Uniwersytet Jagielloński
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyki

Wykłady
z Analizy Matematycznej I, II, III, IV

Marek Jarnicki

(Wersja z 21 maja 2021)

Spis treści

Część I

Analiza Matematyczna I

ROZDZIAŁ 1

Wstęp

1.1. Symbolika logiczna

Podstawy logiki i teorii zbiorów są przedmiotem wykładu *„Elementy logiki i teorii mnogości”*. Z tego też powodu ograniczamy się poniżej do podstawowych definicji i oznaczeń.

Będziemy rozważać zdania, o których możemy zawsze stwierdzić, czy są prawdziwe, czy fałszywe. Z punktu widzenia logiki istotne jest wyłącznie to, czy dane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe. Fakt, iż zdanie p jest prawdziwe zapisujemy $p = 1$, zaś, gdy jest fałszywe piszemy $p = 0$. Jeżeli $p = 1$, to mówimy, że p ma wartość logiczną 1, jeżeli $p = 0$, to p ma wartość logiczną 0.

Zaprzeczenie (negację) zdania p oznaczamy $\sim p$. Oczywiście, $p = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sim p = 1$.

Parom zdań (p, q) możemy przy pomocy pewnych reguł (*funktorów*) przyporządkowywać nowe zdania. Podstawowe funktory to:

- *Alternatywa (suma logiczna)* $p \vee q$, inaczej oznaczana „lub”.
- *Koniunkcja (iloczyn logiczny)* $p \wedge q$, inaczej oznaczana „i”, lub samym przecinkiem.
- *Implikacja (wynikanie)* $p \Longrightarrow q$ (p nazywamy *poprzednikiem*, q nazywamy *następnikiem*).
- *Równoważność (wtedy i tylko wtedy)* $p \Longleftrightarrow q$.

Kwantyfikatory:

- *Kwantyfikator (duży) „dla każdego”* $\forall$, np. $\forall_{n\in\mathbb{N}} : n^2 \geqslant 0$.
- *Kwantyfikator (mały) „istnieje”* $\exists$, np. $\exists_{n\in\mathbb{N}} : n^2 = 4$.
- *Istnieje dokładnie jeden* $\exists!$, np. $\exists!_{n\in\mathbb{N}} : n^2 = 4$.

Przy pomocy funktorów i kwantyfikatorów możemy tworzyć bardziej skomplikowane zdania.

Prawa de Morgana (1) *dla kwantyfikatorów:*

$\sim(\forall_{x\in X} : W(x)) \iff \exists_{x\in X} : \sim W(x)$.

Przy definiowaniu nowych obiektów stosujemy następujące oznaczenia:

„:=” oznacza *równość z definicji*; *obiekt definiowany* := *obiekt definiujący*, np. $f(x) := x^2$, ale też $x^2 =: f(x)$;

„$:\Longleftrightarrow$” oznacza *równoważny z definicji,* np. $A \subset B :\Longleftrightarrow \forall_{x\in A} : x \in B$.

1.2. Zbiory

Pojęcia zbioru oraz należenia do zbioru są pierwotne i nie są definiowane. Zbiór pusty, tzn. zbiór, do którego nie należy żaden element, oznaczamy przez $\varnothing$.

• *Zawieranie (inkluzja) zbiorów:* $A \subset B :\Longleftrightarrow \forall_{x\in A} : x \in B$. Będziemy też pisać $A \supset B$, jeżeli $B \subset A$.

• *Równość zbiorów:* $A = B :\Longleftrightarrow A \subset B,\ B \subset A$. Będziemy pisać $A \subsetneq B$, jeżeli $A \subset B$ i $A \neq B$.

• *Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru (potęga zbioru)* X: $\mathcal{P}(X) := \{A : A \subset X\}$.

Jeżeli $X = \{1, 2\}$, to $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

$\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \dots$.

Jeżeli zbiór X ma N elementów, $X = \{x_1, \dots, x_N\}$, to zbiór $\mathcal{P}(X)$ ma 2^N elementów.

• *Suma zbiorów:* Jeżeli $A, B \subset X$, to $A \cup B := \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$. Jeżeli $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, to $\bigcup \mathcal{A} := \{x \in X : \exists_{A\in\mathcal{A}} : x \in A\}$.

• *Iloczyn (przecięcie) zbiorów:* Jeżeli $A, B \subset X$, to $A \cap B := \{x \in X : x \in A,\ x \in B\}$. Jeżeli $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, to $\bigcap \mathcal{A} := \{x \in X : \forall_{A\in\mathcal{A}} : x \in A\}$.

---

(1) Augustus De Morgan (1806–1871).

• *Różnica zbiorów:* Jeżeli $A, B \subset X$, to $A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$;

• *Dopełnienie zbioru A:* Jeżeli $A \subset X$, to $A^c := X \setminus A$.

Prawa de Morgana dla zbiorów:

Jeżeli $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, to $(\bigcup \mathcal{A})^c = \bigcap \mathcal{A}^c$, gdzie $\mathcal{A}^c := \{A^c : A \in \mathcal{A}\}$.

Analogicznie, $(\bigcap \mathcal{A})^c = \bigcup \mathcal{A}^c$.

• *Iloczyn kartezjański dwóch zbiorów:* Jeżeli $A, B \neq \varnothing$, to $A \times B := \{(x, y) : x \in A,\ y \in B\}$, gdzie $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Ponadto, $A \times B := \varnothing$ o ile $A = \varnothing$ lub $B = \varnothing$.

Ćwiczenie: Udowodnić, że $(x', y') = (x'', y'') \iff x' = x'',\ y' = y''$.

Jeżeli $A = B$, to zamiast $A \times A$ piszemy A^2.

• *Zbiory liczbowe:*

$\mathbb{N}$ — zbiór liczb naturalnych $1, 2, \dots$, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_k := \{n \in \mathbb{N} : n \geqslant k\}$ $(k \in \mathbb{N})$,

$\mathbb{Z}$ — zbiór liczb całkowitych,

$\mathbb{Q}$ — zbiór liczb wymiernych,

$\mathbb{R}$ — zbiór liczb rzeczywistych,

$\mathbb{C}$ — zbiór liczb zespolonych.

Oczywiście $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

• $A_* := A \setminus \{0\}$, np. $\mathbb{Q}_*$; $A_+ := \{x \in A : x \geqslant 0\}$, np. $\mathbb{Z}_+ (= \mathbb{N}_0)$; $A_{>0} := \{x \in A : x > 0\}$, np. $\mathbb{R}_{>0}$. Podobnie definiujemy A_-, $A_{<0}$.

1.3. Relacje

Definicja 1.3.1. *Relacją (dwuargumentową) w zbiorze* X nazywamy dowolny zbiór $R \subset X \times X$. Zamiast pisać $(x, y) \in R$ piszemy zwykle xRy. Relację R nazywamy *równoważnościową*, jeżeli:

(i) (*zwrotność*) $\forall_{x \in X} : xRx$,

(ii) (*symetryczność*) $\forall_{x,y \in X} : (xRy \Longrightarrow yRx)$,

(iii) (*przechodniość*) $\forall_{x,y,z \in X} : ((xRy,\ yRz) \Longrightarrow xRz)$.

Jeżeli $R \subset X \times X$ jest relacją równoważnościową, to dla dowolnego $x \in X$ definiujemy *klasę równoważności (abstrakcji) x względem R*

$$[x]_R := \{y \in X : xRy\}.$$

Rodzinę $X/R := \{[x]_R : x \in X\} \subset \mathcal{P}(X)$ nazywamy *przestrzenią ilorazową*.

Oczywiście, $x \in [x]_R$ oraz $[x]_R = [y]_R \iff xRy$ (Ćwiczenie).

Dla przykładu, jeżeli $X = \mathbb{Z}$, $xRy :\iff 2|(x - y)$, to $\mathbb{Z}/R = \{[0]_R,\ [1]_R\}$; $[0]_R$ to zbiór wszystkich liczb całkowitych parzystych, zaś $[1]_R$ — nieparzystych.

1.4. Odwzorowania

Definicja 1.4.1. Dane niech będą zbiory X oraz Y. Zbiór $f \subset X \times Y$ nazywamy *odwzorowaniem (funkcją)*, jeżeli $\forall_{x \in X}\ \exists!_{y \in Y} : (x, y) \in f$. Jeżeli $f \subset X \times Y$ jest odwzorowaniem, to piszemy $f : X \longrightarrow Y$. Zamiast pisać $(x, y) \in f$, piszemy $y = f(x)$. Jest to zgodne z tradycyjną definicją odwzorowania $f : X \longrightarrow Y$ jako przyporządkowania każdemu elementowi $x \in X$ pewnego elementu $y = f(x) \in Y$; $X \ni x \longmapsto f(x) \in Y$.

• Dla $A \subset X$ definiujemy *obraz A poprzez f* jako zbiór $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$. Jest widoczne, że dla $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ mamy $f(\bigcup \mathcal{A}) = \bigcup f(\mathcal{A})$, gdzie $f(\mathcal{A}) := \{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$, oraz $f(\bigcap \mathcal{A}) \subset \bigcap f(\mathcal{A})$.

Ćwiczenie: Znaleźć przykład funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ oraz zbiorów $A, B \subset \mathbb{R}$ takich, że $\varnothing = f(A \cap B) \subsetneq f(A) \cap f(B) \neq \varnothing$).

• Dla $B \subset Y$ definiujemy *przeciwobraz B poprzez f* jako zbiór $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$. Zamiast pisać $f^{-1}(\{b\})$ piszemy $f^{-1}(b)$. Jest widoczne, że dla $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ mamy $f^{-1}(\bigcup \mathcal{B}) = \bigcup f^{-1}(\mathcal{B})$, gdzie $f^{-1}(\mathcal{B}) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$, oraz $f^{-1}(\bigcap \mathcal{B}) = \bigcap f^{-1}(\mathcal{B})$.

• Jeżeli $f : X \longrightarrow Y$ oraz $g : Y \longrightarrow Z$, to odwzorowanie $g \circ f : X \longrightarrow Z$ dane wzorem $(g \circ f)(x) := g(f(x))$, $x \in X$, nazywamy*złożeniem odwzorowań f oraz g*.

Ćwiczenie: Składanie odwzorowań jest łączne, tzn. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

• Jeżeli $f : X \longrightarrow Y$, to dla $A \subset X$ określamy *zacieśnienie (zawężenie, restrykcję) odwzorowania f do A* jako odwzorowanie $f|_A : A \longrightarrow Y$ dane wzorem $f|_A(x) := f(x)$, $x \in A$.

• Jeżeli $f_j : X_j \longrightarrow Y$, $j = 1, 2$, oraz $f_1|_{X_1 \cap X_2} = f_2|_{X_1 \cap X_2}$, to odwzorowanie $f_1 \cup f_2 : X_1 \cup X_2 \longrightarrow Y$ dane wzorem $(f_1 \cup f_2)(x) := \begin{cases} f_1(x), & \text{gdy } x \in X_1 \\ f_2(x), & \text{gdy } x \in X_2 \end{cases}$ nazywamy *sklejeniem odwzorowań f_1 i f_2*. Ogólniej, jeżeli $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ oraz $f_A : A \longrightarrow Y$, $A \in \mathcal{A}$, są odwzorowaniami takimi, że $f_A|_{A \cap B} = f_B|_{A \cap B}$ dla dowolnych $A, B \in \mathcal{A}$, to definiujemy *sklejenie odwzorowań f_A, $A \in \mathcal{A}$*, jako odwzorowanie $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} f_A : \bigcup \mathcal{A} \longrightarrow Y$ dane wzorem $(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} f_A)(x) := f_A(x)$, $x \in A \in \mathcal{A}$.

• Jeżeli $f_j : X \longrightarrow Y_j$, $j = 1, \dots, N$, to odwzorowanie $(f_1, \dots, f_N) : X \longrightarrow Y_1 \times \dots \times Y_N$ dane wzorem $(f_1, \dots, f_N)(x) := (f_1(x) \dots, f_N(x))$ nazywamy *zestawieniem odwzorowań $f_1, \dots, f_N$*. Oczywiście, dla dowolnego odwzorowania $f : X \longrightarrow Y_1 \times \dots \times Y_N$ istnieją $f_j : X \longrightarrow Y_j$, $j = 1, \dots, N$ takie, że $f = (f_1, \dots, f_N)$.

• Jeżeli zbiór $f(X)$ jest jednopunktowy, to mówimy, że f jest *odwzorowaniem stałym*.

• Odwzorowanie $X \ni x \overset{\mathrm{id}_X}{\longmapsto} x \in X$ nazywamy *odwzorowaniem identycznościowym*. Niech $\mathrm{id}_{A,X} := \mathrm{id}_X|_A$, $A \subset X$.

Jeżeli $A \subset X$, to przez $\chi_{A,X} : X \longrightarrow \{0, 1\}$ oznaczamy *funkcję charakterystyczną zbioru A*,

$$\chi_{A,X}(x) := \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in A \\ 0, & \text{gdy } x \in X \setminus A \end{cases}.$$

Jeżeli zbiór X nie budzi wątpliwości, to będziemy pisać χ_A.

• Odwzorowanie $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy:

— *surjekcją*, jeżeli $Y = f(X)$;

— *injekcją (odwzorowaniem różnowartościowym)*, jeżeli dowolnych $x_1, x_2 \in X$ z tego, że $f(x_1) = f(x_2)$ wynika, że $x_1 = x_2$ (równoważnie: jeżeli $x_1 \neq x_2$, to $f(x_1) \neq f(x_2)$);

— *bijekcją*, jeżeli jest równocześnie injekcją i surjekcją.

• Dla bijekcji $f : X \longrightarrow Y$ definiujemy *odwzorowanie odwrotne (funkcję odwrotną)* $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ przy pomocy przepisu $f^{-1}(y) = x :\iff y = f(x)$. Innymi słowy: $f^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in f\}$.

• Ćwiczenie: Odwzorowanie $f : X \longrightarrow Y$ jest bijekcją wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie $g : Y \longrightarrow X$ takie, że $g \circ f = \mathrm{id}_X$ oraz $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

• Ćwiczenie: Jeżeli $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow Z$ są injekcjami (odp. surjekcjami, bijekcjami), to $g \circ f$ jest injekcją (odp. surjekcją, bijekcją).

• Ćwiczenie: Jeżeli f i g są bijekcjami, to $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

• Ćwiczenie: Jeżeli $f : X \longrightarrow Y$ jest bijekcją, to $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ jest również bijekcją, $(f^{-1})^{-1} = f$ oraz $f^{-1}(B) = f^{-1}(B)$, gdzie zbiór po lewej stronie rozumiemy jako przeciwobraz zbioru B poprzez f, zaś zbiór po prawej — jako obraz zbioru B poprzez f^{-1}.

Definicja 1.4.2. Każde odwzorowanie $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ nazywamy *ciągiem w X*. Zwykle kładziemy $f_n := f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, i piszemy $(f_n)_{n=1}^\infty \subset X$ lub $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, np. $(1/n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{Q}$. Podciągiem ciągu $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ jest nazywany dowolny ciąg postaci $f \circ \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow X$, gdzie $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ jest odwzorowaniem takim, że $\varphi(1) < \varphi(2) < \dots$ (zauważmy, że φ musi być injekcją). Kładąc $n_k := \varphi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, piszemy wtedy, że $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$ jest podciągiem ciągu $(f_n)_{n=1}^\infty$.

Definicja 1.4.3. Każde odwzorowanie $f : I \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ nazywamy *indeksowaną rodziną zbiorów* (o zbiorze indeksów I). Rodzinę $\mathcal{A} := \{f(i) : i \in I\}$ będziemy zapisywać wtedy jako $(A_i)_{i \in I}$, gdzie $A_i := f(i)$, $i \in I$. Ponadto, $\bigcup_{i \in I} A_i := \bigcup \mathcal{A}$ oraz $\bigcap_{i \in I} A_i := \bigcap \mathcal{A}$. Oczywiście każda rodzina $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ może być uważana za rodzinę indeksowaną.

Jeżeli $I = \{k, k+1, \dots, N\}$, to piszemy $\bigcup_{j=k}^{N} A_j$. Jeżeli $I = \{k, k+1, \dots\}$, to piszemy $\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j$. Podobnie jak dla sumy zbiorów definiujemy $\bigcap_{j=k}^{N} A_j$ i $\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j$.

1.5. Grupy, ciała, ciała uporządkowane

Definicja 1.5.1. *Grupą przemienną (abelową)* nazywamy dowolną parę $(G, \bullet)$, gdzie G jest zbiorem niepustym, zaś $\bullet : G \times G \longrightarrow G$ jest *działaniem* spełniającymi następujące warunki:

(a) $\forall_{a,b,c\in G} : (a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ (łączność),

(b) $\exists_{e\in G}\ \forall_{a\in G} : a \bullet e = e \bullet a = a$ (element neutralny),

(c) $\forall_{a\in G}\ \exists_{a'\in G} : a \bullet a' = a' \bullet a = e$ (element odwrotny; jeżeli spełnione są warunki (a), (b) i (c), to mówimy, że $(G, \bullet)$ jest *grupą*),

(d) $\forall_{a,b\in G} : a \bullet b = b \bullet a$ (przemienność).

Ciałem nazywamy dowolną trójkę $(F, +, \cdot)$, gdzie F jest niepustym zbiorem, zaś

$$+ : F \times F \longrightarrow F, \quad \cdot : F \times F \longrightarrow F$$

są działaniami spełniającymi następujące warunki:

(a) $(F, +)$ jest grupą przemienną (element neutralny względem $+$ oznaczamy przez 0, zaś element odwrotny przez $-a$),

(b) $(F_*, \cdot)$ jest grupą przemienną (element neutralny względem $\cdot$ oznaczamy przez 1, zaś element odwrotny przez a^{-1}),

(c) $\forall_{a,b,c\in F} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (rozdzielność mnożenia względem dodawania).

Mówimy, że czwórka $(F, +, \cdot, <)$ jest *ciałem uporządkowanym* jeżeli $(F, +, \cdot)$ jest ciałem, zaś $<$ jest relacją w F taką, że:

(P1) $\forall_{a,b\in F}$: zachodzi dokładnie jedna z możliwości: $a < b$, $a = b$, $b < a$ (spójność),

(P2) $\forall_{a,b,c\in F} : ((a < b,\ b < c) \Longrightarrow a < c)$ (przechodniość),

(P3) $\forall_{a,b,c\in F} : (b < c \Longrightarrow a + b < a + c)$ (zgodność relacji z dodawaniem),

(P4) $\forall_{a,b,c\in F} : (0 < a,\ b < c) \Longrightarrow a \cdot b < a \cdot c$ (zgodność relacji z mnożeniem).

Mówimy, że ciało uporządkowane $(F, +, \cdot, <)$ spełnia *aksjomat ciągłości (aksjomat Dedekinda* (2) *)*, jeżeli niemożliwe jest przedstawienie $F = A \cup B$, gdzie

(C1) $A, B \neq \varnothing$,

(C2) $\forall_{a\in A,\ b\in B} : a < b$,

(C3) $\forall_{a\in A}\ \exists_{a'\in A} : a < a'$,

(C4) $\forall_{b\in B}\ \exists_{b'\in B} : b' < b$.

Obserwacja 1.5.2. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ jest ciałem uporządkowanym, które nie spełnia aksjomatu Dedekinda.

Istotnie, $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} : (x \leqslant 0) \vee (x > 0,\ x^2 < 2)\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x > 0,\ x^2 > 2\}$.

1.6. Konstrukcja Cantora liczb rzeczywistych

Zakładamy, że znamy ciało uporządkowane $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ wraz ze standardową wartością bezwzględną $|\ | : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}_+$.

Definicja 1.6.1. Mówimy, że ciąg $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ jest *ciągiem Cauchy'ego* (3), jeżeli

$$\forall_{\varepsilon\in\mathbb{Q}_{>0}}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{m,n\geqslant N} : |a_n - a_m| \leqslant \varepsilon.$$

Dla ciągów $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=1}^{\infty}$, $\boldsymbol{b} = (b_n)_{n=1}^{\infty}\mathbb{Q}$ definiujemy

$$\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b} :\Longleftrightarrow \forall_{\varepsilon\in\mathbb{Q}_{>0}}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant N} : |a_n - b_n| \leqslant \varepsilon.$$

Niech

$$\mathcal{C} := \{\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q} : \boldsymbol{a} \text{ jest ciągiem Cauchy'ego}\}.$$

Łatwo widać, że $\sim$ jest relacją równoważności w $\mathcal{C}$. Definiujemy *zbiór liczb rzeczywistych*

$$\mathbb{R} := \mathcal{C}/\sim .$$

Konstrukcja 1.6.2 (Budowa struktury zbioru liczb rzeczywistych)**.** Poniżej $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=1}^{\infty}$, $\boldsymbol{b} = (b_n)_{n=1}^{\infty}$, $\boldsymbol{c} = (c_n)_{n=1}^{\infty}$, $\boldsymbol{d} = (d_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{C}$.

(a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} := (a_n + b_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{C}$. Jeżeli $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{c}$ oraz $\boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{d}$, to $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}$.

---

(2) Julius Dedekind (1831–1916).

(3) Augustin Cauchy (1789–1857).

(b) Istnieje $M \in \mathbb{Q}_+$ takie, że $|a_n| \leqslant M$, $n \in \mathbb{N}$.

Istotnie, biorąc w definicji ciągu Cauchy'ego, $\varepsilon = 1$ wnioskujemy, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $|a_n - a_N| \leqslant 1$ dla $n \geqslant N$. w takim razie wystarczy wziąć $M := \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$.

(c) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} := (a_n b_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{C}$.

