtedy mamy $\mathcal{L}^1 \ll \mu$, ale nie istnieje funkcja f taka, że $\mathcal{L}^1 = f\,\mu$. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że taka funkcja istnieje. Wtedy można znaleźć $x \in \mathbb{R}$ taki, że $f(x) > 0$ i otrzymać

$$0 < f(x) = f(x)\mu(\{x\}) = \int_{\{x\}} f\, d\mu = \mathcal{L}^1(\{x\}) = 0.$$

3.4 Nierówności całkowe

Przypomnijmy, że $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ jest *funkcją wypukłą*, gdy

$$\forall\, x, y \in (a,b)\ \forall\, t \in [0,1]: \ \varphi((1-t)x + ty) \le (1-t)\varphi(x) + t\varphi(y),$$

lub równoważnie

$$\forall\, a < s < t < u < b: \ \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \le \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t}.$$

Funkcje wypukłe są ciągłe, z czego wynika, że złożenie funkcji mierzalnej z funkcją wypukłą jest funkcją mierzalną.

Twierdzenie 3.4.1. (Nierówność Jensena[12]) *Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą probabilistyczną. Jeżeli $f \in L^1(X,\mu)$, $a < f(x) < b$ i $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą, to*

$$\varphi\left(\int_X f\, d\mu\right) \le \int_X \varphi \circ f\, d\mu.$$

Dowód. Zauważmy, że $\varphi \circ f$ jest funkcją mierzalną. Niech $t = \int_X f\, d\mu \in (a,b)$. Przyjmijmy

$$\beta = \sup_s \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s},$$

[12] Johan Jensen (1859-1925) – duński matematyk.

wtedy

$$\beta \leq \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}, \text{ czyli } \varphi(u) \geq \varphi(t)+\beta(u-t),\ u>t$$

i analogicznie

$$\beta \geq \frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}, \text{ czyli } \varphi(s) \geq \varphi(t)+\beta(s-t),\ s<t.$$

Zatem dla $s=f(x)$ mamy

$$\varphi(f(x))-\varphi(t)-\beta(f(x)-t) \geq 0$$

i wtedy

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_X \varphi(f(x))\,d\mu - \int_X \varphi(t)\,d\mu - \beta\int_X f\,d\mu + t\beta\int_X d\mu \\ &= \int_X \varphi(f(x)) - \varphi(t) = \int_X \varphi(f(x)) - \varphi\left(\int_X f\,d\mu\right). \quad \square \end{aligned}$$

Twierdzenie 3.4.2. (Nierówność Höldera) *Niech $p,q \in (1,+\infty)$ będą wykładnikami sprzężonymi, tzn. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Niech $(X,\mathfrak{M},\mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą i niech $f,g \in \mathcal{M}^+(X)$. Wówczas*

$$\int_X fg\,d\mu \leq \left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dowód. Oznaczmy

$$A=\left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}},\ B=\left(\int_X g^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Jeżeli $A=0$, to $f=0$ μ-p.w., a wtedy $fg=0$ μ-p.w. i mamy tezę.

Jeżeli $A>0$ i $B=+\infty$, to też mamy tezę.

Możemy więc założyć, że $A,B \in (0,+\infty)$. Zdefiniujmy nowe funkcje $F=\frac{f}{A}$ i $G=\frac{g}{B}$, wówczas

$$\int_X F^p\,d\mu = \int_X G^q\,d\mu = 1.$$

Jeżeli $x \in X$ jest taki, że $F(x),G(x) \in (0,+\infty)$, to istnieją liczby $s,t \in \mathbb{R}$ takie, że $F(x)=e^{\frac{s}{p}}$ i $G(x)=e^{\frac{t}{q}}$. Ponieważ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, to korzystając z wypukłości funkcji $x \mapsto e^x$ mamy

$$e^{\frac{s}{p}+\frac{t}{q}} \leq \frac{1}{p}e^s+\frac{1}{q}e^t.$$

Stąd dla dowolnego $x \in X$ otrzymujemy

$$F(x)G(x) \leq \frac{1}{p}F(x)^p+\frac{1}{q}G(x)^q.$$

Całkując powyższą nierówność dostajemy

$$\int_X FG\,d\mu \leq \int_X \frac{1}{p}F^p\,d\mu + \int_X \frac{1}{q}G^q\,d\mu = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

a stąd

$$\int_X fg\,d\mu \leq AB = \left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}. \quad \square$$

Twierdzenie 3.4.3. (Nierówność Minkowskiego[13]) *Niech $p \in (1,+\infty)$, $(X,\mathfrak{M},\mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą i niech $f,g \in \mathcal{M}^+(X)$. Wówczas*

$$\left(\int_X (f+g)^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

[13]Hermann Minkowski (1864-1909) – niemiecki matematyk.

Dowód. Zauważmy, że $(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$ i z nierówności Höldera mamy (dla $q = \frac{p-1}{p}$)

$$\begin{aligned} &\int_X f(f+g)^{p-1}\,d\mu \le \left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X (f+g)^{(p-1)q}\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X (f+g)^p\,d\mu\right)^{\frac{p}{p-1}} \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

i podobnie

$$\int_X g(f+g)^{p-1}\,d\mu \le \left(\int_X g^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X (f+g)^p\,d\mu\right)^{\frac{p}{p-1}}. \tag{3.4.2}$$

Z nierówności (3.4.1) i (3.4.2) otrzymujemy

$$\int_X (f+g)^p\,d\mu \le \left(\left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\int_X (f+g)^p\,d\mu\right)^{\frac{p}{p-1}}. \tag{3.4.3}$$

Zauważmy, że nierówność Minkowskiego wystarczy wykazać dla lewej strony dodatniej, a prawej skończonej. Z wypukłości funkcji $x \mapsto x^p$ mamy poniższą nierówność

$$\left(\frac{f+g}{2}\right)^p \le \frac{1}{2}\left(f^p + g^p\right),$$

z czego wynika, że jeżeli prawa strona nierówności Minkowskiego jest skończona, to lewa też jest skończona i można podzielić nierówność (3.4.3) i otrzymać tezę. □

3.5 Przestrzenie L^p

W tym podrozdziale będziemy zakładać, że $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną z miarą. Niech $p, q \in [1, +\infty]$ będą wykładnikami sprzężonymi tzn. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q \in (0, +\infty)$. Przyjmujemy, że 1 i $+\infty$ są również parą wykładników sprzężonych.

Definicja 3.5.1. Dla $f \in \mathcal{M}(X)$ zdefiniujmy

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}},\ p \in (0, +\infty),$$

oraz *istotny kres górny*

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f| = \inf\{c \ge 0 : |f(x)| \le c \text{ dla } \mu\text{-p.w. } x \in X\}.$$

Zdefiniujmy następujące przestrzenie dla $p \in (0, +\infty]$

$$L^p(X, \mu) := \{f \in \mathcal{M}(X) : \|f\|_p < +\infty\}.$$

Twierdzenie 3.5.2. *Jeżeli $p, q \in [1, +\infty]$ są wykładnikami sprzężonymi, $f \in L^p(X,\mu)$, $g \in L^q(X,\mu)$, to $fg \in L^1(X,\mu)$ oraz*

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

Dowód. Dla $p \in (1, +\infty)$ teza wynika z nierówności Höldera. Dla $p = +\infty$ mamy

$$|f(x)g(x)| \le \|f\|_\infty |g(x)| \ \text{ dla } \mu\text{-p.w. } x \in X,$$

całkując powyższą nierówność dostajemy tezę. Przypadek $p = 1$ jest analogiczny. □

Twierdzenie 3.5.3. *Niech $p \in [1, +\infty]$. Jeżeli $f, g \in L^p(X,\mu)$, to $f + g \in L^p(X,\mu)$ oraz*

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Dowód. Dla $p \in (1, +\infty)$ teza wynika z nierówności Minkowskiego. Dla $p = 1$ lub $p = +\infty$ teza wynika z nierówności trójkąta $|f+g| \le |f| + |g|$. □

Definicja 3.5.4. W przestrzeniach $L^p(X,\mu)$ dla $p \in (0,+\infty]$ zdefiniujmy relację równoważności

$$f \sim g \iff f = g \quad \mu\text{-p.w.}$$

Wtedy $L^p(X,\mu)/\sim$ jest przestrzenią wektorową oznaczaną również przez $L^p(X,\mu)$. Dla $[f] \in L^p(X,\mu)/\sim$ przyjmujemy $\|\,[f]\,\|_p = \|f\|_p$.

Obserwacja 3.5.5. *Dla $p \in [1,+\infty]$ funkcja $\|\cdot\|_p$ jest normą w przestrzeni $L^p(X,\mu)$. Ponadto dla $p = 2$ norma $\|\cdot\|_2$ pochodzi od iloczynu skalarnego*

$$\langle f, g\rangle = \int_X fg\,d\mu.$$

Dowód. Jedyną trudnością jest nierówność trójkąta, która wynika z twierdzenia 3.5.3. □

Ćwiczenie 3.5.6. Funkcja $\|\cdot\|_p$, dla $p \in (0,1)$ nie jest normą (nie spełnia warunku trójkąta).