Istotnie, niech $M \in \mathbb{Q}_+$ będzie takie, że $|a_n|, |b_n| \leqslant M$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $|a_n b_n - a_m b_m| \leqslant M(|a_n - a_m| + |b_n - b_m|)$.

(d) Jeżeli $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{c}$ oraz $\boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{d}$, to $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{d}$.

Istotnie, niech $M \in \mathbb{Q}_+$ będzie takie, że $|b_n|$, $|c_n| \leqslant M$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $|a_n b_n - c_n d_n| \leqslant M(|a_n - c_n| + |b_n - d_n|)$.

(e) Powyższe własności pozwalają zdefiniować w $\mathcal{C}/\sim$ działania dodawania i mnożenia:

$[\boldsymbol{a}]_\sim + [\boldsymbol{b}]_\sim := [\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}]_\sim$,

$[\boldsymbol{a}]_\sim \cdot [\boldsymbol{b}]_\sim := [\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}]_\sim$.

Jest oczywiste, że działania te są łączne i przemienne. Ponadto, mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

(f) Dla $r \in \mathbb{Q}$ przez $\boldsymbol{r}$ rozumiemy ciąg stały $r_n := r$, $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście $\boldsymbol{r} \in \mathcal{C}$. Teraz definiujemy $\tau : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\tau(r) = [\boldsymbol{r}]_\sim$, $r \in \mathbb{Q}$. Zauważmy, że τ jest injektywne oraz $\tau(r_1 + r_2) = \tau(r_1) + \tau(r_2)$, $\tau(r_1 \cdot r_2) = \tau(r_1) \cdot \tau(r_2)$, czyli τ jest *zgodne z działaniami.*

(g) Elementy $\tau(0) = [\boldsymbol{0}]_\sim$ oraz $\tau(1) = [\boldsymbol{1}]_\sim$ są neutralne odp. względem dodawania i mnożenia. Łatwo też widać, że element $[-\boldsymbol{a}]_\sim$ jest odwrotny do $[\boldsymbol{a}]_\sim$ względem dodawania, gdzie $-\boldsymbol{a} := (-a_n)_{n=1}^{\infty}$. Krótko: $-[\boldsymbol{a}]_\sim = [-\boldsymbol{a}]_\sim$.

(h) $\boldsymbol{a} \not\sim \boldsymbol{b} \iff \exists_{\varepsilon_0 \in \mathbb{Q}_{>0},\, N \in \mathbb{N}} : (\forall_{n \geqslant N} : a_n \geqslant b_n + \varepsilon_0) \vee (\forall_{n \geqslant N} : b_n \geqslant a_n + \varepsilon_0)$.

Istotnie, implikacja „$\Longleftarrow$" jest oczywista. Dla dowodu implikacji „$\Longrightarrow$" wprost z definicji relacji $\sim$ wnioskujemy, że istnieje $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ oraz ciąg liczb $(n_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ takie, że $n_1 < n_2 < \dots$ i $|a_{n_k} - b_{n_k}| > \varepsilon$. Niech $I_+ := \{k \in \mathbb{N} : a_{n_k} - b_{n_k} > \varepsilon\}$, $I_- := \{k \in \mathbb{N} : b_{n_k} - a_{n_k} > \varepsilon\}$. Co najmniej jeden z tych zbiorów musi być nieskończony. Przyjmijmy, że I_+. Zastępując ciąg $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ stosownym podciągiem, możemy założyć, że $I_+ = \mathbb{N}$. Wobec definicji ciągu Cauchy'ego istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $|a_n - a_m| \leqslant \varepsilon/3$ i $|b_n - b_m| \leqslant \varepsilon/3$ dla $n, m \geqslant N$. Ustalmy $k \in \mathbb{N}$ takie, że $n_k \geqslant N$. Wtedy dla $n \geqslant N$ mamy

$$a_n - b_n \geqslant a_{n_k} - b_{n_k} - |a_n - a_{n_k}| - |b_n - b_{n_k}| > \varepsilon/3 =: \varepsilon_0.$$

(i) Niech $\boldsymbol{a} \not\sim \boldsymbol{0}$ i niech $\varepsilon_0 \in \mathbb{Q}_{>0}$ oraz $N \in \mathbb{N}$ będą takie, że $|a_n| \geqslant \varepsilon_0$ dla $n \geqslant N$. Zdefiniujmy $\boldsymbol{a}^* = (c_n)_{n=1}^{\infty}$, $c_n := 0$ dla $1 \leqslant n \leqslant N-1$ i $c_n := 1/a_n$ dla $n \geqslant N$. Wtedy $\boldsymbol{a}^* \in \mathcal{C}$ oraz $[\boldsymbol{a}]_\sim \cdot [\boldsymbol{a}^*]_\sim = [\boldsymbol{1}]_\sim$, czyli, że $[\boldsymbol{a}^*]_\sim = [\boldsymbol{a}]_\sim^{-1}$.

Istotnie, dla $m, n \geqslant N$ mamy $|1/a_n - 1/a_m| \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0^2}|a_n - a_m|$.

(j) Wykazaliśmy, że $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ jest ciałem.

(k) Wprowadzamy porządek: $[\boldsymbol{a}]_\sim < [\boldsymbol{b}]_\sim :\iff \exists_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0},\, N \in \mathbb{N}} : \forall_{n \geqslant N} : a_n + \varepsilon \leqslant b_n$.

Jest to relacja poprawnie określona, spójna, przechodnia i zgodna z działaniami.

Istotnie, jeżeli $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{d}$, oraz $a_n + \varepsilon \leqslant b_n$ dla $n \geqslant N$, to dobieramy $N_1 \geqslant N$ takie, że $|a_n - c_n| \leqslant \varepsilon/3$, $|b_n - d_n| \leqslant \varepsilon/3$ dla $n \geqslant N_1$. Wtedy, dla $n \geqslant N_1$ mamy $c_n + \varepsilon/3 \leqslant a_n + 2\varepsilon/3 \leqslant b_n - \varepsilon/3 \leqslant d_n$.

(P1) wynika natychmiast z (h).

(P2): Jeżeli $a_n + \varepsilon_1 \leqslant b_n$ dla $n \geqslant N_1$ i $b_n + \varepsilon_1 \leqslant c_n$ dla $n \geqslant N_2$, to biorąc $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, dla $n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$, mamy $a_n + 2\varepsilon \leqslant b_n + \varepsilon \leqslant c_n$.

(P3): Jeżeli $b_n + \varepsilon \leqslant c_n$ dla $n \geqslant N$, to $a_n + b_n + \varepsilon \leqslant a_n + c_n$ dla $n \geqslant N$.

(P4): Jeżeli $0 + \varepsilon_1 \leqslant a_n$ dla $n \geqslant N_1$ oraz $b_n + \varepsilon_2 \leqslant c_n$ dla $n \geqslant N_2$, to dla $\varepsilon := \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$ i $n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$ mamy $a_n \cdot b_n + \varepsilon \leqslant a_n(b_n + \varepsilon_2) \leqslant a_n \cdot c_n$ dla $n \geqslant N$.

(l) $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ jest ciałem uporządkowanym.

(m) Dla $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ mamy $r_1 < r_2 \iff \tau(r_1) < \tau(r_2)$, co oznacza, że τ jest zgodnie z relacjami $<$.

(n) Utożsamiamy $\mathbb{Q}$ z $\tau(\mathbb{Q})$. w szczególności, piszemy 0, 1 zamiast $\tau(0)$, $\tau(1)$.

(o) w $\mathbb{R}$ wprowadzamy relacje $\leqslant, >, \geqslant$ oraz *wartość bezwzględną* $|\ | : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$a \leqslant b :\iff (a = b) \vee (a < b)$,

$a > b :\iff b < a$,

$a \geqslant b :\iff (a = b) \vee (a > b)$,

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{jeżeli } a > 0 \\ 0, & \text{jeżeli } a = 0\,, \\ -a, & \text{jeżeli } a < 0 \end{cases}$$

(p) Oczywiście powyższa wartość bezwzględna zgadza się na $\mathbb{Q}$ z wyjściową wartością bezwzględną dla liczb wymiernych ($|\tau(r)| = |r|$ dla $r \in \mathbb{Q}$). Łatwo można sprawdzić (Ćwiczenie), że dla $a, b \in \mathbb{R}$ mamy $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

(q) Wprowadzamy *przedziały*:
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$ dla $a \leqslant b$,
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$, $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$, $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ dla $a < b$,
$[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}$, $(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ dla $a \in \mathbb{R}$,
$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}$, $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ dla $b \in \mathbb{R}$,
$(-\infty, +\infty) := \mathbb{R}$, $\varnothing$,
$\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$, $\mathbb{R}_{>0} := (0, +\infty)$, $\mathbb{R}_- := (-\infty, 0]$, $\mathbb{R}_{<0} := (-\infty, 0)$.

(r) Jeżeli $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, to istnieje $r \in \mathbb{Q}$ takie, że $r \in (a, b)$ (gęstość $\mathbb{Q}$ w $\mathbb{R}$).

Niech $a_n + \varepsilon \leqslant b_n$ dla $n \geqslant N_1$. Dobieramy N_2 takie, że $|a_n - a_m|$, $|b_n - b_m| \leqslant \varepsilon/4$ dla $n, m \geqslant N_2$. Niech $N = \max\{N_1, N_2\}$, $r := a_N + \varepsilon/2$. Dla $n \geqslant N$ mamy $a_n + \varepsilon/4 \leqslant a_N + \varepsilon/2 = r < r + \varepsilon/4 = (a_N + \varepsilon/2) + \varepsilon/4 \leqslant b_N - \varepsilon/4 \leqslant b_n$.

(s) Spełniony jest aksjomat Dedekinda.

Istotnie, przypuśćmy, że $\mathbb{R} = A \cup B$ is spełnione są (C1) – (C4). Korzystając z tych warunków oraz (r), wnioskujemy, że istnieją liczby $r_1, s_1 \in \mathbb{Q}$, $r_1 < s_1$, takie, że $r_1 \in A$, $s_1 \in B$. Rozważmy, punkt $q := \frac{1}{2}(r_1 + s_1)$. Leży on albo w A albo w B. Jeżeli w A to definiujemy $r_2 = q$, $s_2 := s_1$. Jeżeli leży w B, to kładziemy $r_2 = r_1$, $s_2 := q$. Powtarzamy procedurę. Dostajemy ciągi $\boldsymbol{r} = (r_n)_{n=1}^{\infty}$, $\boldsymbol{s} = (s_n)_{n=1}^{\infty}\mathbb{Q}$ takie, że $r_n \in A$, $s_n \in B$, $r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_n < s_n \leqslant s_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant s_1$ i $s_n - r_n = \frac{1}{2^{n-1}}(s_1 - r_1)$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Dla $n, m \geqslant N$ mamy $|r_n - r_m| \leqslant s_N - r_N$. Wynika stąd natychmiast, że $\boldsymbol{r} \in \mathcal{C}$. Podobnie $\boldsymbol{s} \in \mathcal{C}$. Oczywiście, $\boldsymbol{r} \sim \boldsymbol{s}$, a więc $[\boldsymbol{r}]_\sim = [\boldsymbol{s}]_\sim =: c$. Przypuśćmy, że $c \in A$. Niech $c' \in A$ będzie takie, że $c < c'$. Wobec (r), musi istnieć $t \in \mathbb{Q}$ takie, $c < t < c'$. Oznacza to w szczególności, że istnieją $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ i $N \in \mathbb{N}$ takie, że $r_n + \varepsilon \leqslant t < s_n$ dla $n \geqslant N$, co daje sprzeczność. Przypadek, gdy $c \in B$ jest analogiczny (Ćwiczenie).

(t) $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ jest ciałem uporządkowanym spełniającym aksjomat Dedekinda.

Można pokazać, że $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ jest jedynym ciałem uporządkowanym spełniającym aksjomat Dedekinda takim, że istnieje odwzorowanie injektywne $\tau : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, które jest zgodne z działaniami i relacjami. Dokładniej, jeżeli $(\widetilde{\mathbb{R}}, \widetilde{+}, \widetilde{\cdot}, \widetilde{<})$ jest ciałem uporządkowanym spełniającym aksjomat Dedekinda takim, że istnieje odwzorowanie injektywne $\widetilde{\tau} : \mathbb{Q} \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$, które jest zgodne z działaniami i relacjami ($<$, $\widetilde{<}$), to istnieje bijekcja $\varphi : \widetilde{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ zgodna z działaniami i relacjami ($\widetilde{<}$ i $<$) taka, że $\varphi \circ \widetilde{\tau} = \tau$.

1.7. Kresy

Definicja 1.7.1. Niech $A \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że A jest *ograniczony od góry*, jeżeli istnieje $M \in \mathbb{R}$ takie, że $x \leqslant M$ dla dowolnego $x \in A$. Każdą taką liczbę M nazywamy *ograniczeniem górnym (majorantą) zbioru* A. Zbiór wszystkich ograniczeń górnych zbioru A oznaczamy (roboczo) $\operatorname{Maj} A$.

Mówimy, że A jest *ograniczony od dołu*, jeżeli istnieje $m \in \mathbb{R}$ takie, że $m \leqslant x$ dla dowolnego $x \in A$. Każdą taką liczbę m nazywamy *ograniczeniem dolnym (minorantą) zbioru* A. Zbiór wszystkich ograniczeń dolnych zbioru A oznaczamy $\operatorname{Min} A$.

Mówimy, że A jest *ograniczony*, jeżeli jest jednocześnie ograniczony od dołu i od góry.

Mówimy, że element $a^* \in A$ jest *maksimum* zbioru A, jeżeli $x \leqslant a^*$ dla dowolnego $x \in A$. Piszemy $a^* = \max A$.

Mówimy, że element $a_* \in A$ jest *minimum* zbioru A, jeżeli $a_* \leqslant x$ dla dowolnego $x \in A$. Piszemy $a_* = \min A$.

Jeżeli zbiór $\operatorname{Maj} A \neq \varnothing$ ma element minimalny, to nazywamy go *supremum (kresem górnym)* zbioru A i oznaczamy $\sup A$. To znaczy, że $\sup A := \min(\operatorname{Maj} A)$.

Jeżeli zbiór $\operatorname{Min} A \neq \varnothing$ ma element maksymalny, to nazywamy go *infimum (kresem dolnym)* zbioru A i oznaczamy $\inf A$. To znaczy, że $\inf A := \max(\operatorname{Min} A)$.

Obserwacja 1.7.2. (a) Jeżeli $a \in \operatorname{Maj} A$ i $b > a$, to $b \in \operatorname{Maj} A$. Jeżeli $a \in \operatorname{Min} A$ i $b < a$, to $b \in \operatorname{Min} A$.

(b) $\operatorname{Maj}\mathbb{R} = \operatorname{Min}\mathbb{R} = \varnothing$.

(c) $\varnothing$ jest ograniczony, ale nie ma kresów.

(d) $\sup A$ i $\inf A$ są wyznaczone jednoznacznie.

(e) Jeżeli $\max A$ (odp. $\min A$) istnieje, to $\max A = \sup A$ (odp. $\min A = \inf A$).

(f) Każdy niepusty zbiór skończony $A \subset \mathbb{R}$ ma maksimum i minimum.

(g) $\max A = -\min(-A)$, $\sup A = -\inf(-A)$, gdzie $-A := \{-x : x \in A\}$. Jeżeli A jest ograniczony od góry (odp. od dołu), to $-A$ jest ograniczony od dołu (odp. od góry).

(h) $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony od góry (odp. od dołu) i $a_0 \in \mathbb{R}$, to następujące warunki są równoważne:

- $a_0 = \sup A$ (odp. $a_0 = \inf A$);
- $a_0 \in \operatorname{Maj} A$ oraz $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{a\in A} :\ a > a_0 - \varepsilon$ (odp. $a_0 \in \operatorname{Min} A$ oraz $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{a\in A} :\ a < a_0 + \varepsilon$).

Twierdzenie 1.7.3. *Każdy niepusty zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ograniczony od góry (odp. od dołu) ma supremum (odp. infimum).*

Dowód. Załóżmy, że $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry. Niech $P := \mathbb{R} \setminus \operatorname{Maj} A$, $Q := \operatorname{Maj} A$. Wtedy:

$P \cup Q = \mathbb{R}$.

P, $Q \neq \varnothing$. Istotnie, $P \neq \varnothing$ bo $A \neq \varnothing$, zaś $Q \neq \varnothing$ bo A jest ograniczony z góry.

Jeżeli $a \in P$, $b \in Q$, to $a < b$. Istotnie, gdyby $a \geqslant b$, to wtedy $a \in Q$.

Jeżeli $a \in P$, to istnieje $b \in A$ takie, że $a < b$. Istotnie, gdyby $b \leqslant a$ dla dowolnego $b \in A$, to $a \in Q$.

Biorąc $a < a' < b$ dostajemy $a' \in P$ takie, że $a < a'$. Istotnie, gdyby $a' \in Q$, to $a' \geqslant b$.

Z zasady ciągłości wynika, że istnieje $b_0 \in Q$ takie, że $b_0 \leqslant b$ dla dowolnego $b \in Q$, czyli $b_0 = \sup A$.

Przypadek infimum przebiega analogicznie (Ćwiczenie). $\square$

Obserwacja 1.7.4. Zbiór $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x, y \in I$, $x < y$, mamy $[x, y] \subset I$.

Oczywiście każdy przedział ma wyżej wymienioną własność. Załóżmy teraz, że $\varnothing \neq I \subset \mathbb{R}$ ma tę własność.

- Jeżeli I jest ograniczony, to definiujemy $a := \inf I$, $b := \sup I$. Gdy $a = b$, to $I = \{a\} = [a, a]$. Jeżeli $a < b$, to, w zależności od tego, czy a i/lub b należą do I, mamy $I \in \{[a, b],\ (a, b],\ [a, b),\ (a, b)\}$.
- Jeżeli I jest ograniczony od góry, ale nie jest ograniczony od dołu, to definiujemy $b := \sup I$. Wtedy $I \in \{(-\infty, b],\ (-\infty, b)\}$.
- Jeżeli I jest ograniczony od dołu, ale nie jest ograniczony od góry, to definiujemy $a := \inf I$. Wtedy $I \in \{[a, +\infty),\ (a, +\infty)\}$.
- Jeżeli I nie jest ograniczony ani od góry ani od dołu, to $I = \mathbb{R}$.

1.8. Zbiory przeliczalne

Twierdzenie 1.8.1 (Zasada minimum)**.** *Niech $\varnothing \neq A \subset \mathbb{N}$. Wtedy $\exists_{k_0\in A}\ \forall_{k\in A} : k_0 \leqslant k$, tzn. $k_0 = \min A$.*

Dowód. Zbiór A, jako podzbiór $\mathbb{R}$, jest ograniczony z dołu, a więc ma infimum k_0. Gdyby $k_0 \notin A$, to korzystając z Obserwacji 1.7.2(h), dla dowolnego $\varepsilon > 0$ mielibyśmy $(k_0, k_0 + \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$, co daje sprzeczność. $\square$

Twierdzenie 1.8.2 (Zasada indukcji matematycznej)**.** *Niech $A \subset \mathbb{N}_0$. Jeżeli $0 \in A$ oraz*

$$\forall_{k\in\mathbb{N}_0}\ (k \in A \Longrightarrow k + 1 \in A),$$

to $A = \mathbb{N}_0$.

Dowód. Przypuśćmy, że $A \subsetneq \mathbb{N}_0$ i niech $k_0 := \min(\mathbb{N} \setminus A)$ (na podstawie zasady minimum). Wobec definicji k_0 musi być $k_0 - 1 \in A$. Stąd, korzystając z założeń, wnioskujemy, że $k_0 \in A$; sprzeczność. $\square$

Definicja 1.8.3. Dwa zbiory X oraz Y nazywamy *równolicznymi*, jeżeli istnieje bijekcja $\varphi : X \longrightarrow Y$. Zbiór A nazywamy *skończonym*, jeżeli $A = \varnothing$ lub A jest równoliczny ze zbiorem $\{1, \dots, n\}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ (wtedy mówimy, że A jest *n-elementowy*). Zbiory *nieskończone* to takie, które nie są skończone. Mówimy, że A jest *przeliczalny*, jeżeli A jest równoliczny z $\mathbb{N}$; zapisujemy to jako $\#A = \aleph_0$. Zbiór A nazywamy *co najwyżej przeliczalnym*, jeżeli jest skończony lub przeliczalny; zapisujemy to jako $\#A \leqslant \aleph_0$. Zbiór A nazywamy *nieprzeliczalnym*, jeżeli nie jest co najwyżej przeliczalny.

Obserwacja 1.8.4. (a) Relacja równoliczności zbiorów jest relacją równoważnościową.

(b) Zbiór jest przeliczalny, jeżeli wszystkie wyrazy tego zbioru można ustawić w ciąg różnowartościowy.

(c) $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$ są przeliczalne.

Lemat 1.8.5. (a) *Każdy nieskończony zbiór $C \subset \mathbb{N}$ można ustawić w ciąg ściśle rosnący $a : \mathbb{N} \longrightarrow C$, tzn. $a(n) < a(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$.*

(b) *Dowolny nieskończony podzbiór B zbioru przeliczalnego A jest przeliczalny.*

(c) *Jeżeli A jest przeliczalny, zaś $f : A \longrightarrow B$ jest surjekcją, to B jest co najwyżej przeliczalny.*

Dowód. (a) Korzystając z zasady minimum definiujemy

$$a(1) := \min C, \qquad a(n) := \min(C \setminus \{a(1), \dots, a(n-1)\}), \quad n \geqslant 2.$$

Trzeba tylko pokazać, że $a : \mathbb{N} \longrightarrow C$ jest odwzorowaniem surjektywnym. Oczywiście $a(1) < a(2) < \dots$. Przypuśćmy, że $c_0 \in C \setminus a(\mathbb{N}) \subset C \setminus \{a(1), \dots, a(n-1)\}$. Wtedy $n \leqslant a(n) \leqslant c_0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, co daje sprzeczność.