Przypomnijmy, że przestrzeń unormowana $(X,\|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha[14], gdy jest przestrzenią zupełną w normie $\|\cdot\|$, tzn. wszystkie ciągi Cauchy'ego[15] w normie $\|\cdot\|$ są zbieżne. Przestrzeń Hilberta to przestrzeń Banacha z normą zadaną przez iloczyn skalarny.

Twierdzenie 3.5.7. *Niech $p \in [1,+\infty]$. Wtedy $L^p(X,\mu)$ jest przestrzenią Banacha z normą $\|\cdot\|_p$, a dla $p = 2$ jest przestrzenią Hilberta.*

Dowód. Wystarczy wykazać, że przestrzeń $L^p(X,\mu)$ jest zupełna.

Przypadek $p \in [1,+\infty)$.

Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $L^p(X,\mu)$. Wtedy istnieje podciąg $\{f_{n_i}\}$ taki, że

$$\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p < \frac{1}{2^i},\ i \in \mathbb{N}. \tag{3.5.1}$$

Niech

$$g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \text{ oraz } g = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|.$$

Z nierówności Minkowskiego i nierówności (3.5.1) dostajemy $\|g_k\|_p < 1$. Zauważmy, że $g_k^p \nearrow g^p$, $k \to \infty$, a z twierdzenia o zbieżności monotonicznej mamy $\|g\|_p \le 1$. Z tego wynika, że $g < +\infty$ μ=p.w., zatem szereg

$$f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x) \text{ jest zbieżny } \mu\text{-p.w. do funkcji } f(x).$$

Przyjmijmy $f(x) = 0$ dla x takich, że powyższy szereg jest rozbieżny. Ponieważ

$$f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{k} f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x) = f_{n_k}(x), \text{ to } \lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x) = f(x)\ \mu - \text{p.w.}$$

Musimy wykazać, że f jest granicą ciągu f_{n_i} w normie $\|\cdot\|_p$. Ustalmy dowolny $\epsilon > 0$, wtedy istnieje $N \in \mathbb{N}$ taki, że dla dowolnych $n, m > N$ mamy $\|f_n - f_m\|_p < \epsilon$. Z lematu Fatou (lemat 2.2.4)

$$\int_X |f - f_m|^p\,d\mu \le \liminf_{n_i\to\infty} \int_X |f_{n_i} - f_m|^p\,d\mu \le \epsilon^p,$$

czyli $f - f_m \in L^p(X,\mu)$ i $f = (f - f_m) + f_m \in L^p(X,\mu)$ oraz $\|f - f_m\|_p \to 0$, $m \to \infty$.

Przypadek $p = +\infty$.

Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $L^\infty(X,\mu)$. Zdefiniujmy zbiory dla $k, n, m \in \mathbb{N}$

$$A_k = \{x \in X : |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\} \text{ oraz } M_{n,m} = \{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}.$$

Wówczas $\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{k,n,m=1}^{\infty}(A_k \cup M_{n,m})\right) = 0$, a ciąg f_n jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji f ograniczonej na dopełnieniu zbioru E. Przyjmijmy $f(x) = 0$, $x \in E$. Wtedy $f \in L^\infty(X,\mu)$ oraz $\|f - f_m\|_\infty \to 0$, $m \to \infty$. □

[14] Stefan Banach (1892-1945) – polski matematyk.
[15] Augustin Louis Cauchy (1789-1857) – francuski matematyk.

Twierdzenie 3.5.8. *Jeżeli $p \in [1, +\infty]$, $\{f_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni $L^p(X)$ zbieżnym do funkcji f, to ciąg $\{f_n\}$ zawiera podciąg $\{f_{n_i}\}$ zbieżny μ-p.w. do f.*

Dowód. Wynika z dowodu twierdzenia 3.5.7. □

Obserwacja 3.5.9. *Jeżeli $p \in [1, +\infty]$, to zbiór*

$$S = \{f \in \mathcal{M}_0(X) : \mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) < +\infty\}$$

jest gęsty w przestrzeni $L^p(X, \mu)$.