(b) Ponieważ A jest przeliczalny, istnieje bijekcja $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow A$. Niech $C := \varphi^{-1}(B)$; jest to zbiór nieskończony oraz $\varphi|_C : C \longrightarrow B$ jest bijekcją. Wiemy, że C można ustawić w ciąg ściśle rosnący $a : \mathbb{N} \longrightarrow C$. Teraz $\psi := \varphi \circ a$ jest bijekcją $\mathbb{N} \longrightarrow B$.

(c) Możemy założyć, że $A = \mathbb{N}$ oraz, że B jest nieskończony. Zauważmy, że rodzina $\{f^{-1}(b) : b \in B\}$ składa się z niepustych zbiorów parami rozłącznych. Dla $b \in B$ niech $g(b) := \min f^{-1}(b)$ (zasada minimum). Wtedy $g : B \longrightarrow \mathbb{N}$ jest injekcją, a więc B jest przeliczalny. $\square$

Twierdzenie 1.8.6. (a) *Zbiór $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jest przeliczalny.*

(b) *Zbiór $\mathbb{Q}$ jest przeliczalny.*

Dowód. (a) Zbiór $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ustawiamy w nieskończoną tablicę

$$\begin{array}{ccccccccc}
(1,1) & \longrightarrow & (1,2) & & (1,3) & \longrightarrow & (1,4) & & \dots \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \dots \\
(2,1) & \longleftarrow & (2,2) & & (2,3) & & (2,4) & & \dots \\
\downarrow & & & & \uparrow & & \downarrow & & \dots \\
(3,1) & \longrightarrow & (3,2) & \longrightarrow & (3,3) & & (3,4) & & \dots \\
 & & & & & & \downarrow & & \dots \\
(4,1) & \longleftarrow & (4,2) & \longleftarrow & (4,3) & \longleftarrow & (4,4) & & \dots \\
\downarrow & & & & & & & & \dots \\
. & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

i teraz wszystkie elementy zbioru $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ustawimy w ciąg zgodnie ze strzałkami.

(b) Wobec (a) zbiór $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ jest przeliczalny. Odwzorowanie $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \ni (\ell, m) \longmapsto \frac{\ell}{m} \in \mathbb{Q}$ jest surjekcją. Teraz korzystamy z Lematu 1.8.5(c). $\square$

Definicja 1.8.7. *Iloczynem kartezjańskim* $A_1 \times \dots \times A_n$ zbiorów $A_1, \dots, A_n$ nazywamy zbiór wszystkich odwzorowań $a : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j$ takich, że $a(j) \in A_j$, $j = 1, \dots, n$. Odwzorowanie a utożsamiamy ze skończonym ciągiem $(a_1, \dots, a_n)$, czyli $A_1 \times \dots \times A_n := \{(a_1, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$. Jeżeli $A_1 = \dots = A_k = A$, to zamiast $\underbrace{A \times \dots \times A}_{k\times}$ piszemy A^k.

Zauważmy, że dla $n = 2$ powyższa definicja zgadza się z definicją z podrozdziału 1.2 (Ćwiczenie).

Twierdzenie 1.8.8. (a) *Załóżmy, że rodzina $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{P}(X)$ jest taka, że $I \neq \varnothing$, $\#I \leqslant \aleph_0$ oraz $\#A_i \leqslant \aleph_0$, $i \in I$. Wtedy zbiór $A := \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ jest co najwyżej przeliczalny.*

(b) *Jeżeli $X_1, \dots, X_n$ są co najwyżej przeliczalne, to $X_1 \times \dots \times X_n$ jest co najwyżej przeliczalny.*

Dowód. (a) Jeżeli zbiór I jest skończony, to możemy przyjąć $I = \{1, \dots, N\}$. Jeżeli I jest przeliczalny, to możemy przyjąć, że $I = \mathbb{N}$. Niech $\varphi_i : B_i \longrightarrow A_i$ będzie bijekcją dla pewnego $B_i \subset \mathbb{N}$, $i \in I$. Na podstawie Twierdzenia 1.8.6(a) zbiór $C := \bigcup\limits_{i \in I} \{i\} \times B_i \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jest przeliczalny. Ponieważ odwzorowanie $\varphi : C \longrightarrow A$, $\varphi(i, a) := \varphi_i(a)$, jest surjektywne, zbiór A jest co najwyżej przeliczalny (Lemat 1.8.5(c)).

(b) Indukcja względem n. Przypadek $n = 1$ jest oczywisty. Przechodzimy do kroku indukcyjnego $n \rightsquigarrow n+1$. Wtedy

$$X_1 \times \dots \times X_{n+1} = \bigcup_{x_{n+1} \in X_{n+1}} X_1 \times \dots \times X_n \times \{x_{n+1}\}$$

i możemy zastosować (a) $\square$

1.9. Nieprzeliczalność $\mathbb{R}$

Twierdzenie 1.9.1 (Twierdzenie Cantora [4])**.** *Niech* $I_n := [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$, $I_{n+1} \subset I_n$, $n \in \mathbb{N}$. *Wtedy* $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \varnothing$.

Dowód. Dla dowolnych m, n mamy $a_n \leqslant b_m$. Niech $A := \{a_1, a_2, \dots\}$. Jest to zbiór ograniczony z góry. Niech $a := \sup A$. Wtedy $a_n \leqslant a \leqslant b_n$ dla dowolnego n. Stąd $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. $\square$

Ćwiczenie 1.9.2. Jeżeli w twierdzeniu Cantora $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}} :\ b_N - a_N \leqslant \varepsilon$, to $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ musi być jednopunktowy.

Twierdzenie 1.9.3. *Dowolny przedział* $I \subset \mathbb{R}$ *taki, że* $\#I \geqslant 2$ *jest zbiorem nieprzeliczalnym.*

Dowód. Przypuśćmy, że $I = \{c_1, c_2, \dots\}$. Ustalmy $a, b \in I$, $a < b$. Jeżeli $c_1 \notin I_0 := [a, b]$, to kładziemy $I_1 := I_0$. Jeżeli $c_1 \in I_0$, to dobieramy mniejszy przedział $I_1 = [a_1, b_1] \subset I_0$ taki, że $a_1 < b_1$ i $c_1 \notin I_1$. Jeżeli $c_2 \notin I_1$, to kładziemy $I_2 := I_1$. Jeżeli $c_2 \in I_1$, to dobieramy mniejszy przedział $I_2 = [a_2, b_2] \subset I_1$ taki, że $a_2 < b_2$ i $c_2 \notin I_2$. Powtarzamy rozumowanie. Dostajemy zstępujący ciąg przedziałów $I_n = [a_n, b_n]$, $a_n < b_n$, $n \in \mathbb{N}$ taki, że $c_1, \dots, c_n \notin I_n$, $n \in \mathbb{N}$. Wynika stąd, że $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \varnothing$ — sprzeczność. $\square$

Twierdzenie 1.9.4 (Cantor)**.** *Zbiór* $\mathcal{X}$ *wszystkich ciągów* $\mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}$ *jest nieprzeliczalny.*

Dowód. Oczywiście $\mathcal{X}$ jest nieskończony. Przypuśćmy, że ustawiliśmy go w ciąg $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{X}$. Teraz zdefiniujemy pewien element $x \in \mathcal{X}$:

$$x(n) := 1 - a(n)(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ, $x \notin a(\mathbb{N})$ dostajemy sprzeczność. $\square$

Powyższa metoda dowodu nosi nazwę *metody przekątniowej*.

Ćwiczenie 1.9.5. Udowodnić Twierdzenie 1.9.3 w oparciu o Twierdzenie 1.9.4.

1.10. Funkcje monotoniczne i okresowe

Definicja 1.10.1. Niech $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ i $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Mówimy, że f jest *rosnąca* (odp. *silnie rosnąca*), jeżeli dla dowolnych $x, y \in A$ stąd, że $x < y$ wynika, że $f(x) \leqslant f(y)$ (odp. $f(x) < f(y)$).

Mówimy, że f jest *malejąca* (odp. *silnie malejąca*), jeżeli dla dowolnych $x, y \in A$ stąd, że $x < y$ wynika, że $f(x) \geqslant f(y)$ (odp. $f(x) > f(y)$).

Funkcje rosnące lub malejące nazywamy *monotonicznymi*. Funkcje silnie rosnące lub silnie malejące nazywamy *silnie monotonicznymi*.

Oczywiście, powyższe definicje dotyczą też ciągów $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Mówimy, że funkcja $f : A \longrightarrow B$ jest *okresowa* jeżeli istnieje liczba $\omega > 0$ (zwana *okresem*) taka, że:
- $\forall_{x\in A} : x + \omega,\ x - \omega \in A$,
- $\forall_{x\in A} : f(x + \omega) = f(x)$.

Jeżeli istnieje okres minimalny, to nazywamy go *okresem zasadniczym (podstawowym)*.

Widać, że f jest rosnąca (odp. silnie rosnąca) wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $-f$ jest malejąca (odp. silnie malejąca).

Przykład 1.10.2. Funkcja $f := \chi_{\mathbb{Q},\mathbb{R}}$ jest okresowa (dowolna liczba $\omega \in \mathbb{Q}_{>0}$ jest jej okresem), ale f nie posiada okresu zasadniczego.

---

[4] Georg Cantor (1845–1918).

1.11. Uzupełniony (rozszerzony) zbiór liczb rzeczywistych

$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, gdzie $-\infty, +\infty \notin \mathbb{R}$ i $-\infty \neq +\infty$. Dodawanie i mnożenie rozszerzamy na $\overline{\mathbb{R}}$ tylko częściowo:

$$a, b \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow a + b =$$

$b \backslash a$	$-\infty$	$\mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$\mathbb{R}$	$-\infty$	$a+b$	$+\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

$$a, b \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow a \cdot b =$$

$b \backslash a$	$-\infty$	$\mathbb{R}_{<0}$	0	$\mathbb{R}_{>0}$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$\mathbb{R}_{<0}$	$+\infty$	$a \cdot b$	0	$a \cdot b$	$-\infty$
0	?	0	0	0	?
$\mathbb{R}_{>0}$	$-\infty$	$a \cdot b$	0	$a \cdot b$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

Dalej rozszerzamy relację $<$ na $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$:
$x < y :\Longleftrightarrow (x, y \in \mathbb{R},\ x < y) \vee (x = -\infty, y \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}) \vee (x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\ y = +\infty)$.

Dostajemy relację spójną i przechodnią (Ćwiczenie). Możemy więc rozszerzyć na $\overline{\mathbb{R}}$ relacje $\leqslant, >$ i $\geqslant$. Dla dowolnych $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, definiujemy przedziały $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b). Ponadto, definiujemy $|\pm\infty| := +\infty$.

Pojęcia $\operatorname{Maj} A$, $\operatorname{Min} A$, $\max A$, $\min A$, $\sup A$, $\inf A$ przenosimy na $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Ponieważ $-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$ dla dowolnego $x \in \overline{\mathbb{R}}$, zatem wszystkie zbiory $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ są ograniczone. Ponadto, jeżeli $A \neq \varnothing$, to $\sup A$ i $\inf A$ istnieją. Istotnie:

jeżeli zbiór $A \cap \mathbb{R}$ jest niepusty i ograniczony od góry, to przyjmujemy $\sup A := \sup(A \cap \mathbb{R})$ (po prawej stronie bierzemy supremum w „starym" sensie);

jeżeli zbiór $A \cap \mathbb{R}$ jest niepusty i nieograniczony od góry, to przyjmujemy $\sup A := +\infty$;

jeżeli $+\infty \in A$, to $\sup A := +\infty$;

jeżeli $A = \{-\infty\}$, to $\sup A := -\infty$.

Podobnie dla infimum (Ćwiczenie). Odnotujmy, że $\sup \varnothing := -\infty$, $\inf \varnothing := +\infty$.

Ćwiczenie 1.11.1. Odwzorowanie $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow [-1, 1]$,

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{x}{1+|x|}, & \text{jeżeli } x \in \mathbb{R} \\ \pm 1, & \text{jeżeli } x = \pm\infty \end{cases}$$

jest ściśle rosnącą bijekcją.

1.12. Liczby zespolone

W zbiorze $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wprowadzamy działania:

- dodawanie: $(x, y) = (u, v) := (x + u, y + v)$,
- mnożenie: $(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu)$.

Ćwiczenie 1.12.1. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ jest ciałem, przy czym:

- $(0, 0)$ jest elementem neutralnym dla dodawania.
- $-(x, y) = (-x, -y)$.
- $(1, 0)$ jest elementem neutralnym dla mnożenia.
- $(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ dla $(x, y) \neq (0, 0)$.
- Odwzorowanie $\mathbb{R} \ni x \longmapsto (x, 0) \in \mathbb{C}$ jest injekcją zgodną z działaniami, co pozwala utożsamiać $\mathbb{R}$ z podzbiorem $\mathbb{C}$. w konsekwencji $x = (x, 0)$ dla $x \in \mathbb{R}$, np. $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$.
- Niech $i := (0, 1) \in \mathbb{C}$; i nazywamy *jednostką urojoną*. Wtedy $i^2 = -1$ oraz $(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy$.

- $i^k = ?$ (proszę ustalić wzór).

Jeżeli $z = x + iy$ to:
$x =: \operatorname{Re} z$ nazywamy *częścią rzeczywistą* z,
$y =: \operatorname{Im} z$ — *częścią urojoną* z,
$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ — *modułem (wartością bezwzględną)* z,
$\overline{z} := x - iy$ — *liczbą sprzężoną z* z.

Ćwiczenie 1.12.2. Niech $w, z = x + iy \in \mathbb{C}$. Wtedy:
(a) $\overline{\overline{z}} = z$.
(b) $z = \overline{z} \iff z = x \in \mathbb{R}$.
(c) $x = \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $y = \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.
(d) $|\overline{z}| = |z|$.
(e) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.
(f) operator sprzężenia $\mathbb{C} \ni z \longmapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$ jest zgodny z działaniami, tzn. $\overline{w+z} = \overline{w} + \overline{z}$ oraz $\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$; ponadto, $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$ dla $z \neq 0$.
(g) $|wz| = |w||z|$.
(h) $|z| \leqslant |x| + |y|$.
(i) $\max\{|x|, |y|\} \leqslant |z| \leqslant \sqrt{2}\max\{|x|, |y|\}$.
(j) (*Nierówność trójkąta*) $||w| - |z|| \leqslant |w + z| \leqslant |w| + |z|$.
(k) Funkcja $\varrho(z, w) := |z - w|$ jest odległością Euklidesową na $\mathbb{C}$.
(l) Zbiór $K(a, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ jest kołem otwartym o środku w punkcie a i promieniu r.
(m) Zbiór $\overline{K}(a, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leqslant r\}$ jest kołem domkniętym o środku w punkcie a i promieniu r.

Standardowe oznaczenia: $K(r) := K(0, r)$, $\overline{K}(r) := \overline{K}(0, r)$, $\mathbb{D} := K(1)$, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
Dla $z = x + iy \in \mathbb{C}$ zbiór $\arg z := \{\varphi \in \mathbb{R} : x = |z|\cos\varphi,\ y = |z|\sin\varphi\}$ nazywamy *argumentem* z (5).

Obserwacja 1.12.3. (a) $\arg 0 = \mathbb{R}$.
(b) $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; jest to tzw. *postać trygonometryczna* z.
(c) Jeżeli $z \neq 0$, to $\varphi_1, \varphi_2 \in \arg z \iff \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2\pi} \in \mathbb{Z}$. w konsekwencji, jeżeli $z \neq 0$, to istnieje dokładnie jedna liczba $\varphi \in \arg z \cap (-\pi, \pi]$. Nazywamy ją *argumentem głównym* z i oznaczamy $\operatorname{Arg} z$. Mamy $\arg z = \{\operatorname{Arg} z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Ponadto przyjmujemy $\operatorname{Arg} 0 := 0$.
(d) $a \cdot b = |a||b|(\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta))$, $a, b \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \arg a$, $\beta \in \arg b$.
(e) (*Wzór de Moivre'a* (6)) $z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$, $z \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \arg z$, $n \in \mathbb{N}$.

Dla $z \in \mathbb{C}$ i $n \in \mathbb{N}$, zbiór $\sqrt[n]{z} := \{w \in \mathbb{C} : w^n = z\}$ nazywamy *pierwiastkiem zespolonym z liczby* z.

Ćwiczenie 1.12.4. (a) $\sqrt[n]{0} = \{0\}$.
(b) $\sqrt[n]{z} = \left\{\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) : k = 0, \dots, n-1\right\}$, $z \in \mathbb{C}$, $\varphi := \operatorname{Arg} z$, $n \in \mathbb{N}$. (7)
(c) Dla $n \geqslant 3$ zbiór $\sqrt[n]{1}$ to wierzchołki n-kąta foremnego wpisanego w okrąg jednostkowy $\mathbb{T}$.
(d) Czy prawdziwa jest równość $\sqrt[m]{\sqrt[n]{z}} = \sqrt[nm]{z}$, tzn. $\bigcup_{w \in \sqrt[n]{z}} \sqrt[m]{w} = \sqrt[nm]{z}$?

Twierdzenie 1.12.5 (Nierówność Schwarza (8)). *Dla dowolnych* $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ *mamy*

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} a_j \bar{b}_j\Big|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $(a_1, \dots, a_n)$ *oraz* $(b_1, \dots, b_n)$ *są* $\mathbb{C}$*-liniowo zależne.*

---

(5) Uwaga: precyzyjne definicje funkcji trygonometrycznych zostaną podane w podrozdziale 6.5.
(6) Abraham de Moivre (1667–1754).
(7) Uwaga: istnienie *pierwiastka arytmetycznego* $\sqrt[n]{a}$, $a \geqslant 0$, zostanie wykazane w Twierdzeniu 2.2.1.
(8) Hermann Schwarz (1789–1857).

Dowód. Niech $A := \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2$, $B := \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2$, $C := \sum_{j=1}^{n} a_j\overline{b}_j$. Jeżeli $AB = 0$, to twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy więc, że $AB > 0$. Mamy:

$$0 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |Ba_j - Cb_j|^2 = \sum_{j=1}^{n} (Ba_j - Cb_j)(B\overline{a}_j - \overline{Cb_j}) =$$
$$= B^2 \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 - B\overline{C} \sum_{j=1}^{n} a_j\overline{b}_j - CB \sum_{j=1}^{n} b_j\overline{a}_j + |C|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 =$$
$$= B^2A - BC\overline{C} - CB\overline{C} + |C|^2B = B^2A - B|C|^2 = B(BA - |C|^2).$$

Wynika stąd natychmiast, że $|C|^2 \leqslant AB$ oraz, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $Ba_j = Cb_j$, $j = 1, \dots, n$. □

ROZDZIAŁ 2

Ciągi liczbowe

2.1. Ciągi liczbowe

W tym rozdziale będziemy rozważać tylko ciągi liczbowe $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$, gdzie $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. W przypadku, gdy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mówimy o *ciągach zespolonych*, zaś w przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ — o *ciągach rzeczywistych*.

Obserwacja 2.1.1. W praktyce ciąg możemy zadać na następujące sposoby:

- *Wzorem ogólnym*, np. $a_n := 1/n$ lub $a_n := n$.
- *Wzorem rekurencyjnym*, np.

$a_1 := a$, $a_{n+1} := a_n + r$, $n \in \mathbb{N}$ (ciąg arytmetyczny), lub
$a_1 := a$, $a_{n+1} := a_n q$, $n \in \mathbb{N}$ (ciąg geometryczny), lub
$a_1 := 0$, $a_2 := 1$, $a_{n+1} := a_{n-1} + a_n$, $n \in \mathbb{N}_2$ (ciąg Fibonacciego [1], $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$).

Oczywiście, bardzo często ciąg dany wzorem rekurencyjnym może być również zadany wzorem ogólnym (np. $a_n := a + (n-1)r$, czy $a_n := aq^{n-1}$), choć wzór rekurencyjny jest na ogół prostszy.

Ćwiczenie: Znaleźć wzór ogólny dla ciągu Fibonacciego.

- Poprzez opis, np. $a_n :=$ n-ta liczba pierwsza.

Definicja 2.1.2. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ jest *zbieżny* do liczby $a \in \mathbb{C}$, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant N} : |a_n - a| \leqslant \varepsilon. \quad [2] \tag{*}$$

Piszemy wtedy $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$ lub $a_n \longrightarrow a$, a liczbę a nazywamy *granicą ciągu*.

Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ jest *ciągiem Cauchy'ego*, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n,m\geqslant N} : |a_n - a_m| \leqslant \varepsilon.$$

Obserwacja 2.1.3. Jest rzeczą widoczną, iż skończona liczba początkowych wyrazów ciągu nie ma wpływu na jego zbieżność (i na granicę) oraz na to, czy ciąg jest Cauchy'ego. Mówimy, że własność W zachodzi *dla prawie wszystkich wyrazów ciągu* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, jeżeli istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że a_n ma własność W dla $n \geqslant N$. Z tego też powodu poniżej, gdy zakładamy, że jakaś własność zachodzi dla wszystkich wyrazów ciągu, możemy założyć, że zachodzi dla prawie wszystkich wyrazów.

Obserwacja 2.1.4 (Ćwiczenie). (a) Ciąg może być zbieżny tylko do jednej granicy.

(b) Jeżeli $a_n = c = \text{const}$, $n \in \mathbb{N}$, to $a_n \longrightarrow c$.

(c) $1/n \longrightarrow 0$.

(d) Każdy ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy'ego.
Istotnie, $|a_n - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a_m - a|$.

(e) Każdy ciąg Cauchy'ego jest *ograniczony*, tzn. istnieje $C > 0$ takie, że $|a_n| \leqslant C$ dla $n \in \mathbb{N}$.
Istotnie, jeżeli $|a_n - a_m| \leqslant 1$ dla $n, m \geqslant N$, to $|a_n| \leqslant \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$, $n \in \mathbb{N}$.

(f) Jeżeli $a_n \longrightarrow a$, to $|a_n| \longrightarrow |a|$.
Istotnie, $\big||a_n| - |a|\big| \leqslant |a_n - a|$.

(g) Jeżeli $a_n \longrightarrow a$ oraz $|a_n| \leqslant C$, $n \in \mathbb{N}$, to $|a| \leqslant C$.
Istotnie, $|a| \leqslant |a_n| + |a_n - a| \leqslant C + |a_n - a|$.

---

[1] Leonardo Fibonacci (1175–1250).

[2] Innymi słowy: $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant N} : a_n \in \overline{K}(a, \varepsilon)$. Zauważmy, że warunek (*) jest równoważny warunkowi $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant N} : |a_n - a| < \varepsilon$.

(h) Jeżeli $a_n \longrightarrow a$, to $\alpha a_n \longrightarrow \alpha a$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{C}$.

Istotnie, $|\alpha a_n - \alpha a| = |\alpha||a_n - a|$.

(i) Jeżeli $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow a$, to $a_n + b_n \longrightarrow a + b$.

Istotnie, $|a_n + b_n - (a + b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b|$.

(j) Dla $(a_n)_{n=1}^\infty$, $(b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ oraz $a, b \in \mathbb{R}$ mamy: $a_n + ib_n \longrightarrow a + ib \iff a_n \longrightarrow a,\ b_n \longrightarrow b$.

Podobnie, ciąg $(a_n + ib_n)_{n=1}^\infty$ ($a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$) jest ciągiem Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy $(a_n)_{n=1}^\infty$ i $(b_n)_{n=1}^\infty$ są ciągami Cauchy'ego.

Istotnie, $|a_n + ib_n - (a + ib)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b|$ oraz $\max\{|a_n - a|, |b_n - b|\} \leqslant |a_n + ib_n - (a + ib)|$.

(k) Jeżeli $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow a$, to $a_n b_n \longrightarrow ab$.

Istotnie, wiemy, że ciągi $(a_n)_{n=1}^\infty$ i $(b_n)_{n=1}^\infty$ są ograniczone. Niech $|a_n|, |b_n| \leqslant C$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $|a_n b_n - ab| \leqslant |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \leqslant C(|a_n - a| + |b_n - b|)$.

(l) Jeżeli $a_n \longrightarrow a$ i $a \neq 0$, to $1/a_n \longrightarrow 1/a$.

Istotnie, istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $|a_n| \geqslant |a|/2$, $n \geqslant N$. Wtedy dla $n \geqslant N$ mamy $|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}| = \frac{|a_n - a|}{|a_n a|} \leqslant \frac{4}{|a|^2}|a_n - a|$.

(m) Dla $(a_n)_{n=1}^\infty$, $(b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ oraz $a, b \in \mathbb{R}$, jeżeli $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow b$ i $a < b$, to $a_n < b_n$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

(n) Dla $(a_n)_{n=1}^\infty$, $(b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ oraz $a, b \in \mathbb{R}$, jeżeli $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow b$ i $a_n \leqslant b_n$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to $a \leqslant b$.

(o) (Twierdzenie o trzech ciągach) Jeżeli $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$, oraz $a_n \longrightarrow g$ i $c_n \longrightarrow g$, to $b_n \longrightarrow g$.

(p) Jeżeli ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ jest rosnący i ograniczony od góry, to jest zbieżny i $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_1, a_2, \dots\}$.

(q) Jeżeli ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ jest malejący i ograniczony od dołu, to jest zbieżny i $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_1, a_2, \dots\}$.

(r) Jeżeli $a_n \longrightarrow a$, to $a_{n_k} \longrightarrow a$ dla dowolnego podciągu $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$.

Istotnie, jeżeli $|a_n - a| \leqslant \varepsilon$ dla $n \geqslant N$, to $|a_{n_k} - a| \leqslant \varepsilon$ dla $k \geqslant N$ (ponieważ $n_k \geqslant k$).

(s) Jeżeli ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ jest monotoniczny, to następujące warunki są równoważne:

- (i) ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty$ jest zbieżny;
- (ii) ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty$ jest ograniczony;
- (iii) istnieje podciąg $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ zbieżny;
- (iv) istnieje podciąg $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ ograniczony.

(t) Podciąg ciągu Cauchy'ego jest ciągiem Cauchy'ego.

(u) Jeżeli $(a_n)_{n=1}^\infty$ jest ciągiem Cauchy'ego oraz $a_{n_k} \longrightarrow a$, to $a_n \longrightarrow a$.

Istotnie, jeżeli $|a_n - a| \leqslant \varepsilon/2$ dla $n \geqslant N$ i $|a_{n_k} - a| \leqslant \varepsilon/2$ dla $k \geqslant N$, to $|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{n_N}| + |a_{n_N} - a| \leqslant \varepsilon$ dla $n \geqslant N$.

(v) Jeżeli $\mathbb{N} = A \cup B$, gdzie $A \cap B = \varnothing$, $A = \{n_1, n_2, \dots\}$, $n_1 < n_2 < \dots$, $B = \{m_1, m_2, \dots\}$, $m_1 < m_2 < \dots$, oraz $a_{n_k} \longrightarrow a$ i $a_{m_k} \longrightarrow a$, to $a_n \longrightarrow a$.

Obserwacja 2.1.5 (Ćwiczenie)**.** Rozważmy *ciąg geometryczny* $(q^n)_{n=1}^\infty$, gdzie $q \in \mathbb{C}$. Wtedy:

- dla $|q| < 1$ ciąg jest zbieżny do 0,
- dla $|q| > 1$ ciąg jest rozbieżny,
- dla $q = 1$ ciąg jest zbieżny do 1,
- dla $q = -1$ ciąg jest rozbieżny.

Ćwiczenie* 2.1.6. Niech $q \in \mathbb{T}$. Kiedy zbiór $\{q^n : n \in \mathbb{Z}\}$ jest gęsty w $\mathbb{T}$, tzn. dla dowolnych $z_0 \in \mathbb{T}$ i $\varepsilon > 0$ istnieje $n \in \mathbb{Z}$ takie, że $|q^n - z_0| \leqslant \varepsilon$.

Twierdzenie 2.1.7 (Twierdzenie Bolzano (3)–Weierstrassa (4))**.** *Z dowolnego ciągu ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny.*

W szczególności, każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.

Dowód. Wystarczy rozważyć *ciąg rzeczywisty* $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$. Istotnie, załóżmy, że to wiemy i niech $(a_n + ib_n)_{n=1}^\infty$ będzie zespolonym ciągiem Cauchy'ego. Wiemy, że $(a_n)_{n=1}^\infty$ i $(b_n)_{n=1}^\infty$ są rzeczywistymi ciągami

(3) Bernhard Bolzano (1781–1848).
(4) Karl Weierstrass (1815–1897).

Cauchy'ego. W takim razie $a_{n_k} \longrightarrow a$ dla pewnego podciągu $(n_k)_{k=1}^\infty$. Ciąg $(b_{n_k})_{k=1}^\infty$ jest również ciągiem Cauchy'ego. w takim razie istnieje jego podciąg $(b_{n_{k_\ell}})_{\ell=1}^\infty$ zbieżny do pewnego b. Oczywiście, $a_{n_{k_\ell}} \longrightarrow a$. Ostatecznie, $a_{n_{k_\ell}} + ib_{n_{k_\ell}} \longrightarrow a + ib$.

Wracamy do ciągu rzeczywistego. Możemy założyć, że $-c \leqslant a_n \leqslant c$, $n \in \mathbb{N}$, dla pewnego $c > 0$. Niech $I_1 = [p_1, q_1] := [-c, c]$, $n_1 := 1$. Któryś z przedziałów $[-c, 0]$ lub $[0, +c]$ musi zawierać nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Oznaczamy go przez $I_2 = [p_2, q_2]$ i wybieramy $n_2 > 1$ takie, że $a_{n_2} \in I_2$. Teraz dzielimy I_2 na pół i powtarzamy rozumowanie. Dostajemy zstępujący ciąg przedziałów $I_k = [p_k, q_k]$, $k \in \mathbb{N}$, i podciąg $p_k \leqslant a_{n_k} \leqslant q_k$, $k \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że ciąg $(p_k)_{k=1}^\infty$ jest rosnący i ograniczony, zaś ciąg $(q_k)_{k=1}^\infty$ jest malejący i ograniczony. Wiemy, że $p_k \longrightarrow p$, $q_k \longrightarrow q$ oraz $q_k - p_k = \frac{c}{2^{k-2}}$. Stąd $p = q$. Teraz z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że $a_{n_k} \longrightarrow p$. $\square$

Definicja 2.1.8. Niech $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty$ jest *zbieżny do* $+\infty$ (odp. $-\infty$), jeżeli

$$\forall_{M\in\mathbb{R}}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant N} : a_n \geqslant M \text{ (odp. } a_n \leqslant M);$$

piszemy wtedy $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ (odp. $-\infty$), lub $a_n \longrightarrow +\infty$ (odp. $-\infty$).

Obserwacja 2.1.9. Korzystając z Obserwacji 1.7.2(h) dostajemy następujący ważny wynik.

Niech $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z góry (odp. z dołu). Wtedy istnieje ciąg rosnący (odp. malejący) $(a_n)_{n=1}^\infty \subset A$ taki, że $a_n \longrightarrow \sup A$ (odp. $a_n \longrightarrow \inf A$).

Niech $(a_n)_{n=1}^\infty$, $(b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$, $a_n \longrightarrow a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b_n \longrightarrow b \in \overline{\mathbb{R}}$. Pojawiają się naturalne pytania, czy i do czego są zbieżne ciągi $a_n + b_n$, $a_n b_n$, a_n/b_n.

Obserwacja 2.1.10. (a) Jeżeli $a + b$ ma sens, to $a_n + b_n \longrightarrow a + b$.

Istotnie, przypadek $a = b = \pm\infty$ jest oczywisty. Przypadek $a, b \in \mathbb{R}$ jest nam już znany. Przyjmijmy, że np. $a \in \mathbb{R}$, $b = +\infty$. Wtedy $a + b = +\infty$. Ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty$ musi być ograniczony, $|a_n| \leqslant C$, $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli $b_n \geqslant 2M$ dla $n \geqslant N$ i dla pewnego $M \geqslant C$, to $a_n + b_n \geqslant 2M - C \geqslant M$, $n \geqslant N$, a wiec $a_n + b_n \longrightarrow +\infty$.

Podobnie postępujemy w przypadkach ($a = +\infty$, $b \in \mathbb{R}$), ($a \in \mathbb{R}$, $b = -\infty$), ($a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$) — Ćwiczenie.

Jeżeli $a = \pm\infty$, $b = \mp\infty$ dostajemy *symbol nieoznaczony* $\infty - \infty$. Nieoznaczoność tego symbolu rozumiemy w ten sposób, że:

— dla dowolnego $g \in \overline{\mathbb{R}}$ istnieją ciągi $(a_n)_{n=1}^\infty$, $(b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ takie, że $a_n \longrightarrow +\infty$, $b_n \longrightarrow -\infty$ i $a_n + b_n \longrightarrow g$,

— istnieją ciągi $(a_n)_{n=1}^\infty$, $(b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ takie, że $a_n \longrightarrow +\infty$, $b_n \longrightarrow -\infty$ i ciąg $(a_n + b_n)_{n=1}^\infty$ nie jest zbieżny (ani do granicy skończonej, ani nieskończonej).

Ćwiczenie: Zilustrować powyższe przypadki konkretnymi przykładami.

(b) Jeżeli $a \cdot b$ ma sens, to $a_n \cdot b_n \longrightarrow a \cdot b$.

Jeżeli ($a = 0$, $b = \pm\infty$) lub ($a = \pm\infty$, $b = 0$) dostajemy *symbol nieoznaczony* $0 \cdot \infty$.

(c) Jeżeli $\frac{a}{b}$ ma sens, to $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b}$.

Jeżeli $a = b = 0$, dostajemy *symbol nieoznaczony* $\frac{0}{0}$. Jeżeli $a, b \in \{-\infty, +\infty\}$, dostajemy

Ćwiczenie: w (b) i (c) uzupełnić dowody oraz zilustrować „nieoznaczoność" stosownymi przykładami.

2.2. Pierwiastkowanie i potęgowanie

Twierdzenie 2.2.1. *Dla dowolnych* $a \in \mathbb{R}_+$ *i* $n \in \mathbb{N}$ *istnieje dokładnie jedna liczba* $p \in \mathbb{R}_+$ *taka, że* $a = p^n$.

Piszemy $p =: \sqrt[n]{a}$ i nazywamy p *pierwiastkiem* n*-tego stopnia z* a.

Dowód. Przypadek $a = 0$ jest oczywisty. Zakładamy, że $a > 0$ oraz $n \geqslant 2$. Jedyność wynika z tego, że jeżeli $0 < p_1 < p_2$, to $p_1^n < p_2^n$ (korzystamy z (P4)). Przypadek $a = 1$ jest oczywisty, więc zakładamy dalej, że $a \neq 1$. Zauważmy, że możemy również założyć, że $a > 1$. Istotnie, jeżeli przyjmiemy, że umiemy już obliczać pierwiastek n-tego stopnia dla $a > 1$ i weźmiemy $0 < a < 1$, to wtedy wiemy, że istnieje $q \in \mathbb{R}_{>0}$ takie, że $q^n = 1/a$, a stąd $(1/q)^n = a$. Niech więc $a > 1$. Aby wykazać istnienie p definiujemy

$$A := \{q \in \mathbb{R}_{>0} : q^n \leqslant a\}.$$

Oczywiście, $1 \in A$. Ponadto, jeżeli $q \in A$, to $q \leqslant a$ (dla $q > a$, na podstawie (P4) mamy $q^n > a^n > a$), a więc A jest ograniczony z góry. Niech $p := \sup A$. Wiemy, że istnieje rosnący ciąg $(q_s)_{s=1}^\infty \subset A$ taki, że

$q_s \longrightarrow p$. Stąd $q_s^n \longrightarrow p^n \leqslant a$, a więc $p \in A$. Pokażemy, że gdyby było $p^n < a$, to wtedy dla pewnego $h > 0$ mielibyśmy $(p+h)^n < a$, co prowadzi do sprzeczności. Istotnie,

$$(p+h)^n - p^n = h\big((p+h)^{n-1} + (p+h)^{n-2}p + \dots + p^{n-1}\big) < nh(p+h)^{n-1}.$$

Biorąc $h := \min\big\{1, \frac{a-p^n}{n(p+1)^{n-1}}\big\}$, dostajemy $(p+h)^n < p^n + hn(p+h)^{n-1} \leqslant a$. $\square$

Obserwacja 2.2.2 (Ćwiczenie)**.** Dla $a, b \geqslant 0$ oraz $m, n \in \mathbb{N}$ mamy:

(a) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$.

(b) $\sqrt[nm]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$.

(c) Jeżeli $b > 0$, to $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

(d) Jeżeli $a < b$, to $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

(e) Jeżeli $\mathbb{R}_+ \ni a_s \longrightarrow a$, to $\sqrt[n]{a_s} \longrightarrow \sqrt[n]{a}$.

Istotnie, przypadek $a = 0$ jest elementarny (Ćwiczenie). Jeżeli $a > 0$, to istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_s \geqslant a/2$ dla $s \geqslant N$. Wtedy dla $s \geqslant N$ mamy

$$|\sqrt[n]{a_s} - \sqrt[n]{a}| = \frac{|a_s - a|}{(\sqrt[n]{a_s})^{n-1} + (\sqrt[n]{a_s})^{n-2}\sqrt[n]{a} + \dots + (\sqrt[n]{a})^{n-1}} \leqslant \frac{|a_s - a|}{n(\sqrt[n]{a/2})^{n-1}}.$$

(f) Jeżeli $0 < a < 1$, to $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n+1]{a}$.

(g) Jeżeli $a > 1$, to $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n+1]{a}$.

Obserwacja 2.2.3. Jeżeli n jest nieparzyste, to definicję $\sqrt[n]{a}$ można rozszerzyć do $a < 0$, kładąc $\sqrt[n]{a} := -\sqrt[n]{-a}$. Istotnie, $(-\sqrt[n]{-a})^n = (-1)^n \cdot (-a) = a$. Nie będziemy korzystać z tego rozszerzenia.

Definicja 2.2.4. Dla $a > 0$ i $q := \ell/m \in \mathbb{Q}$, $\ell \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, kładziemy $a^q := (\sqrt[m]{a})^\ell$.

Łatwo sprawdzić (Ćwiczenie), że definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od przedstawienia liczby q w postaci ułamka.

Obserwacja 2.2.5 (Ćwiczenie)**.** Dla $a, b > 0$ i $q, q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ mamy:

(a) $1^q = 1$.

(b) $a^0 = 1$.

(c) $(a \cdot b)^q = a^q \cdot b^q$.

(d) $a^{q_1+q_2} = a^{q_1} \cdot a^{q_2}$; w szczególności, $a^{-q} = 1/a^q$.

(e) $(a^{q_1})^{q_2} = a^{q_1 q_2}$.

(f) Jeżeli $q > 0$ i $a < b$, to $a^q < b^q$; w szczególności, dla $q \in \mathbb{Q}_{>0}$, funkcja $\mathbb{R}_{>0} \ni x \longmapsto x^q \in \mathbb{R}_{>0}$ jest ściśle rosnąca.

(g) Jeżeli $q < 0$ i $a < b$, to $a^q > b^q$; w szczególności, dla $q \in \mathbb{Q}_{<0}$, funkcja $\mathbb{R}_{>0} \ni x \longmapsto x^q \in \mathbb{R}_{>0}$ jest ściśle malejąca.

(h) Jeżeli $a > 1$ i $q_1 < q_2$, to $a^{q_1} < a^{q_2}$; w szczególności, dla $a > 1$, funkcja $\mathbb{Q} \ni x \longmapsto a^x \in \mathbb{R}_{>0}$ jest ściśle rosnąca.

(i) Jeżeli $0 < a < 1$ i $q_1 < q_2$, to $a^{q_1} > a^{q_2}$; w szczególności, dla $0 < a < 1$, funkcja $\mathbb{Q} \ni x \longmapsto a^x \in \mathbb{R}_{>0}$ jest ściśle malejąca.

Obserwacja 2.2.6. Teraz stoimy przed pewnym wyborem dotyczącym definicji a^x dla $x \in \mathbb{R}$. Mamy dwie drogi:

• Odłożyć definicję a^x do momentu wprowadzenia funkcji eksponens w podrozdziale 6.5 i zdefiniować $a^x := e^{x \ln a}$, $x \in \mathbb{R}$.

• Zdefiniować już teraz a^x, być może mniej elegancko, ale za to uzyskując już teraz możliwość korzystania z takich potęg.

Wybieramy drugą drogę.

Definicja 2.2.7. Dla liczb $a \geqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$ definiujemy

$$a^x := \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q} : q \leqslant x\}$$

(Ćwiczenie: zbiór po prawej stronie jest niepusty i ograniczony od góry). Dla $0 < a < 1$, $x \in \mathbb{R}$, definiujemy $a^x := \big(\frac{1}{a}\big)^{-x}$.

W wyrażeniu a^x liczbę a nazywamy *podstawą*, zaś liczbę x *wykładnikiem* potęgi a^x.

Obserwacja 2.2.8. (a) Jeżeli $x \in \mathbb{Q}$, to powyższe a^x zgadza się z poprzednią definicją.

(b) $1^x = 1$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

(c) Dla $a > 1$ oraz $x \in \mathbb{R}$ istnieje ciąg $(q_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ taki, że $q_n \nearrow x$ oraz $a^{q_n} \nearrow a^x$.

Istotnie, przypadek $x \in \mathbb{Q}$ jest trywialny. Jeżeli $x \notin \mathbb{Q}$, to, wobec definicji a^x, istnieje ciąg $(q_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ taki, że $a^{q_n} \nearrow a^x$. Wobec, Obserwacji 2.2.5(h) musi być $q_n \leqslant q_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Gdyby $q_n \longrightarrow x^* < x$, to dla $b, c \in \mathbb{Q}$, $x^* < b < c < x$ mielibyśmy $a^c > a^b > a^{q_n}$, $n \in \mathbb{N}$, a więc $a^b > a^c \geqslant a^x$; sprzeczność.

Twierdzenie 2.2.9. *Niech $a > 0$, $(b_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$.*

(a) $\sqrt[n]{a} \longrightarrow 1$.

(b) *Jeżeli $b_n \longrightarrow \pm\infty$, to $a^{1/b_n} \longrightarrow 1$.*

(c) *Jeżeli $b_n \longrightarrow 0$, to $a^{b_n} \longrightarrow 1$.*

(d) *Jeżeli $b_n \longrightarrow x \in \mathbb{R}$, to $a^{b_n} \longrightarrow a^x$.*

Dowód. (a) Przypadek $a = 1$ jest trywialny. Transformacja $a^x = (\frac{1}{a})^{-x}$ sprowadza dowód do przypadku $a > 1$. Niech $\sqrt[n]{a} = 1 + \delta_n$, $n \in \mathbb{N}$. Chcemy pokazać, że $\delta_n \longrightarrow 0$. Mamy $a = (1 + \delta_n)^n \geqslant 1 + n\delta_n$. Wynika stąd, że $0 < \delta_n \leqslant (a-1)/n$, $n \in \mathbb{N}$, i teraz wystarczy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach.