Dowód. Zauważmy, że $S \subset L^p(X, \mu)$. Wystarczy wykazać tezę dla funkcji dodatnich. Niech $f \geq 0$, $f \in L^p(X, \mu)$ wtedy istnieje ciąg rosnących funkcji prostych mierzalnych $f_n \in \mathcal{M}_0^+(X)$, $0 \leq f_n \nearrow f$, z czego wynika, że $f_n \in L^p(X, \mu) \cap S$. Wtedy

$$|f_n - f|^p \leq |f_n|^p + |f|^p \leq 2|f|^p$$

i z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej (twierdzenie 2.2.7) wynika, że $\|f_n - f\|_p \to 0$, $n \to \infty$, czyli f należy do domknięcia S w przestrzeni $L^p(X, \mu)$. □

3.6 Zadania

Zadanie 3.6.1. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\int_A x^2\left(1+\frac{y^3}{n}\right)\,d\mathcal{L}^2(x,y),$$

gdzie $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x-1)^2+y^2\le 4, y\ge 1\}$. Uzasadnić istnienie granicy.

Zadanie 3.6.2. Obliczyć

$$(\mathcal{L}^1|_{[0,\infty)}+\delta_{-1})\otimes(\mathcal{L}^1|_{[-1,1]}+\nu)(A_1\setminus A_2),$$

gdzie $A_1=[-2,0)\times[-2,0]$ oraz $A_2=(-1,1)\times(-1,1)$, a ν oznacza miarę borelowską, określoną wzorem $\nu(A)=\int_A e^x dL^1(x)$.

Zadanie 3.6.3. Niech $\mu=\mathcal{L}^1|_{[0,4]}$ i niech $f(x)=\chi_{[\frac{1}{2},1]}-3\chi_{[3,4]}$. Znaleźć μ_f - transport miary μ przez odwzorowanie f i obliczyć całkę

$$\int_{[-3,1]} x d\mu_f.$$

Zadanie 3.6.4. Obliczyć całkę

$$\int_A xy\ d(\mathcal{L}^1\otimes\delta_1),$$

gdzie δ_1 oznacza miarę Diraca w punkcie 1 i $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x>0,y>0,x+y<2\}$.

Zadanie 3.6.5. Obliczyć

$$\int_{[-1,2]} x d\mu(x),$$

gdzie

$$\mu=\sum_{k=1}^{\infty}k\delta_k+\nu,\quad \text{oraz}\quad \nu(A)=\int_A x^2 d\mathcal{L}^1(x),\ A\in\mathfrak{L}_1.$$

Zadanie 3.6.6. Obliczyć

$$\int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2<25\}}(x+y)^2 d((3\delta_{-4}+5\delta_4)\otimes\mathcal{L}^1)(x,y).$$

Zadanie 3.6.7. Obliczyć

$$(\mathcal{L}^1\otimes\delta_3)\Big([0,2]^2\cup[1,4]^2\Big).$$

Zadanie 3.6.8. Niech $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x\neq 0,\ |y|<2^{|x|}\}$, $f:\mathbb{R}^2\ni(x,y)\mapsto 3^{-|x|}\in\mathbb{R}$ i niech miara μ będzie dana wzorem $\mu=\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k\right)\otimes\mathcal{L}^1$. Obliczyć całkę

$$\int_A f\,d\mu.$$

Zadanie 3.6.9. W przestrzeni mierzalnej $(\mathbb{R}^2,\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ definiujemy miarę μ wzorem

$$\mu=\mathcal{L}^1\otimes\delta_{1/2}.$$

Obliczyć $\mu(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2<4\})$.

Zadanie 3.6.10. Niech μ będzie miarą probabilistyczną i borelowską na $[0,1]$, absolutnie ciągłą względem miary Lebesgue'a na $[0,1]$. Wykazać, że dla dowolnego zbioru borelowskiego funkcja $[0,1]\ni t\mapsto\mu([0,t]\cap A)$ jest ciągła.

Zadanie 3.6.11. Niech $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,(x-1)^2\le y+3\le 5\}$. Obliczyć całkę

$$\int_A xy^2 d(\mathcal{L}^1\otimes\delta_1)(x,y).$$

Zadanie 3.6.12. Obliczyć całkę

$$\int_A f d(\mathcal{L}^1\otimes\delta_4),$$

gdzie $f:\mathbb{R}^2\ni(x,y)\mapsto(x-y)^2\in\mathbb{R}$, a A jest trójkątem o wierzchołkach $(1,2)$, $(3,6)$, $(7,5)$.

Zadanie 3.6.13. Niech μ niech będzie miarą borelowską na $\mathbb{R}$, zdefiniowaną wzorem

$$\mu(A) = \int_{f^{-1}(A)} x^2 \, d\mathcal{L}^1(x),$$

gdzie $f : [1,2] \ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$. Obliczyć całkę $\int_{\mathbb{R}} (4x^2 - 3) d\mu(x)$.