(b) Możemy założyć, że $a > 1$, $b_n \longrightarrow +\infty$. Możemy również założyć, że $b_n > 1$, $n \in \mathbb{N}$. Niech $k_n \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $k_n \leqslant b_n < k_n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że $k_n \longrightarrow +\infty$. Wobec (a) dostajemy $a^{1/k_n} \longrightarrow 1$. Ponieważ $1 < a^{1/b_n} \leqslant a^{1/k_n}$, wystarczy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach.

(c) Wynika z (b) — wyrazy ciągu $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ dzielimy na trzy grupy: wyrazy dodatnie, równe zero i ujemne. Jeżeli grupa dodatnia jest nieskończona, to stosujemy do niej (b). Jeżeli grupa ujemna jest nieskończona, to korzystamy z (b) dla wyrazów przeciwnych — zob. Obserwacja 2.1.4(v).

(d) Wobec definicji a^x możemy założyć, że $a > 1$. Niech $(q_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ będzie taki, jak w Obserwacji 2.2.8(c). Wtedy, na podstawie (c), mamy $a^{b_n} = a^{q_n} \cdot a^{b_n - q_n} \longrightarrow a^x$. □

Przykład 2.2.10. Niech $a_1, \dots, a_k \geqslant 0$. Wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n} = \max\{a_1, \dots, a_k\}$.

Istotnie, możemy założyć, że $\max\{a_1, \dots, a_k\} = a_k$. Wtedy

$$a_k \leqslant \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n} \leqslant \sqrt[n]{k a_k^n} = \sqrt[n]{k} a_k \longrightarrow a_k.$$

W kolejnym kroku uogólnimy Twierdzenie 2.2.9 na dowolne ciągi $(b_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$.

Twierdzenie 2.2.11. *Niech $a > 0$, $(b_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$.*

(a) *Dla dowolnego ciągu $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, jeżeli $b_n \longrightarrow +\infty$, to $a^{1/b_n} \longrightarrow 1$.*

(b) *Dla dowolnego ciągu $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, jeżeli $b_n \longrightarrow 0$, to $a^{b_n} \longrightarrow 1$.*

(c) *Jeżeli $b_n \longrightarrow b$, to $a^{b_n} \longrightarrow a^b$.*

(d) *Jeżeli ciąg $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony i $a_n \longrightarrow 1$, to $a_n^{b_n} \longrightarrow 1$.*

(e) *Jeżeli $b_n \longrightarrow b$, $a_n \longrightarrow a$, to $a_n^{b_n} \longrightarrow a^b$.*

Dowód. (a) Możemy założyć, że $a > 1$ i $b_n > 1$, $n \in \mathbb{N}$. Niech $k_n \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $k_n \leqslant b_n < k_n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że $k_n \longrightarrow +\infty$. Ponieważ $1 < a^{1/b_n} \leqslant a^{1/k_n}$, wystarczy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach.

(b) wynika z (a).

(c) Możemy założyć, że $a > 1$. Niech $q_n \in \mathbb{Q}$, $|q_n - b_n| \leqslant 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $q_n \longrightarrow b$. Wobec Twierdzenia 2.2.9(d) mamy $a^{q_n} \longrightarrow a^b$. Teraz, na podstawie (b), $a^{b_n} = a^{q_n} \cdot a^{b_n - q_n} \longrightarrow a^b$.

(d) Wyrazy ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dzielimy na trzy grupy: wyrazy > 1, wyrazy $= 1$ i wyrazy < 1. Wystarczy zająć się wyrazami pierwszej grupy. Niech $b_n \in [k, \ell]$, $n \in \mathbb{N}$, gdzie $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Wtedy $a_n^k \leqslant a_n^{b_n} \leqslant a_n^{\ell}$, $n \in \mathbb{N}$, i korzystamy z twierdzenia o trzech ciągach.

(e) Korzystamy z (c) i (d): $a_n^{b_n} = (a_n/a)^{b_n} \cdot a^{b_n} \longrightarrow a^b$. □

Teraz, korzystając z Twierdzeń 2.2.9(d) i 2.2.11(e), przenosimy Obserwację 2.2.5 na dowolne potęgi rzeczywiste.

Obserwacja 2.2.12 (Ćwiczenie)**.** Dla $a, b > 0$ i $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mamy:

(a) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$,

(b) $a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$; w szczególności, $a^{-x} = 1/a^x$,

(c) $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$,

(d) jeżeli $x > 0$ i $a < b$, to $a^x < b^x$; w szczególności, $p \in \mathbb{R}_{>0}$, funkcja $\mathbb{R}_{>0} \ni x \longmapsto x^p \in \mathbb{R}_{>0}$ jest ściśle rosnąca,

(e) jeżeli $x < 0$ i $a < b$, to $a^x > b^x$; w szczególności, dla $p \in \mathbb{R}_{<0}$, funkcja $\mathbb{R}_{>0} \ni x \longmapsto x^p \in \mathbb{R}_{>0}$ jest ściśle malejąca,

(f) jeżeli $a > 1$ i $x_1 < x_2$, to $a^{x_1} < a^{x_2}$; w szczególności, dla $a > 1$, funkcja $\mathbb{R} \ni x \longmapsto a^x \in \mathbb{R}_{>0}$ jest ściśle rosnąca,

(g) jeżeli $0 < a < 1$ i $x_1 < x_2$, to $a^{x_1} > a^{x_2}$; w szczególności, dla $0 < a < 1$, funkcja $\mathbb{R} \ni x \longmapsto a^x \in \mathbb{R}_{>0}$ jest ściśle malejąca.

W kontekście Twierdzenia 2.2.11(e), powstaje naturalne pytanie

$$\Big((x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R},\ (a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}_{>0},\ x_n \longrightarrow x \in \overline{\mathbb{R}},\ a_n \longrightarrow a \in [0, +\infty]\Big) \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n^{x_n} = ?$$

Prowadzi ono do kolejnych trzech symboli nieoznaczonych 1^∞, 0^0 i ∞^0:

$x \backslash a$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	1^∞	0	0
$(-\infty,0)$	$+\infty$	a^x	1	a^x	0
0	0^0	1	1	1	∞^0
$(0,+\infty)$	0	a^x	1	a^x	$+\infty$
$+\infty$	0	0	1^∞	$+\infty$	$+\infty$

Twierdzenie 2.2.13. (a) $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$.

(b) *Jeżeli* $a_n \longrightarrow +\infty$, *to* $a_n^{1/a_n} \longrightarrow 1$.

Dowód. (a) Niech $\sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n$, $n \in \mathbb{N}$. Chcemy pokazać, że $\delta_n \longrightarrow 0$. Mamy $n = (1+\delta_n)^n \geqslant 1 + \binom{n}{2}\delta_n^2$, a stąd $0 \leqslant \delta_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n}}$.

(b) Możemy założyć, że $a_n > 1$. Niech $k_n \in \mathbb{N}$, $k_n \leqslant a_n < k_n + 1$. Wtedy, korzystając z (a) oraz Twierdzenia 2.2.11(e) dostajemy.

$$1 \leqslant a_n^{1/a_n} \leqslant \Big((k_n+1)^{\frac{1}{k_n+1}}\Big)^{\frac{k_n+1}{k_n}} \longrightarrow 1^1 = 1. \qquad \square$$

Ćwiczenie 2.2.14. Znaleźć przykłady ilustrujące „nieoznaczoność" symboli 1^∞, 0^0 i ∞^0.

2.3. Liczba e

Twierdzenie 2.3.1. (a) *Niech*

$$e_n := \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wtedy $e_n < e_{n+1} < 3$, $n \in \mathbb{N}$. *w konsekwencji, na mocy Obserwacji 2.1.4*(p), *ciąg* $(e_n)_{n=1}^\infty$ *jest zbieżny. Jego granicę oznaczamy przez* e.

(b) *Niech*

$$s_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Wtedy $s_n \longrightarrow e$.

(c) *Dla dowolnego* $n \geqslant 2$ *istnieje* $t_n \in (0,1)$ *takie, że*

$$e = s_n + \frac{t_n}{n!n}.$$

(d) $e \notin \mathbb{Q}$.

(e) *Jeżeli* $a_n \longrightarrow \pm\infty$, *to* $(1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} \longrightarrow e$.

(f) *Jeżeli* $0 \neq a_n \longrightarrow 0$, *to* $(1 + a_n)^{1/a_n} \longrightarrow e$.

(g) $(1 + \frac{x}{n})^n \longrightarrow e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

(h) $e^x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, $x \geqslant 0$. ([5])

(i) *Dla dowolnego ciągu* $(h_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_*$ *takiego, że* $h_k \longrightarrow 0$ *mamy* $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{e^{x+h_k}-e^x}{h_k} = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Dowód. (a) Wobec wzoru Newtona dostajemy

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \dots + \frac{n(n-1)\dots 2\cdot 1}{n!}\frac{1}{n^n}$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \dots + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n}) + \dots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{n-1}{n}).$$

Wynika stąd, że jest to ciąg silnie rosnący. Ponadto,

$$2 \leqslant e_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

(b) Wiemy, że $e_n < s_n$ oraz dla $n \geqslant k$ dostajemy

$$e_n \geqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big) + \dots + \frac{1}{k!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big),$$

co przy $n \longrightarrow +\infty$, daje $e \geqslant s_k$.

(c) Mamy

$$s_{n+k} - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \dots + \frac{1}{(n+k)!} = \frac{1}{(n+1)!}\Big(1 + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{(n+2)\dots(n+k)}\Big)$$
$$\leqslant \frac{1}{(n+1)!}\Big(1 + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{(n+2)^{k-1}}\Big) < \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1},$$

co przy $k \longrightarrow +\infty$ daje

$$e - s_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n!n}\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

Pozostaje zauważyć, że $\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} < 1$.

(d) Jest oczywiste, że $e \notin \mathbb{N}$. Gdyby $e = \frac{m}{n}$ $(n \geqslant 2)$, to na podstawie (c) mielibyśmy $n!e - n!s_n = \frac{t_n}{n}$, przy czym lewa strona jest liczbą całkowitą, zaś prawa — liczbą z przedziału $(0,1)$; sprzeczność.

(e) Jeżeli $a_n \longrightarrow +\infty$, to możemy założyć, że $a_n > 1$, $n \in \mathbb{N}$. Niech $k_n \in \mathbb{N}$ będzie taki, że $k_n \leqslant a_n < k_n + 1$; oczywiście $k_n \longrightarrow +\infty$. Mamy

$$e = \frac{e}{1} \longleftarrow \frac{\Big(1+\frac{1}{k_n+1}\Big)^{k_n+1}}{1+\frac{1}{k_n+1}} \leqslant \Big(1+\frac{1}{a_n}\Big)^{a_n} \leqslant \Big(1+\frac{1}{k_n}\Big)^{k_n} \cdot \Big(1+\frac{1}{k_n}\Big) \longrightarrow e \cdot 1 = e.$$

Jeżeli $a_n = -b_n \longrightarrow -\infty$, to korzystamy z przekształcenia

$$\Big(1+\frac{1}{a_n}\Big)^{a_n} = \frac{1}{\Big(1-\frac{1}{b_n}\Big)^{b_n}} = \Big(\Big(1+\frac{1}{b_n-1}\Big)^{b_n-1}\Big)^{\frac{b_n}{b_n-1}}.$$

(f) Wynika z (e).

(g) Korzystamy z (f) z $a_n := x/n$: $e_n(x) := (1+\frac{x}{n})^n = \big((1+\frac{x}{n})^{\frac{n}{x}}\big)^x \longrightarrow e^x$.

(h) Niech $s_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Podobnie jak w dowodach (a) i (b), mamy:

$$e_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)x^2 + \dots + \frac{1}{k!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)x^k + \dots$$
$$+ \frac{1}{n!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{n-1}{n}\Big)x^n \leqslant s_n(x), \quad x \geqslant 0.$$

([5]) Uwaga: w przyszłości dowiemy się, że wzór ten zachodzi dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ — Przykład 5.6.11(a).

Z drugiej strony, dla $n \geqslant k$ dostajemy:

$$e_n(x) \geqslant 1 + x + \frac{1}{2!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)x^2 + \dots + \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)\dots\Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big)x^k,$$

co przy $n \longrightarrow +\infty$ i użyciu (g), daje $e^x \geqslant s_k(x)$, $x \geqslant 0$.

(i) Ponieważ $\frac{e^{x+h_k}-e^x}{h_k} - e^x\frac{e^{h_k}-1}{h_k}$, wystarczy tylko rozważyć przypadek $x = 0$, czyli pokazać, że $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{e^{h_k}-1}{h_k} = 1$. Możemy założyć, że $0 < h_k \leqslant 1$, $k \in \mathbb{N}$. Korzystając z (g), (h) oraz (b), dla $h = h_k$ mamy:

$$0 \leqslant \frac{e^h - 1}{h} - 1 = \frac{1}{h}\Big(\lim_{n\to\infty}\sum_{\ell=0}^{n}\frac{h^\ell}{\ell!} - 1 - h\Big) = \lim_{n\to\infty}\sum_{\ell=2}^{n}\frac{h^{\ell-1}}{\ell!} \leqslant h\lim_{n\to\infty}\sum_{\ell=2}^{n}\frac{1}{\ell!} = h\lim_{n\to\infty}(s_n - 2) \leqslant h(e-2),$$

skąd natychmiast wynika teza. □

Obserwacja 2.3.2. (a) $e \approx 2.718281828$.

(b) s_n przybliża e z błędem mniejszym niż $\frac{1}{n!n}$. Np. dla $n = 6$ mamy $\frac{1}{6!6} = \frac{1}{720\cdot 6} < 0.001$ i $s_6 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \approx 2.7181$.

Ćwiczenie: Dla jakiego n liczba e_n daje przybliżenie e z błędem < 0.001?

2.4. Granice górne i dolne

Niech $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ będzie dowolny i niech $\mathcal{S}(\boldsymbol{a}) := \{g \in \overline{\mathbb{R}} : \exists_{(a_{n_k})_{k=1}^\infty} : a_{n_k} \longrightarrow g\}$. Zauważmy, że:

— jeżeli ciąg jest nieograniczony od góry, to $+\infty \in \mathcal{S}(\boldsymbol{a})$,

— jeżeli jest nieograniczony od dołu, to $-\infty \in \mathcal{S}(\boldsymbol{a})$,

— jeżeli jest ograniczony, to na podstawie Twierdzenia Bolzano–Weierstrassa 2.1.7, $\mathcal{S}(\boldsymbol{a}) \neq \varnothing$.

Definiujemy *granicę górną i dolną* ciągu $\boldsymbol{a}$ jako

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n := \sup\mathcal{S}(\boldsymbol{a}), \quad \liminf_{n\to+\infty} a_n := \inf\mathcal{S}(\boldsymbol{a}).$$

Czasami używa się symboli $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, a_n$ i $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, a_n$.

Obserwacja 2.4.1. (a) $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n \leqslant \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$.

(b) Jeżeli $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = g \in \overline{\mathbb{R}}$, to $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = g$.

(c) $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$, $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n \in \mathcal{S}(\boldsymbol{a})$.

Istotnie, niech $g := \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$. Jeżeli $g = -\infty$, to $\mathcal{S}(\boldsymbol{a}) = \{-\infty\}$ i wtedy $a_n \longrightarrow g$.

Jeżeli $g \in \mathbb{R}$, to dla dowolnego $s \in \mathbb{N}$ znajdziemy $g' \in \mathcal{S}(\boldsymbol{a})$ takie, że $g - 1/s \leqslant g' \leqslant g$. Wiemy, że istnieje podciąg $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ taki, że $a_{n_k} \longrightarrow g'$. Znajdziemy więc wiec $k_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $|a_{n_k} - g'| \leqslant 1/s$ dla $k \geqslant k_0$. Biorąc $s = 1, 2, \dots$, budujemy podciąg $(a_{\ell_s})_{s=1}^\infty$ taki, że $|a_{\ell_s} - g| \leqslant 2/s$, $s \in \mathbb{N}$.

Jeżeli $g = +\infty$, dla dowolnego $s \in \mathbb{N}$ znajdziemy $g' \in \mathcal{S}(\boldsymbol{a})$ takie, że $g' \geqslant 2s$. Wiemy, że istnieje podciąg $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ taki, że $a_{n_k} \longrightarrow g'$. Znajdziemy więc wiec $k_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $a_{n_k} \geqslant s$ dla $k \geqslant k_0$. Biorąc $s = 1, 2, \dots$, budujemy podciąg $(a_{\ell_s})_{s=1}^\infty$ taki, że $a_{\ell_s} \geqslant s$, $s \in \mathbb{N}$.

Dowód dla $\liminf$ przebiega analogicznie.

(d) Jeżeli $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n =: g$, to $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = g$.

(e) Jeżeli $g := \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n < +\infty$, to dla dowolnego $\mathbb{R} \ni M > g$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n \leqslant M$ dla $n \geqslant N$.

(f) Jeżeli $g := \liminf\limits_{n\to+\infty} a_n > -\infty$, to dla dowolnego $\mathbb{R} \ni M < g$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n \geqslant M$ dla $n \geqslant N$.

Twierdzenie 2.4.2. *Niech $(a_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{R}_{>0}$. Wtedy*

$$\liminf_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \liminf_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

W szczególności, jeżeli $\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow g \in [0, +\infty]$, to $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow g$.

Dowód. Jeżeli $g_- := \liminf\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 0$, to ustalamy dowolnie $0 < g_1 < g_2 < g_-$. Wiemy, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant g_2$ dla $n \geqslant N$. Stąd $a_{N+k} \geqslant a_N g_2^k$, $k \in \mathbb{N}_0$, a więc $a_n \geqslant a_N g_2^{n-N}$, $n \geqslant N$. Wynika stąd, że $\sqrt[n]{a_n} \geqslant g_2 \sqrt[n]{\frac{a_N}{g_2^N}}$, $n \geqslant N$. Ponieważ $\sqrt[n]{\frac{a_N}{g_2^N}} \longrightarrow 1$, zatem istnieje $N_1 \geqslant N$ takie, że $\sqrt[n]{a_n} \geqslant g_1$, $n \geqslant N_1$.

Jeżeli $g_+ := \limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < +\infty$, to ustalamy dowolnie $g_+ < g_2' < g_1' < +\infty$ i rozumując jak powyżej wnioskujemy, że $\sqrt[n]{a_n} \leqslant g_1'$, $n \geqslant N_1'$. $\square$

Przykład 2.4.3. (a) Jeżeli $a_n := \frac{2+(-1)^n}{2^n}$, to $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \frac{1}{2}$, ale ciąg $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n=1}^{\infty}$ jest rozbieżny.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

Istotnie, bierzemy $a_n := \frac{n^n}{n!}$ i mamy $\frac{a_{n+1}}{a_n} = (1+\frac{1}{n})^n \longrightarrow e$.

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\binom{\alpha}{n}\right|} = 1$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$, gdzie $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

Istotnie, $\frac{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n}\right|} = \frac{|\alpha-n|}{n+1} \longrightarrow 1$.

ROZDZIAŁ 3

Przestrzenie metryczne

3.1. Przestrzenie metryczne

Definicja 3.1.1. *Przestrzenią metryczną* nazywamy parę (X, ϱ), gdzie X jest zbiorem, zaś $\varrho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ jest funkcją taką, że:

(a) (*oznaczoność*) $\forall_{x,y \in X} : (\varrho(x,y) = 0 \iff x = y)$,

(b) (*symetria*) $\forall_{x,y \in X} : \varrho(x,y) = \varrho(y,x)$,

(c) (*nierówność trójkąta*) $\forall_{x,y,z \in X} : \varrho(x,z) \leqslant \varrho(x,y) + \varrho(y,z)$.

Funkcję ϱ nazywamy *metryką (odległością)*. Jeżeli wiadomo o jaką metrykę chodzi, to piszemy X zamiast (X, ϱ).

Obserwacja 3.1.2. (a) $(\mathbb{R}, \varrho_{\mathbb{R}})$ jest przestrzenią metryczną, gdzie $\varrho_{\mathbb{R}}(x,y) := |x-y|$.

(b) $(\overline{\mathbb{R}}, \varrho_{\overline{\mathbb{R}}})$ jest przestrzenią metryczną, gdzie $\varrho_{\overline{\mathbb{R}}}(x,y) := |\varphi(x) - \varphi(y)|$, zaś $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow [-1,1]$ jest bijekcją daną wzorem (zob. Ćwiczenie 1.11.1).

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{x}{1+|x|}, & \text{jeżeli } x \in \mathbb{R} \\ \pm 1, & \text{jeżeli } x = \pm\infty \end{cases}.$$

Dla $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ i $a \in \overline{\mathbb{R}}$ mamy:

$$\varrho_{\overline{\mathbb{R}}}(a_n, a) \longrightarrow 0 \iff \begin{cases} a_n \longrightarrow a, & \text{jeżeli } a \in \mathbb{R} \\ a_n \longrightarrow \pm\infty, & \text{jeżeli } a = \pm\infty \end{cases}.$$

(c) $(\mathbb{C}, \varrho_{\mathbb{C}})$ jest przestrzenią metryczną, gdzie $\varrho_{\mathbb{C}}(z,w) := |z-w|$, $z, w \in \mathbb{C}$.

(d) Dowolny zbiór można zamienić w przestrzeń metryczną przy pomocy *metryki dyskretnej*

$$\varrho_d(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x = y \\ 1, & \text{jeżeli } x \neq y \end{cases}.$$

Przykład 3.1.3 (Sfera Riemanna)**.** Jako zbiór *sfera Riemanna* (1) to $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Rozszerzamy działania na $\widehat{\mathbb{C}}$:

$\infty + a = a + \infty := \infty$ dla dowolnego $a \in \mathbb{C}$,

$a \cdot \infty = \infty \cdot a := \infty$ dla dowolnego $a \in \widehat{\mathbb{C}}_*$,

$1/0 := \infty$, $1/\infty := 0$.

Sfera Riemanna $\widehat{\mathbb{C}}$ jest bijektywna z dwuwymiarową sferą euklidesową

$$\boldsymbol{S} := \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + (w - \tfrac{1}{2})^2 = (\tfrac{1}{2})^2\}$$

poprzez *rzut stereograficzny* $R : \boldsymbol{S} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$,

$$R(u,v,w) := \Big(\frac{u}{1-w}, \frac{v}{1-w}\Big), \quad (u,v,w) \in \boldsymbol{S} \setminus \{\boldsymbol{N}\}, \qquad R(\boldsymbol{N}) := \infty,$$

gdzie $\boldsymbol{N} := (0,0,1)$. Istotnie (Ćwiczenie),

$$R^{-1}(z) = \Big(\frac{x}{1+|z|^2}, \frac{y}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2}{1+|z|^2}\Big), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}, \qquad R^{-1}(\infty) := \boldsymbol{N}.$$

---

(1) Bernhard Riemann (1826–1866).

W szczególności, $\varrho_{\widehat{\mathbb{C}}}(a,b) := \varrho_{\mathbb{R}^3}(R^{-1}(a), R^{-1}(b))$, $a,b \in \widehat{\mathbb{C}}$, gdzie $\varrho_{\mathbb{R}^3}$ oznacza odległość euklidesową w $\mathbb{R}^3$ (2), jest metryką w $\widehat{\mathbb{C}}$. Nosi ona nazwę *metryki sferycznej*. Można pokazać (Ćwiczenie), że

$$\varrho_{\widehat{\mathbb{C}}}(a,b) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } a = b = \infty \\ \frac{1}{\sqrt{1+|a|^2}}, & \text{jeżeli } a \in \mathbb{C},\ b = \infty \\ \frac{1}{\sqrt{1+|b|^2}}, & \text{jeżeli } a = \infty,\ b \in \mathbb{C} \\ \frac{|a-b|}{\sqrt{1+|a|^2}\sqrt{1+|b|^2}}, & \text{jeżeli } a, b \in \mathbb{C} \end{cases}, \quad a, b \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

Dla ciągu $(z_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ oraz $z_0 \in \mathbb{C}$ mamy (Ćwiczenie):
$\varrho_{\hat{\mathbb{C}}}(z_n, z_0) \longrightarrow 0 \iff z_n \longrightarrow z_0$ (w zwykłym sensie).
$\varrho_{\hat{\mathbb{C}}}(z_n, \infty) \longrightarrow 0 \iff |z_n| \longrightarrow +\infty$.

Definicja 3.1.4. Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią metryczną. Dla $a \in X$ i $r > 0$ definiujemy:
- *kulę otwartą* $B_\varrho(a,r) = B(a,r) := \{x \in X : \varrho(a,x) < r\}$,
- *kulę domkniętą* $\overline{B}_\varrho(a,r) = \overline{B}(a,r) := \{x \in X : \varrho(a,x) \leqslant r\}$.

Mówimy, że zbiór $A \subset X$ jest *otwarty*, jeżeli dla dowolnego $a \in A$ istnieje $r > 0$ takie, że $B(a,r) \subset A$. Rodzinę wszystkich podzbiorów otwartych nazywamy *topologią* i oznaczamy $\operatorname{top}\varrho$ lub $\operatorname{top} X$, gdy metryka jest znana. Zbiór $A \subset X$ nazywamy *domkniętym*, jeżeli zbiór $X \setminus A$ jest otwarty. Rodzinę wszystkich podzbiorów domkniętych oznaczamy $\operatorname{cotop}\varrho$ lub $\operatorname{cotop} X$, gdy metryka jest znana.

Obserwacja 3.1.5 (Ćwiczenie). (a) W przestrzeni metrycznej $(\mathbb{R}, \varrho_{\mathbb{R}})$ mamy: $B(a,r) = (a-r, a+r)$, $\overline{B}(a,r) = [a-r, a+r]$.

(b) Dla $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ mamy: $A \in \operatorname{top}\varrho_{\overline{\mathbb{R}}} \iff A \cap \mathbb{R} \in \operatorname{top}\varrho_{\mathbb{R}}$ oraz
$+\infty \in A \Longrightarrow \exists_{M \in \mathbb{R}} : (M, +\infty] \subset A$,
$-\infty \in A \Longrightarrow \exists_{M \in \mathbb{R}} : [-\infty, M) \subset A$.

(c) W przestrzeni metrycznej $(\mathbb{C}, \varrho_{\mathbb{C}})$ mamy: $B(a,r) = K(a,r) =$ koło otwarte o środku w punkcie a i promieniu r; $\overline{B}(a,r) = \overline{K}(a,r) =$ koło domknięte o środku w punkcie a i promieniu r.

(d) W przestrzeni $(\widehat{\mathbb{C}}, \varrho_{\widehat{\mathbb{C}}})$ mamy $B(\infty, r) = \begin{cases} \widehat{\mathbb{C}}, & \text{jeżeli } r > 1 \\ \{\infty\} \cup \Big\{z \in \mathbb{C} : |z| > \sqrt{\frac{1}{r^2} - 1}\Big\}, & \text{jeżeli } 0 < r \leqslant 1 \end{cases}$.
Jak wyglądają kule $B(a,r)$, $a \in \mathbb{C}$?

(e) W przestrzeni z metryką dyskretną mamy

$$B(a,r) = \begin{cases} \{a\}, & \text{jeżeli } r \leqslant 1 \\ X, & \text{jeżeli } r > 1 \end{cases}, \quad \overline{B}(a,r) = \begin{cases} \{a\}, & \text{jeżeli } r < 1 \\ X, & \text{jeżeli } r \geqslant 1 \end{cases}.$$

(f) W dowolnej przestrzeni metrycznej (X, ϱ), dla dowolnych $a, b \in X$, $a \neq b$, jeżeli $r := \frac{\varrho(a,b)}{3}$, to $B(a,r) \cap B(b,r) = \varnothing$.

Istotnie, dla $x \in B(a,r)$ i $y \in B(b,r)$ mamy $\varrho(x,y) \geqslant \varrho(a,b) - \varrho(a,x) - \varrho(b,y) > \frac{r}{3}$.

(g) W dowolnej przestrzeni metrycznej (X, ϱ) kule otwarte są otwarte, zaś kule domknięte są domknięte.

Istotnie, jeżeli $x_0 \in B(a,r)$, to dla $x \in B(x_0, r - \varrho(a,x_0))$ mamy $\varrho(a,x) \leqslant \varrho(a,x_0) + \varrho(x_0,x) < r$, czyli $B(x_0, r - \varrho(a,x_0)) \subset B(a,r)$.

Jeżeli $x_0 \in X \setminus \overline{B}(a,r)$, to dla $x \in B(x_0, \varrho(a,x_0) - r)$ mamy $\varrho(a,x) \geqslant \varrho(a,x_0) - \varrho(x_0,x) > r$, czyli $B(x_0, \varrho(a,x_0) - r) \subset X \setminus \overline{B}(a,r)$.

(h) Rodzina $\mathcal{T} := \operatorname{top}\varrho$ ma następujące własności:
- $\varnothing, X \in \mathcal{T}$,
- $U_1, \dots, U_N \in \mathcal{T} \Longrightarrow U_1 \cap \dots \cap U_N \in \mathcal{T}$,
- $(U_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T} \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

(i) Rodzina $\mathcal{F} := \operatorname{cotop}\varrho$ ma następujące własności:
- $\varnothing, X \in \mathcal{F}$,
- $F_1, \dots, F_N \in \mathcal{F} \Longrightarrow F_1 \cup \dots \cup F_N \in \mathcal{F}$,

---

(2) $\varrho_{\mathbb{R}^3}(x,y) := \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}$, $x = (x_1,x_2,x_3)$, $y = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$.

- $(F_i)_{i\in I} \subset \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcap_{i\in I} F_i \in \mathcal{F}$.

(j) Jeżeli ϱ jest metryką, to $d := \min\{1, \varrho\}$ jest również metryką oraz $\operatorname{top}\varrho = \operatorname{top} d$.

(k) W *topologii dyskretnej* (tzn. topologii generowanej przez metrykę dyskretną) mamy $\operatorname{top}\varrho_d = \mathcal{P}(X) = \operatorname{cotop}\varrho_d$.

(l)* Niech $d := \varphi \circ \varrho$, gdzie $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ jest dowolną funkcją rosnącą taką, że:

- $\varphi(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,
- φ jest *wklęsła* (zob. § 5.9), tzn. $\varphi(tx + (1-t)y) \geqslant t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}_+$ i $t \in [0, 1]$ (np. $\varphi(x) := \sqrt{x}$).

Wtedy d jest metryką. Kiedy $\operatorname{top}\varrho = \operatorname{top} d$?

Definicja 3.1.6. (1) Dla dowolnego zbioru $A \subset X$ definiujemy:

$$\begin{aligned} \textit{wnętrze } A\text{:}\quad & \operatorname{int} A = A^\circ := \bigcup_{U\in\operatorname{top} X:\ U\subset A} U,\\ \textit{domknięcie } A\text{:}\quad & \operatorname{cl} A = \overline{A} := \bigcap_{F\in\operatorname{cotop} X:\ A\subset F} F,\\ \textit{brzeg } A\text{:}\quad & \partial A := \overline{A} \setminus \operatorname{int} A. \end{aligned}$$

(2) Każdy zbiór otwarty $U \subset X$ taki, że $a \in U$ nazywamy *otoczeniem otwartym punktu a*. Każdy zbiór $A \subset X$ taki, że $a \in \operatorname{int} A$ nazywamy *otoczeniem punktu a*.

(3) Mówimy, że zbiór $A \subset X$ jest

- *gęsty*, jeżeli $\overline{A} = X$,
- *brzegowy*, jeżeli $\operatorname{int} A = \varnothing$,
- *nigdziegęsty*, jeżeli $\operatorname{int}\overline{A} = \varnothing$,
- *ograniczony*, jeżeli istnieją $a \in X$ i $r > 0$ takie, że $A \subset B(a, r)$.

(4) Dla zbioru $A \subset X$ definiujemy jego *średnicę* $\operatorname{diam} A := \sup \varrho(A \times A)$, przy czym $\operatorname{diam}\varnothing := 0$.

(5) Dla $\varnothing \neq A \subset X$ i $x \in X$ kładziemy $\varrho(x, A) := \inf\{\varrho(x, a) : a \in A\}$.

(6) Mówimy, że punkt a jest *punktem skupienia zbioru A*, jeżeli dla dowolnego otoczenia U tego punktu mamy $A \cap (U \setminus \{a\}) \neq \varnothing$. Zbiór wszystkich punktów skupienia oznaczamy A'. Punkty z $A \setminus A'$ nazywamy *punktami izolowanymi zbioru A*.

(7) Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty \subset X$ jest zbieżny do punktu $a \in X$, jeżeli dla dowolnego otoczenia U punktu a istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n \in U$ dla $n \geqslant N$. Piszemy wtedy $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, lub $a_n \xrightarrow{\varrho} a$, lub $a_n \longrightarrow a$.

(8) Mówimy, że ciąg $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$ jest *ciągiem Cauchy'ego*, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n,m\geqslant N} : \varrho(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon.$$

(9) Mówimy, że (X, ϱ) jest przestrzenią zupełną, jeżeli każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.

(10) Mówimy, że dwie metryki $\varrho_1, \varrho_2 : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ są *równoważne* ($\varrho_1 \sim \varrho_2$), jeżeli $\operatorname{top}\varrho_1 = \operatorname{top}\varrho_2$. Jest to relacja równoważności. Własności niezmiennicze względem metryk równoważnych (np. zbieżność, ciągłość) nazywamy *własnościami topologicznymi* przestrzeni metrycznej (X, ϱ).

(11) Mówimy, że dwie metryki $\varrho_1, \varrho_2 : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ są *porównywalne*, jeżeli $\varrho_1 \leqslant c_1\varrho_2^{\alpha_1}$ i $\varrho_2 \leqslant c_2\varrho_1^{\alpha_2}$ dla pewnych stałych $c_1, c_2, \alpha_1, \alpha_2 > 0$. Porównywalność metryk jest również relacją równoważnościową. Własności niezmiennicze względem metryk porównywalnych (np. ograniczoność, jednostajna ciągłość) nazywamy *własnościami metrycznymi* przestrzeni (X, ϱ).

Obserwacja 3.1.7. (a) Dla dowolnych $a, b \in X$, $a \neq b$, istnieją otoczenia otwarte U_a, U_b takie, że $U_a \cap U_b = \varnothing$, czyli każda przestrzeń metryczna jest *przestrzenią Hausdorffa* (3).

(b) $A \in \operatorname{top} X \Longleftrightarrow A = \operatorname{int} A$.

(c) $a \in \operatorname{int} A \Longleftrightarrow \exists_{r>0} :\ B(a, r) \subset A$.

(d) $A \in \operatorname{cotop} X \Longleftrightarrow A = \overline{A}$.

(e) $a \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall_{r>0} :\ B(a, r) \cap A \neq \varnothing$.

Istotnie, przypuśćmy, że $B(a, r) \cap A = \varnothing$ dla pewnego $a \in \overline{A}$. Wtedy $X \setminus B(a, r)$ jest zbiorem domkniętym zawierającym zbiór A. Stąd $\overline{A} \subset X \setminus B(a, r)$ — sprzeczność. Niech teraz a będzie punktem

(3) Felix Hausdorff (1868–1942).

mającym własność po prawej stronie i przypuśćmy, że $a \notin \overline{A}$. Wtedy istnieje zbiór domknięty $F \supset A$ taki, że $a \notin F$. Musi więc istnieć $r > 0$ takie, że $B(a,r) \subset X \setminus F \subset X \setminus A$ — sprzeczność.

(f) $x_n \longrightarrow a \iff \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant N} : a_n \in B(a,\varepsilon) \iff \varrho(x_n,a) \longrightarrow 0$.

(g) Ciąg może mieć tylko jedną granicę.

(h) $a \in \overline{A} \iff \exists_{(x_n)_{n=1}^\infty \subset A} : x_n \longrightarrow a$.

(i) $a \in A' \iff \exists_{(x_n)_{n=1}^\infty \subset A\setminus\{a\}} : x_n \longrightarrow a$.

(j) Następujące warunki są równoważne:

(i) $\operatorname{top}\varrho_1 \subset \operatorname{top}\varrho_2$;

(ii) $\forall_{a\in X}\ \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0} : B_{\varrho_2}(a,\delta) \subset B_{\varrho_1}(a,\varepsilon)$;

(iii) $\forall_{(x_n)_{n=0}^\infty \subset X} : (x_n \xrightarrow{\varrho_2} x_0 \Longrightarrow x_n \xrightarrow{\varrho_1} x_0)$.

Istotnie, jest oczywiste, że (i) $\iff$ (ii). Przypuśćmy, że (ii) zachodzi oraz $x_n \xrightarrow{\varrho_2} a$. Niech $\delta > 0$ będzie dobrane do $\varepsilon > 0$ przy pomocy warunku (ii). Wtedy $x_n \in B_{\varrho_2}(a,\delta)$ dla $n \geqslant N$, co daje $x_n \in B_{\varrho_1}(a,\varepsilon)$ dla $n \geqslant N$. Oznacza to, że $x_n \xrightarrow{\varrho_1} a$.

Teraz załóżmy, że (iii) zachodzi. Przypuśćmy, że dla pewnych $a \in X$ i $\varepsilon > 0$ warunek (ii) nie zachodzi, tzn. istnieje ciąg $x_n \in B_{\varrho_2}(a,1/n) \setminus B_{\varrho_1}(a,\varepsilon)$. Znaczy to, że $x_n \xrightarrow{\varrho_2} a$, ale $x_n \overset{\varrho_1}{\not\longrightarrow} a$; sprzeczność.

(k) Metryki porównywalne są równoważne (ale nie odwrotnie — np. $\varrho \sim \min\{\varrho, 1\}$, ale metryki te nie muszą być porównywalne).

(l) Niech $\varnothing \neq A \subset X$. Wtedy $x \in \overline{A} \iff \varrho(x,A) = 0$.

(m) $|\varrho(x,A) - \varrho(y,A)| \leqslant \varrho(x,y)$, $x,y \in X$.

Istotnie, na podstawie nierówności trójkąta dla $a \in A$ mamy: $\varrho(x,A) \leqslant \varrho(x,a) \leqslant \varrho(x,y) + \varrho(y,a)$. Stąd $\varrho(x,A) \leqslant \varrho(x,a) \leqslant \varrho(x,y) + \varrho(y,A)$. Teraz wystarczy zamienić miejscami x i y.

(n) $|\varrho(a,b) - \varrho(a',b')| \leqslant \varrho(a,a') + \varrho(b,b')$, $a,a',b,b' \in X$.

(o) Jeżeli $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow b$, to $\varrho(a_n,b_n) \longrightarrow \varrho(a,b)$.

(p) Zbiór A jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{diam} A < +\infty$.

(q) Każdy ciąg Cauchy'ego jest ograniczony.

(r) Każdy ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy'ego.

(s) Jeżeli ciąg Cauchy'ego ma podciąg zbieżny, to jest cały zbieżny.

(t) $(\mathbb{K}, \varrho_{\mathbb{K}})$ jest przestrzenią zupełną.

Definicja 3.1.8. Niech (X,ϱ) będzie przestrzenią metryczną. Z dowolnego zbioru $Y \subset X$ robimy przestrzeń metryczną z *metryką indukowaną* $\varrho|_{Y\times Y}$.

Obserwacja 3.1.9. (a) Dla $a \in Y$ mamy $B_{\varrho|_{Y\times Y}}(a,r) = B_\varrho(a,r) \cap Y$.

(b) $A \in \operatorname{top}(\varrho|_{Y\times Y}) \iff \exists_{U\in\operatorname{top}\varrho} : A = U \cap Y$.

(c) $A \in \operatorname{cotop}(\varrho|_{Y\times Y}) \iff \exists_{F\in\operatorname{cotop}\varrho} : A = F \cap Y$.

(d) Jeżeli $(Y, \varrho|_{Y\times Y})$ jest przestrzenią zupełną, to Y jest domknięte w X.

(e) Jeżeli (X,ϱ) jest przestrzenią zupełną i Y jest domknięte w X, to $(Y, \varrho|_{Y\times Y})$ jest przestrzenią zupełną.

(f) Jeżeli $F \subset \mathbb{R}$ jest domknięty, to jest przestrzenią zupełną.

3.2. Przestrzenie zwarte

Definicja 3.2.1. Mówimy, że przestrzeń metryczna (X,ϱ) jest *zwarta* jeżeli dla dowolnego ciągu $(a_n)_{n=1}^\infty \subset X$ istnieje podciąg $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ oraz punkt $a \in X$ takie, że $a_{n_k} \longrightarrow a$.

Dla dowolnej przestrzeni metrycznej (X,ϱ), jeżeli $(Y, \varrho|_{Y\times Y})$ jest przestrzenią zwartą, to mówimy, że Y jest *zwartym podzbiorem* X.

Obserwacja 3.2.2. (a) Dowolna przestrzeń zwarta jest zupełna.

(b) Jeżeli $Y \subset X$ jest zbiorem zwartym, to Y jest domknięte w X.

(c) Jeżeli (X,ϱ) jest przestrzenią zwartą i Y jest domknięte w X, to Y jest zbiorem zwartym.

(d) Jeżeli X jest przestrzenią zwartą to dla dowolnych ciągów $(a_n)_{n=1}^\infty$, $(b_n)_{n=1}^\infty \subset X$ istnieją podciągi $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$, $(b_{n_k})_{k=1}^\infty$ oraz $a, b \in X$ takie, że $a_{n_k} \longrightarrow a$, $b_{n_k} \longrightarrow b$.

(e) Jeżeli (X,ϱ) jest przestrzenią zwartą, to $\operatorname{diam} X = \max \varrho(X \times X) < +\infty$.

(f) $(\overline{\mathbb{R}}, \varrho_{\overline{\mathbb{R}}})$ jest przestrzenią zwartą.

(g) $(\widehat{\mathbb{C}}, \varrho_{\widehat{\mathbb{C}}})$ jest przestrzenią zwartą.