Zadanie 3.6.14. Obliczyć całkę

$$\int_A (2x + y) \, d(\mathcal{L}^1 \otimes \delta_3)(x, y),$$

gdzie $A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 - 2xy + y^2 < 5\big\}$.

Zadanie 3.6.15. Obliczyć całkę

$$\int_A xy \, d(\mathcal{L}^1 \otimes \delta_1)(x, y),$$

gdzie $A = \{(x, y) \in [-1, 1] \times [-2, 2] \; : \; x + 1 \leq y\}$.

Zadanie 3.6.16. Sprawdzić, dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ funkcja

$$f_a : \mathbb{N} \ni n \mapsto f_a(n) = (2a - 5)^n \in \mathbb{R}$$

jest całkowalna względem miary μ określonej wzorem $\mu(A) = \sum_{n \in A} n/3^n$, $A \subset \mathbb{N}$. Obliczyć całkę $\int_{\mathbb{N}} f_3 \, d\mu$.

Bibliografia

[1] V. I. Bogachev, Measure Theory, Tom 1, Springer Science & Business Media, 2007.

[2] D. L. Cohn, Measure Theory, Birkhäuser, 1980.

[3] M. Jarnicki, Wykłady z Analizy Matematycznej,
`http://www2.im.uj.edu.pl/MarekJarnicki/lectures/analiza-3-4-full.pdf`.

[4] W. Kołodziej, Analiza matematyczna, PWN, Warszawa, 2018.

[5] S. Łojasiewicz, Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych, PWN, Warszawa, 1976.

[6] W. Rudin, Analiza rzeczywista i zespolona, PWN, Warszawa, 1986.

Indeks

A
algebra zbiorów, 2

C
całka
    funkcji, 36
        na zbiorze, 35
        nieujemnej, 34
        prostej, 32
    Riemanna, 41

D
dystrybuanta, 26

F
funkcja
    całkowalna, 36
        w sensie Riemanna, 41
    charakterystyczna zbioru, 8
    prosta mierzalna, 31
    σ-skończoną, 24
    schodkowa, 31

G
gęstość miary, 57

K
klasa monotoniczna, 4
konstrukcja Caratheodory'ego, 15

L
λ-układ, 5
lemat Fatou, 39

M
miara, 10
    absolutnie ciągła, 57
    Diraca, 10
    Hausdorffa $\mathcal{H}^p$, 22
    Jordana, 42
    Lebesgue'a $\mathcal{L}^n$, 18
    licząca, 10
    osobliwa, 57
    probabilistyczna, 10
    produktowa, 49
    regularna, 20
    σ-skończona, 18
    skupiona na zbiorze, 57
    zewnętrzna, 13
        Lebesgue'a, 17
        metryczna, 16
        regularna, 16
    zupełna, 12

N
nierówność
    Höldera, 61
    Jensena, 60
    Minkowskiego, 61
    Schwarza, 58

O
objętość kostki, 17
odwzorowanie
    borelowskie, 7
    mierzalne, 7

P
π-układ, 5
pierścień zbiorów, 2
pochodna Radona–Nikodyma, 57
przestrzeń
    L^p, 62
    mierzalna, 2, 10

R
rozkład
    kanoniczny funkcji prostej, 31
    Lebesgue'a, 57
równość prawie wszędzie, 26

S
σ-algebra, 2
    produktowa, 49
    zbiorów borelowskich, 7
suma aproksymacyjna
    Darboux, 41
    Riemanna, 41

T
transport miary, 48
twierdzenie
    Caratheodory'ego, 15
    Fubiniego, 54

graniczne, 38
Jegorowa, 46
Lebesgue'a, 39
o zbieżności ograniczonej, 40
Łuzina, 46
o istnieniu miary produktowej, 52
o klasie monotonicznej, 4
o rozszerzaniu miary, 24
o transporcie miary, 48
o wartości średniej, 37
o zamianie zmiennej, 49
Radona–Nikodyma, 57
Riesza, 58
Tonellego, 53

U

uzupełnienie miary, 12

W

wartość oczekiwana, 49
warunek
Höldera, 47
przeliczalnej addytywności, 10
skończonej addytywności, 10
skończonej subaddytywności, 10
wymiar Hausdorffa, 23

Z

zasada Cavaleriego, 53
zbiór
borelowski, 7
Cantora, 20
mierzalny, 2
w sensie Lebesgue'a, 18
mierzalny w sensie Jordana, 42
typu F_σ, 7
typu G_δ, 7
Vitalego, 20