Twierdzenie 3.2.3 (Cantor)**.** *Niech* $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ *będzie ciągiem niepustych zbiorów zwartych w przestrzeni metrycznej* (X, ϱ) *takim, że* $K_{n+1} \subset K_n$, $n \in \mathbb{N}$. *Wtedy zbiór* $K := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ *jest niepustym zbiorem zwartym oraz* $\operatorname{diam} K_n \longrightarrow \operatorname{diam} K$. *W szczególności, jeżeli* $\operatorname{diam} K_n \longrightarrow 0$, *to* K *musi być jednopunktowy.*

Dowód. Oczywiście K jest zwarty. Niech $a_n, b_n \in K_n$ będą takie, że $\operatorname{diam} K_n = \varrho(a_n, b_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Wobec zwartości K_1 istnieją podciągi $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, $(b_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ oraz $a, b \in K_1$ takie, że $a_{n_k} \longrightarrow a$, $b_{n_k} \longrightarrow b$. Ponieważ $a_n, b_n \in K_N$ dla $n \geqslant N$, zatem musi być $a, b \in K$. Oznacza to w szczególności, że $K \neq \varnothing$. Ponadto, $\operatorname{diam} K \geqslant \varrho(a, b) = \lim_{n \to +\infty} \varrho(a_{n_k}, b_{n_k}) = \lim_{n \to +\infty} \operatorname{diam} K_n \geqslant \operatorname{diam} K$. □

Przykład 3.2.4 (Zbiór Cantora)**.** Niech $C_0 := [0, 1]$. Dzielimy C_0 na trzy równe przedziały domknięte i wyrzucamy wnętrze środkowego. Niech $C_1 := [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. W kolejnym kroku, z każdego z dwóch przedziałów tworzących C_1 wyrzucamy wnętrze środkowego z trzech równych przedziałów, na które dzielimy ten przedział, tzn. $C_2 := [0, \frac{1}{3^2}] \cup [\frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^2}] \cup [\frac{6}{3^2}, \frac{7}{3^2}] \cup [\frac{8}{3^2}, \frac{9}{3^2}]$. Kontynuujemy: $C_n := \bigcup_{j=1}^{2^n} C_{n,j}$, gdzie $C_{n,j}$, $j = 1, \dots, 2^n$, są przedziałami domkniętymi, parami rozłącznymi, każdy o długości $\frac{1}{3^n}$. Oczywiście, $C_n \neq \varnothing$ oraz $C_{n+1} \subset C_n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Teraz *zbiór Cantora* definiujemy jako $C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$. Na podstawie Twierdzenia Cantora 3.2.3, C jest niepustym zbiorem zwartym.

Twierdzenie 3.2.5. *Przestrzeń metryczna* (X, ϱ) *jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy z dowolnego pokrycia otwartego* $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ *tej przestrzeni (tzn.* $X = \bigcup_{i \in I} U_i$*) można wybrać podpokrycie skończone.*

Dowód. Oczywiście możemy założyć, że X jest zbiorem nieskończonym.

($\Longleftarrow$): Przypuśćmy, że $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ jest ciągiem, z którego nie da się wybrać podciągu zbieżnego. Możemy założyć, że $a_n \neq a_m$ dla dowolnych $n \neq m$. Niech $U_n := X \setminus \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$, $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście $U_n \subset U_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = X$ oraz $\bigcup_{n=1}^{N} U_n = U_N \subsetneq X$ dla dowolnego $N \in \mathbb{N}$. Wystarczy jeszcze zauważyć, że każdy zbiór U_n jest otwarty, co da sprzeczność. Istotnie, przypuśćmy, że dla pewnych $n \in \mathbb{N}$ i $a \in U_n$ mamy $B(a, r) \not\subset U_n$ dla dowolnego $r > 0$. W szczególności, istnieje $n_1 \geqslant n$ takie, że $a_{n_1} \in B(a, 1)$. Niech $0 < r_2 < \min\{\frac{1}{2}, \varrho(a, \{a_n, \dots, a_{n_1}\})\}$. Wtedy znajdziemy $a_{n_2} \in B(a, r_2)$. Musi być $n_2 > n_1$. Ogólnie, niech $0 < r_s < \min\{\frac{1}{s}, \varrho(a, \{a_n, \dots, a_{n_{s-1}}\})\}$ i $a_{n_s} \in B(a, r_s)$, $n_s > n_{s-1}$. Zbudowaliśmy podciąg $(a_{n_s})_{s=1}^{\infty}$ taki, że $a_{n_s} \longrightarrow a$ — sprzeczność.

($\Longrightarrow$): Przypuśćmy, iż z pokrycia otwartego $\mathfrak{U}$ nie da się wybrać podpokrycia skończonego. Przypuśćmy na chwilę, że udało się nam wykazać następujący warunek

$$\exists_{\delta > 0} \ \forall_{a \in X} \ \exists_{i \in I} : \ B(a, \delta) \subset U_i. \tag{*}$$

Największą liczbę $\delta > 0$ o powyższej własności nazywamy *liczbą Lebesgue'a* (4) dla pokrycia $\mathfrak{U}$. Zauważmy, że dla dowolnych $a_1, \dots, a_N \in X$ mamy $\bigcup_{n=1}^{N} B(a_n, \delta) \subsetneq X$.

Niech $a_1 \in X$ będzie dowolne. Wybierzmy $a_2 \in X \setminus B(a_1, \delta)$ i dalej $a_n \in X \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} B(a_j, \delta)$, $n \in \mathbb{N}_3$. Oczywiście $\varrho(a_n, a_m) \geqslant \delta$ dla dowolnych $n \neq m$. Z takiego ciągu nie da się wybrać podciągu zbieżnego.

Pozostaje wykazać (*). Przypuśćmy, że takiego δ nie ma. Wtedy istnieje ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ taki, że kula $B(a_n, \frac{1}{n})$ nie jest zawarta w żadnym zbiorze U_i. Z ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ wybieramy podciąg zbieżny $a_{n_k} \longrightarrow a$. Niech $a \in U_{i_0}$. Z otwartości U_{i_0} wynika, że $B(a, r) \subset U_{i_0}$ dla pewnego $r > 0$. Niech $a_{n_k} \in B(a, \frac{r}{2})$ dla $k \geqslant N$. Wtedy dla dostatecznie dużych k mamy $B(a_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subset B(a, \frac{r}{2} + \frac{1}{n_k}) \subset B(a, r) \subset U_{i_0}$ — sprzeczność. □

---

(4) Henri Lebesgue (1875–1941).

3.3. Metryka Czebyszewa

Definicja 3.3.1. Niech X będzie dowolnym (niepustym) zbiorem i niech (Y, ϱ_Y) będzie dowolną przestrzenią metryczną. Zdefiniujmy $\mathcal{B}(X,Y) := \{f : X \longrightarrow Y : \text{zbiór } f(X) \text{ jest ograniczony}\}$. W zbiorze $\mathcal{B}(X,Y)$ wprowadzamy *metrykę Czebyszewa* (5)

$$\delta(f,g) := \sup\{\varrho_Y(f(x), g(x)) : x \in X\}.$$

Twierdzenie 3.3.2. *Niech $f_n : X \longrightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że przestrzeń Y jest zupełna. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) $f_n \longrightarrow f_0$ jednostajnie na X*, tzn.*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{x\in X} : \varrho_Y(f_n(x), f_0(x)) \leqslant \varepsilon,$$

dla pewnej funkcji , $f_0 : X \longrightarrow Y$.

(ii) $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *spełnia* warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej*, tzn.*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{m,n\geqslant N}\ \forall_{x\in X} : \varrho_Y(f_n(x), f_m(x)) \leqslant \varepsilon.$$

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Jeżeli spełniony jest warunek (i), to

$$\forall_{m,n\geqslant N}\ \forall_{x\in X} : \varrho_Y(f_n(x), f_m(x)) \leqslant 2\varepsilon.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Jeżeli spełniony jest warunek (ii), to dla dowolnego $x \in X$ ciąg $(f_n(x))_{n=1}^{\infty} \subset Y$ spełnia zwykły warunek Cauchy'ego, a więc jest zbieżny. Definiujemy $f_0(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$, $x \in X$. Jeżeli $m \longrightarrow +\infty$ w warunku (ii), to dostajemy $\varrho_Y(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon$, $x \in X$, $n \geqslant N$, co oznacza, że (i) zachodzi. □

Obserwacja 3.3.3. (a) Ćwiczenie: δ jest metryką na $\mathcal{B}(X,Y)$.

(b) $f_n \xrightarrow{\delta} f_0 \Longleftrightarrow f_n \longrightarrow f_0$ jednostajnie na X, tzn.

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{x\in X} : \varrho_Y(f_n(x), f_0(x)) \leqslant \varepsilon. \quad (6) \tag{†}$$

(c) Przestrzeń $\mathcal{B}(X,Y)$ jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń Y jest zupełna.

Istotnie, każdy ciąg Cauchy'ego $(b_n)_{n=1}^{\infty} \subset Y$ możemy utożsamiać z ciągiem Cauchy'ego odwzorowań stałych $(b_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(X,Y)$. Stąd, jeżeli $\mathcal{B}(X,Y)$ jest zupełna, to Y jest zupełna. W drugą stronę korzystamy z Twierdzenia 3.3.2 i dostajemy $f_0 : X \longrightarrow Y$ takie, że $f_n \longrightarrow f_0$ jednostajnie. Pozostaje jeszcze sprawdzić, że f jest odwzorowaniem ograniczonym: niech $f_N(X) \subset B(y_0, R)$. Wtedy $f_0(X) \subset B(y_0, R+\varepsilon)$.

3.4. Przestrzenie spójne

Definicja 3.4.1. Przestrzeń metryczną (X, ϱ) nazywamy *spójną*, jeżeli z tego, że $X = U \cup V$, gdzie U i V są zbiorami otwartymi takimi, że $U \cap V = \varnothing$ wynika, że $U = \varnothing$ lub $V = \varnothing$.

Zbiór $Y \subset X$ nazywamy *spójnym*, jeżeli Y z metryką indukowaną jest przestrzenią spójną.

Twierdzenie 3.4.2. *Niech $\varnothing \neq P \subset \mathbb{R}$. Wtedy zbiór P jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy P jest przedziałem.*

Dowód. ($\Longrightarrow$): Przypuśćmy, że P nie jest przedziałem. Wtedy istnieją $a, b \in P$, $a < b$, oraz $c \in (a,b) \setminus P$. Biorąc $U := P \cap (-\infty, c)$, $V := P \cap (c, +\infty)$, dostajemy sprzeczność ze spójnością.

($\Longleftarrow$): Przypuśćmy, że przedział P nie jest spójny, czyli istnieją otwarte w P, niepuste zbiory A oraz B takie, że $A \cap B = \varnothing$ oraz $P = A \cup B$. Niech $a \in A$, $b \in B$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $a < b$. Zdefiniujmy $c := \sup\{x \in A : x < b\}$. Oczywiście, $a \leqslant c \leqslant b$, a więc $c \in P$. Mamy dwie możliwości:

- $c \in A$. Wtedy $c < b$. Z otwartości zbioru A w P istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $[c, c+\varepsilon) \subset A$ oraz $c+\varepsilon < b$ — sprzeczność.
- $c \in B$. Wtedy, podobnie jak poprzednio, dostajemy istnienie $\varepsilon > 0$ takiego, że $(c-\varepsilon, c] \subset B$ i $c - \varepsilon > a$ — sprzeczność. □

(5) Pafnutij Czebyszew (1821–1894).

(6) Zauważmy, że pojęcie zbieżności jednostajnej jest ogólniejsze i może dotyczyć dowolnych odwzorowań $X \longrightarrow Y$ (które nie muszą być ograniczone).

3.5. Iloczyn kartezjański przestrzeni metrycznych

Definicja 3.5.1. Niech (X_1, ϱ_1), ..., (X_N, ϱ_N) będą *niepustymi* przestrzeniami metrycznymi i niech $X := X_1 \times \cdots \times X_N$. Dla $x = (x_1, \dots, x_N)$, $y = (y_1, \dots, y_N) \in X$ niech

$$\varrho(x, y) := \varrho_1(x_1, y_1) + \cdots + \varrho_N(x_N, y_N).$$

Obserwacja 3.5.2. (a) (X, ϱ) jest przestrzenią metryczną.

(b) Dla dowolnego ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset X$, $a_n = (a_{n,1}, \dots, a_{n,N})$, mamy:

$$a_n \xrightarrow{\varrho} a_0 \iff a_{n,j} \xrightarrow{\varrho_j} a_{0,j},\ j = 1, \dots, N.$$

(c) Dla dowolnego ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$, $a_n = (a_{n,1}, \dots, a_{n,N})$, mamy:

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $(X, \varrho) \iff (a_{n,j})_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego w (X_j, ϱ_j), $j = 1, \dots, N$.

(d) Niech $\varphi : \mathbb{R}_+^N \longrightarrow \mathbb{R}_+$ będzie taka, że dla dowolnych $\xi, \eta \in \mathbb{R}_+^N$ mamy:

(i) $\varphi(\xi) = 0 \iff \xi = 0$,

(ii) $\xi \leqslant \eta \implies \varphi(\xi) \leqslant \varphi(\eta)$, (7)

(iii) $\varphi(\xi + \eta) \leqslant \varphi(\xi) + \varphi(\eta)$.

Zdefiniujmy

$$d(x, y) := \varphi(\varrho_1(x_1, y_1), \dots, \varrho_N(x_N, y_N)), \quad x = (x_1, \dots, x_N),\ y = (y_1, \dots, y_N) \in X.$$

Wtedy (X, ϱ) jest przestrzenią metryczną. Istotnie, jedyną wątpliwość może budzić nierówność trójkąta. Mamy

$$\begin{aligned} d(x, z) + d(z, y) &= \varphi(\varrho_1(x_1, z_1), \dots, \varrho_N(x_N, z_N)) + \varphi(\varrho_1(z_1, y_1), \dots, \varrho_N(z_N, y_N)) \\ &\overset{\text{(iii)}}{\geqslant} \varphi(\varrho_1(x_1, z_1) + \varrho_1(z_1, y_1), \dots, \varrho_N(x_N, z_N) + \varrho_N(z_N, y_N)) \\ &\overset{\text{(ii)}}{\geqslant} \varphi(\varrho_1(x_1, y_1), \dots, \varrho_N(x_N, y_N)) = d(x, y). \end{aligned}$$

Ćwiczenie: Kiedy $d \sim \varrho$? Kiedy d i ϱ są porównywalne?

Twierdzenie 3.5.3. *Niech*

$$\varphi_p(\xi) := \Big(\sum_{j=1}^N \xi_j^p\Big)^{\frac{1}{p}},\ \varphi_\infty(\xi) := \max\{\xi_1, \dots, \xi_N\}, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}_+^N, \quad p \in [1, +\infty).$$

Wtedy

$$\sum_{j=1}^N \xi_j \eta_j \leqslant \varphi_p(\xi)\varphi_q(\eta), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}_+^N,\ p, q \in [1, +\infty],\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ \text{ (nierówność Höldera)},$$

$$\varphi_p(\xi + \eta) \leqslant \varphi_p(\xi) + \varphi_p(\eta), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}_+^N,\ p \in [1, +\infty] \ \text{ (nierówność Minkowskiego)}.$$

Ponadto:

- *dla $1 < p, q < +\infty$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}_{>0}^N$ równość w nierówności Höldera zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy dla pewnego $t > 0$ mamy $\xi_j^p = t\eta_j^q$, $j = 1, \dots, N$.*
- *dla $1 < p < +\infty$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}_{>0}^N$ równość w nierówności Minkowskiego zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy dla pewnego $t > 0$ mamy $\xi = t\eta$.*

Obserwacja 3.5.4. (a) $\lim_{p \to +\infty} \varphi_p(\xi) = \varphi_\infty(\xi)$ (por. Przykład 2.2.10).

(b) Z nierówności Höldera dla $p = q = 2$ wynika nierówność Schwarza (por. Twierdzenie 1.12.5).

Dowód Twierdzenia 3.5.3. Nierówność Höldera: Nierówność jest oczywista jeżeli $(p, q) \in \{(1, +\infty), (+\infty, 1)\}$. Możemy więc założyć, że $1 < p, q < +\infty$. Ponadto możemy założyć, że $\xi_j > 0$ i $\eta_j > 0$, $j = 1, \dots, N$ (Ćwiczenie). Zastępując ξ przez $\frac{\xi}{\varphi_p(\xi)}$ oraz η przez $\frac{\eta}{\varphi_q(\eta)}$, sprowadzamy dowód do przypadku $\varphi_p(\xi) = \varphi_q(\eta) = 1$. Poniżej skorzystamy z dwóch własności funkcji $x \longmapsto e^x$, które poznamy w przyszłości:

— funkcja $\mathbb{R} \ni x \longmapsto e^x \in (0, +\infty)$ jest surjektywna (Wniosek 4.4.20),

(7) $(\xi_1, \dots, \xi_N) \leqslant (\eta_1, \dots, \eta_N) :\iff \xi_j \leqslant \eta_j,\ j = 1, \dots, N$.

— funkcja $\mathbb{R} \ni x \longmapsto e^x$ jest silnie wypukła (Twierdzenie 5.9.9), tzn.

$$e^{\mu x+(1-\mu)y} < \mu e^x + (1-\mu)e^y, \quad x, y \in \mathbb{R},\ x \neq y,\ \mu \in (0,1). \tag{*}$$

Niech $\xi_j = e^{t_j/p}$, $\eta_j = e^{u_j/q}$, $j = 1, \dots, N$. Mamy więc

$$\sum_{j=1}^{N} \xi_j \eta_j = \sum_{j=1}^{N} e^{t_j/p+u_j/q} \leqslant \sum_{j=1}^{N} \Big(\frac{1}{p}e^{t_j} + \frac{1}{q}e^{u_j}\Big) = \sum_{j=1}^{N} \Big(\frac{1}{p}\xi_j^p + \frac{1}{q}\eta_j^q\Big) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Rozważmy teraz problem równości w nierówności Höldera. Jeżeli spełniony jest warunek $\xi_j^p = t\eta_j^q$, $j = 1, \dots, N$, to wtedy

$$\sum_{j=1}^{N} \xi_j \eta_j = \sum_{j=1}^{N} t^{1/p} \eta_j^{q/p+1} = t^{1/p} \sum_{j=1}^{N} \eta_j^q.$$

Z drugiej strony,

$$\varphi_p(\xi)\varphi_q(\eta) = \Big(\sum_{j=1}^{N} t\eta_j^q\Big)^{1/p} \Big(\sum_{j=1}^{N} \eta_j^q\Big)^{1/q} = t^{1/p} \sum_{j=1}^{N} \eta_j^q.$$

W drugą stronę, jeżeli w nierówności Höldera zachodzi równość, to na podstawie (*) w postaci zredukowanej musi być $t_j = u_j$, $j = 1, \dots, N$. Oznacza to, że $\xi_j^p = \eta_j^q$, $j = 1, \dots, N$, dla postaci zredukowanej. Stąd $\frac{\xi_j^p}{\varphi_p(\xi)} = \frac{\eta_j^q}{\varphi_q(\eta)}$, $j = 1, \dots, N$, dla postaci wyjściowej.

Nierówność Minkowskiego: Po pierwsze zauważmy, że dla $p = 1$ nierówność Minkowskiego jest oczywista. Możemy więc założyć, że $p > 1$ oraz $\sum\limits_{j=1}^{N} (\xi_j + \eta_j)^p > 0$. Niech $q := \frac{p}{p-1}$. Wtedy $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Na podstawie nierówności Höldera mamy więc

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N} (\xi_j + \eta_j)^p &= \sum_{j=1}^{N} \xi_j(\xi_j + \eta_j)^{p-1} + \sum_{j=1}^{N} \eta_j(\xi_j + \eta_j)^{p-1} \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \Big(\sum_{j=1}^{N} \xi_j^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{j=1}^{N} (\xi_j + \eta_j)^{(p-1)q}\Big)^{1/q} + \Big(\sum_{j=1}^{N} \eta_j^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{j=1}^{N} (\xi_j + \eta_j)^{(p-1)q}\Big)^{1/q} \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{N} \xi_j^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{j=1}^{N} (\xi_j + \eta_j)^p\Big)^{1/q} + \Big(\sum_{j=1}^{N} \eta_j^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{j=1}^{N} (\xi_j + \eta_j)^p\Big)^{1/q}.
\end{aligned} \tag{**}$$

Dzieląc obie strony przez $\big(\sum_{j=1}^{N} (\xi_j + \eta_j)^p\big)^{1/q}$ dostajemy żądaną nierówność Minkowskiego.

Przechodzimy do problemu równości w nierówności Minkowskiego. Jeżeli $\xi = t\eta$, to

$$\varphi_p(\xi + \eta) = (1 + t)\varphi_p(\eta) = \varphi_p(t\eta) + \varphi_p(\eta) = \varphi_p(\xi) + \varphi_p(\eta).$$

W drugą stronę, jeżeli w nierówności Minkowskiego zachodzi równość, to w (**) w obu miejscach, w których stosowaliśmy nierówność Höldera musi być równość, a więc $\xi_j^p = t_1(\xi_j + \eta_j)^{(p-1)q}$ oraz $\eta_j^p = t_2(\xi_j + \eta_j)^{(p-1)q}$, $j = 1, \dots, N$, dla pewnych $t_1, t_2 > 0$. Wynika stąd natychmiast, że $\xi = t\eta$ dla pewnego $t > 0$. $\square$

Ćwiczenie 3.5.5. Znaleźć warunki konieczne i dostateczne na równość w nierówności Höldera (odp. Minkowskiego) bez założenia, że $\xi_j, \eta_j > 0$, $j = 1, \dots, N$.

Wniosek 3.5.6. *Niech* (X_1, ϱ_1), ..., (X_N, ϱ_N) *będą niepustymi przestrzeniami metrycznymi i niech* $X := X_1 \times \dots \times X_N$. *Wtedy funkcje*

$$d_p(x, y) := \Big(\sum_{j=1}^{N} (\varrho_j(x_j, y_j))^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, +\infty),$$

$$d_\infty(x, y) := \max\{\varrho_1(x_1, y_1), \dots, \varrho_N(x_N, y_N)\}, \quad x = (x_1, \dots, x_N),\ y = (y_1, \dots, y_N) \in X,$$

są metrykami na X. *Ponadto:*

- $d_\infty \leqslant d_p \leqslant N^{1/p} d_\infty$, $p \in [1, +\infty)$. *w szczególności, metryki* d_p *i* d_∞ *są porównywalne.*

• $d_1 = \varrho$ *(zob. Definicja 3.5.1). W szczególności, metryki d_p i d_∞ zadają topologię iloczynu kartezjańskiego.*

Obserwacja 3.5.7. (a) Metryka d_p nosi nazwę *metryki* ℓ^p.

(b) Metryka d_∞ nosi nazwę *metryki* ℓ^∞ lub też *metryki maksimum*.

(c) Jeżeli $(X_j, \varrho_j) = (\mathbb{K}, \varrho_{\mathbb{K}})$, $j = 1, \dots, N$, to

$$d_p(x, y) := \Big(\sum_{j=1}^N |x_j - y_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

$$d_\infty(x, y) := \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_N - y_N|\}, \quad x = (x_1, \dots, x_N),\ y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{K}^N.$$

(d) Szczególnie ważna jest metryka d_2. Dla przykładu, w przypadku, gdy $(X_j, \varrho_j) = (\mathbb{K}, \varrho_{\mathbb{K}})$, $j = 1, \dots, N$, standardową metryką w $\mathbb{K}^N$ jest *metryka euklidesowa* $d_2(x, y) := \sqrt{\sum_{j=1}^N |x_j - y_j|^2}$.

Dowód Wniosku 3.5.6. Stosujemy Obserwację 3.5.2(d). □

Twierdzenie 3.5.8. (a) (X, ϱ) *jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy* (X_j, ϱ_j) *jest zupełna,* $j = 1, \dots, N$*. W szczególności,* $\mathbb{R}^N$ *jest przestrzenią zupełną.*

(b) (X, ϱ) *jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy* (X_j, ϱ_j) *jest zwarta,* $j = 1, \dots, N$.

(c) (X, ϱ) *jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy* (X_j, ϱ_j) *jest spójna,* $j = 1, \dots, N$.

Dowód. (a), (b) — Ćwiczenie.

(c) — Ćwiczenie*. □

3.6. Metryka Hausdorffa

Dla przestrzeni metrycznej (X, ϱ), niech $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X)$ oznacza rodzinę wszystkich niepustych, domkniętych i ograniczonych podzbiorów X. Zdefiniujmy *metrykę Hausdorffa*

$$\boldsymbol{h}(A, B) := \max\Big\{\sup\{\varrho(x, B) : x \in A\},\ \sup\{\varrho(y, A) : y \in B\}\Big\}, \quad A, B \in \mathcal{F}.$$

Obserwacja 3.6.1. Poniżej $A, B, C \in \mathcal{F}$.

(a) Przypomnijmy, że $a \in C \iff \operatorname{dist}(a, C) = 0$.

(b) Jeżeli $\boldsymbol{h}(A, B) = 0$, to $A \subset \overline{B}$ oraz $B \subset \overline{A}$, to oznacza, że $A = B$.

(c) $\boldsymbol{h}(A, B) = \boldsymbol{h}(B, A)$.

(d) $\boldsymbol{h}(A, B) < +\infty$.

Istotnie, jeżeli $A, B \subset B(a, r)$, to dla $x \in A$ mamy $\varrho(x, B) = \inf\{\varrho(x, z) : z \in B\} \leqslant \inf\{\varrho(x, a) + \varrho(a, z) : z \in B\} \leqslant 2r$. Podobnie, $\varrho(x, A) \leqslant 2r$, $x \in B$.

(e) $\boldsymbol{h}(A, B) = \sup\{|\varrho(x, A) - \varrho(x, B)| : x \in X\}$.

Istotnie, wystarczy pokazać, że $\sup\{\varrho(x, A) - \varrho(x, B) : x \in X\} = \sup\{\varrho(y, A) : y \in B\}$. Nierówność „$\geqslant$" jest oczywista. Ustalmy $x_0 \in X$ oraz weźmy dowolne $a \in A$, $b \in B$. Wtedy $\varrho(x_0, a) - \varrho(x_0, b) \leqslant \varrho(a, b)$. Biorąc $\inf_{a \in A}$ dostajemy $\varrho(x_0, A) - \varrho(x_0, b) \leqslant \varrho(b, A) \leqslant \sup\{\varrho(y, A) : y \in B\}$. Biorąc teraz $\inf_{b \in B}$ dostajemy poszukiwaną nierówność.

(f) $\boldsymbol{h}(A, B) \leqslant \boldsymbol{h}(A, C) + \boldsymbol{h}(C, B)$. W szczególności, $(\mathcal{F}, \boldsymbol{h})$ jest przestrzenią metryczną.

(g) $\boldsymbol{h}(A, B) \leqslant r \iff A \subset B^{(r)}$ oraz $B \subset A^{(r)}$, gdzie $C^{(r)} := \{z \in X : \operatorname{dist}(z, C) \leqslant r\}$.

Ćwiczenie: Czy $C^{(r)}$ jest zwarty dla C zwartego? Czy $C^{(r)} \in \mathcal{F}$ dla $C \in \mathcal{F}$?

(h) $|\operatorname{diam}(A) - \operatorname{diam}(B)| \leqslant 2\boldsymbol{h}(A, B)$.

Istotnie, wystarczy pokazać, że $\operatorname{diam}(A) - \operatorname{diam}(B) \leqslant 2\boldsymbol{h}(A, B)$. Ustalmy $x, y \in A$. Wtedy

$$\begin{aligned}\varrho(x, y) - \operatorname{diam}(B) &= \inf_{u, v \in B}(\varrho(x, y) - \varrho(u, v)) \overset{3.1.7(\mathrm{n})}{\leqslant} \inf_{u, v \in B}(\varrho(x, u) + \varrho(y, v)) \\ &\leqslant \varrho(x, B) + \varrho(y, B) \leqslant 2\sup_{z \in A}\varrho(z, B) \leqslant 2\boldsymbol{h}(A, B).\end{aligned}$$

Teraz wystarczy wziąć $\sup_{x, y \in A}$.

(i) Ćwiczenie*. Niech $K \subset X$ będzie ustalonym niepustym zbiorem zwartym i niech $\mathfrak{K} := \{A \in \mathcal{F} : A \subset K\}$. Wtedy $(\mathfrak{K}, \boldsymbol{h})$ jest przestrzenią zwartą.

ROZDZIAŁ 4

Ciągłość

4.1. Funkcje ciągłe

Definicja 4.1.1. Niech (X, ϱ_X), (Y, ϱ_Y) będą przestrzeniami metrycznymi, $f : X \longrightarrow Y$ i $a \in X$. Powiemy, że funkcja f jest *ciągła w punkcie* a, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0} : f(B(a,\delta)) \subset B(f(a),\varepsilon).$$

Równoważnie:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in X} : \varrho_X(x,a) < \delta \Longrightarrow \varrho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Jest to tzw. *definicja Cauchy'ego ciągłości*. Piszemy wtedy $f \in \mathcal{C}(X, Y; a)$ — *jest to oznaczenie niestandardowe, dla potrzeb naszego wykładu.*

Mówimy, że $f : X \longrightarrow Y$ jest *ciągła*, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie. Piszemy wtedy $f \in \mathcal{C}(X, Y)$.

Ponadto, $\mathcal{C}(X) := \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Mówimy, że f jest *jednostajnie ciągła*, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x,y\in X} : \varrho_X(x,y) < \delta \Longrightarrow \varrho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Mówimy, że f spełnia warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha > 0$, jeżeli istnieje stała $M \geqslant 0$ taka, że

$$\varrho_Y(f(x), f(y)) \leqslant M(\varrho_X(x,y))^\alpha, \quad x, y \in X.$$

Dla $\alpha = 1$, warunek Höldera nosi nazwę *warunku Lipschitza* (1).

Mówimy, że odwzorowanie bijektywne $f : X \longrightarrow Y$ jest *homeomorfizmem*, jeżeli $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, $f^{-1} \in \mathcal{C}(Y, X)$.

Obserwacja 4.1.2. (a) Każde odwzorowanie jednostajnie ciągłe jest ciągłe.

(b) Każde odwzorowanie spełniające warunek Höldera jest jednostajnie ciągłe.

Ćwiczenie 4.1.3. (a) Znaleźć przykład odwzorowania ciągłego, które nie jest jednostajnie ciągłe.

(b) Znaleźć przykład odwzorowania jednostajnie ciągłego, które dla dowolnego $\alpha > 0$ nie spełnia warunku Höldera z wykładnikiem α.

(c) Udowodnić, że odwzorowanie $f : X \longrightarrow Y$ spełnia warunek Höldera z wykładnikiem α wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sup\Big\{\frac{\varrho_Y(f(x), f(y))}{(\varrho_X(x,y))^\alpha} : x, y \in X,\ x \neq y\Big\} < +\infty.$$

(d) Znaleźć przykład ciągłego odwzorowania bijektywnego $f : X \longrightarrow Y$ takiego, że f^{-1} nie jest ciągłe.

Twierdzenie 4.1.4. *Niech $f : X \longrightarrow Y$, $a \in X$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) $f \in \mathcal{C}(X, Y; a)$;

(ii) *dla dowolnego otoczenia V punktu $f(a)$ istnieje otoczenie U punktu a takie, że $f(U) \subset V$;*

(iii) *dla dowolnego otoczenia V punktu $f(a)$ zbiór $f^{-1}(V)$ jest otoczeniem punktu a;*

(iv) *dla dowolnego ciągu $x_n \longrightarrow a$ mamy $f(x_n) \longrightarrow f(a)$; jest to tzw.* definicja Heinego (2) ciągłości.

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Niech $B(f(a),\varepsilon) \subset V$ i niech $\delta > 0$ będzie dobrane zgodnie z (i). Wtedy $U := B(a,\delta)$ jest otoczeniem punktu a oraz $f(U) \subset B(f(a),\varepsilon) \subset V$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Oczywiste.

---

(1) Rudolf Lipschitz (1832–1903).

(2) Eduard Heine (1821–1881).

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ kule $V := B(f(a), \varepsilon)$ jest otoczeniem $f(a)$. Zatem istnieje $\delta > 0$ taka, że $B(a, \delta) \subset f^{-1}(V)$. Niech $x_n \in B(a, \delta)$ dla $n \geqslant N$. Wtedy $f(x_n) \in B(f(a), \varepsilon)$ dla $n \geqslant N$, czyli $f(x_n) \longrightarrow f(a)$.

(iv) $\Longrightarrow$ (i): Przypuśćmy, że dla pewnego $\varepsilon > 0$ nie istnieje $\delta > 0$ takie, że $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$. Wtedy istnieje ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że $x_n \in B(a, 1/n)$, $\varrho_Y(f(x_n), f(a)) \geqslant \varepsilon$; sprzeczność. ☐

Twierdzenie 4.1.5 (Składanie odwzorowań ciągłych)**.** *Jeżeli* $f \in \mathcal{C}(X, Y; a)$ *i* $g \in \mathcal{C}(Y, Z; f(a))$*, to* $g \circ f \in \mathcal{C}(X, Z; a)$.

Dowód. Ćwiczenie. ☐

Twierdzenie 4.1.6. *Niech* $f : X \longrightarrow Y$*. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) $f \in \mathcal{C}(X, Y)$*;*

(ii) *dla dowolnego zbioru otwartego* $V \subset Y$ *zbiór* $f^{-1}(V)$ *jest otwarty;*

(iii) *dla dowolnego* $a \in X$ *oraz dla dowolnego ciągu* $x_n \longrightarrow a$ *mamy* $f(x_n) \longrightarrow f(a)$.

Dowód. Ćwiczenie. ☐

Twierdzenie 4.1.7 (Składanie odwzorowań ciągłych)**.** *Jeżeli* $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ *i* $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$*, to* $g \circ f \in \mathcal{C}(X, Z)$.

Dowód. Ćwiczenie. ☐

Wniosek 4.1.8. *Niech* $f : X \longrightarrow Y$ *i niech* $g : Y \longrightarrow Z$ *będzie homeomorfizmem. Wtedy* $g \circ f \in \mathcal{C}(X, Z; a) \iff f \in \mathcal{C}(X, Y; a)$.

Ćwiczenie 4.1.9 (Zob. Obserwacja 3.1.2(b))**.** Niech $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow [-1, 1]$,

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{x}{1+|x|}, & \text{jeżeli } x \in \mathbb{R} \\ \pm 1, & \text{jeżeli } x = \pm\infty \end{cases}.$$

Udowodnić, że φ jest homeomorfizmem. W szczególności, na podstawie Wniosku 4.1.8 mamy $f \in \mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{R}}; a) \iff \varphi \circ f \in \mathcal{C}(X, [-1, 1]; a)$.

Twierdzenie 4.1.10. *Niech* $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}$.

(a) *Jeżeli dodawanie* $A \times B \ni (x, y) \longmapsto x + y \in \overline{\mathbb{R}}$ *jest dobrze określone, to jest odwzorowaniem ciągłym.*

(b) *Jeżeli mnożenie* $A \times B \ni (x, y) \longmapsto x \cdot y \in \overline{\mathbb{R}}$ *jest dobrze określone, to jest odwzorowaniem ciągłym.*

(c) *Jeżeli dzielenie* $A \times B \ni (x, y) \longmapsto \frac{x}{y} \in \overline{\mathbb{R}}$ *jest dobrze określone, to jest odwzorowaniem ciągłym.*

(d) *Jeżeli* $A \subset \mathbb{R}_{>0}$ *and* $B \subset \mathbb{R}$*, to potęgowanie* $A \times B \ni (x, y) \longmapsto x^y \in \mathbb{R}_{>0}$ *jest odwzorowaniem ciągłym. W szczególności:*

- *Funkcja* $\mathbb{R} \ni x \longmapsto a^x$ *jest ciągła dla dowolnego* $a > 0$.
- *Funkcja* $\mathbb{R}_{>0} \ni x \longmapsto x^\alpha$ *jest ciągła dla dowolnego* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dowód. Por. § 2.2. ☐

Twierdzenie 4.1.11. (a) *Jeżeli* $f, g \in \mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{R}}; a)$ *i* $f(x) + g(x)$ *jest określone dla dowolnego* $x \in X$*, to* $f + g \in \mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{R}}; a)$.

(b) *Jeżeli* $f, g \in \mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{R}}; a)$ *i* $f(x) \cdot g(x)$ *jest określone dla dowolnego* $x \in X$*, to* $f \cdot g \in \mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{R}}; a)$.

(c) *Jeżeli* $f, g \in \mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{R}}; a)$ *i* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *jest określone dla dowolnego* $x \in X$*, to* $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{R}}; a)$.

(d) *Jeżeli* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ *i* $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *są ciągłe w punkcie* a*, to* $f^g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}; a)$.

Dowód. Jest wniosek z Twierdzeń 4.1.7 i 4.1.10. ☐

Przykład 4.1.12. (a) Dowolny wielomian $p : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, $p(z) := a_0 + \dots + a_n z^n$, gdzie $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, jest ciągły.

(b) Dla dowolnych wielomianów $p, q : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, $q \not\equiv 0$, *funkcja wymierna* $\frac{p}{q}$ jest ciągła na zbiorze $\mathbb{K} \setminus q^{-1}(0)$.

(c) Funkcje trygonometryczne są ciągłe ([3]). Mamy $0 < \sin t < t$ dla $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Stąd funkcja sin jest ciągła w zerze i w konsekwencji wszystkie funkcje trygonometryczne są ciągłe — ĆWICZENIE.

(d) Funkcja *signum (znak)* $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \longrightarrow \{-1, 0, +1\}$,

$$\operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x > 0 \\ 0, & \text{jeżeli } x = 0 \\ -1, & \text{jeżeli } x < 0 \end{cases},$$

jest ciągła w każdym punkcie poza zerem.

(e) *Funkcja Dirichleta* ([4]) $d := \chi_{\mathbb{Q},\mathbb{R}}$ nie jest ciągła w żadnym punkcie.

(f) Niech $h(x) := xd(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Wtedy h jest ciągła tylko w $x = 0$.

(g) Funkcja *moduł*, $\mathbb{K} \ni z \longmapsto |z| \in \mathbb{R}_+$, jest funkcją spełniającą warunek Lipschitza.

(h) Funkcja *cecha* (lub *część całkowita*) $\lfloor\ \rfloor : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $\lfloor x \rfloor := \sup\{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant x\}$, $x \in \mathbb{R}$, jest ciągła w każdym punkcie zbioru $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, ale nie jest ciągła w żadnym punkcie zbioru $\mathbb{Z}$.

(i) Niech $\lceil x \rceil := \inf\{k \in \mathbb{Z} : k \geqslant x\}$. Gdzie jest ciągła funkcja $x \longrightarrow \lceil x \rceil$? — ĆWICZENIE.

(j) *Funkcja Riemanna* $r : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$,

$$r(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & \text{jeżeli } x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{p}{q},\ q \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{Z},\ (p, q) = 1 \end{cases},$$

jest ciągła w punktach zbioru $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ale nie jest ciągła w żadnym punkcie zbioru $\mathbb{Q}$.

4.2. Granica w punkcie

Definicja 4.2.1. Niech $A \subset X$, $f : A \longrightarrow Y$, $a \in A'$, $b \in Y$. Wtedy mówimy, że f ma w punkcie a granicę b, jeżeli dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n=1}^\infty \subset A \setminus \{a\}$ mamy $f(x_n) \longrightarrow b$. Piszemy wtedy $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Obserwacja 4.2.2. (a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \iff \widetilde{f} \in \mathcal{C}(A \cup \{a\}, Y; a)$, gdzie $\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{jeżeli } x \in A \setminus \{a\} \\ b, & \text{jeżeli } x = a \end{cases}$.

(b) Dla $f : X \longrightarrow Y$ i $a \in X$ mamy $f \in \mathcal{C}(X, Y; a) \iff \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Twierdzenie 4.2.3. *Jeżeli* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ *i* $g \in \mathcal{C}(Y, Z; b)$, *to* $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = g(b)$.

Dowód. ĆWICZENIE. □

Ćwiczenie 4.2.4. Pokazać, że następujące twierdzenie nie jest prawdziwe.

Niech $f : A \longrightarrow B \subset Y$, $a \in A'$, $b \in B'$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{y \to b} g(y) = c$. Wtedy $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = c$.

Definicja 4.2.5. W przypadku $f : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ można również mówić o *granicy górnej i dolnej funkcji f w punkcie a*:

$$\limsup_{x \to a} f(x) := \sup \mathcal{S}(f, a), \quad \liminf_{x \to a} f(x) := \inf \mathcal{S}(f, a),$$

gdzie

$$\mathcal{S}(f, a) := \{g \in \overline{\mathbb{R}} : \exists_{(x_n)_{n=1}^\infty \subset A \setminus \{a\}} : \ x_n \longrightarrow a,\ f(x_n) \longrightarrow g\}.$$

Obserwacja 4.2.6. (a) Niech $f : \mathbb{N} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Wtedy powyższe pojęcia redukują się do poprzednio wprowadzonych $\limsup\limits_{n \to +\infty} f(n)$ i $\liminf\limits_{n \to +\infty} f(n)$.

(b) $\liminf\limits_{x \to a} f(x) \leqslant \limsup\limits_{x \to a} f(x)$.

(c) Jeżeli $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g \in \overline{\mathbb{R}}$, to $\liminf\limits_{x \to a} f(x) = \limsup\limits_{x \to a} f(x) = g$.

(d) $\limsup\limits_{x \to a} f(x), \liminf\limits_{x \to a} f(x) \in \mathcal{S}(f, a)$.

(e) Jeżeli $\liminf\limits_{x \to a} f(x) = \limsup\limits_{x \to a} f(x) =: g$, to $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g$.

([3]) Uwaga: precyzyjne definicje funkcji trygonometrycznych zostaną podane w podrozdziale 6.5.

([4]) Peter Dirichlet (1805–1859).

(f) Jeżeli $g := \limsup_{x\to a} f(x) < +\infty$, to dla dowolnego $\mathbb{R} \ni M > g$ istnieje $r > 0$ takie, że $f(x) \leqslant M$ dla $x \in A \cap (B(a,r) \setminus \{a\})$.

(g) Jeżeli $g := \liminf_{x\to a} f(x) > -\infty$, to dla dowolnego $\mathbb{R} \ni M < g$ istnieje $r > 0$ takie, że $f(x) \geqslant M$ dla $x \in A \cap (B(a,r) \setminus \{a\})$.

Definicja 4.2.7. Jeżeli $X = \overline{\mathbb{R}}$, $A \subset [-\infty, a]$, $f : A \longrightarrow Y$ i $a \in A'$, to $\lim_{x\to a-} f(x)$ nosi nazwę *granicy lewostronnej* i piszemy wtedy $\lim_{x\to a-} f(x)$. Analogicznie definiujemy *granicę prawostronną* $\lim_{x\to a+} f(x)$, gdy $A \subset [a, +\infty]$ i $a \in A'$.

Definicja 4.2.8 (Moduł ciągłości)**.** Dla $f : X \longrightarrow Y$ definiujemy *moduł ciągłości* funkcji f:

$$\omega_f : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow [0, +\infty], \quad \omega_f(\delta) := \sup\{\varrho_Y(f(x), f(y)) : x, y \in X,\ \varrho_X(x,y) \leqslant \delta\}.$$

Zauważmy, że jeżeli f spełnia warunek Höldera z wykładnikiem α (Definicja 4.1.1), to $\omega_f(\delta) \leqslant M\delta^\alpha$.

Ćwiczenie 4.2.9. Pokazać, że f jest jednostajnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{\delta\to 0+} \omega_f(\delta) = 0$.

4.3. Twierdzenie Banacha o punkcie stałym

Twierdzenie 4.3.1 (Banach [5])**.** *Niech (X,d) będzie zupełną przestrzenią metryczną i niech $f : X \longrightarrow X$ będzie odwzorowaniem* zwężającym, *tzn. takim, że $d(f(x), f(y)) \leqslant \theta d(x,y)$, $x, y \in X$, gdzie $\theta \in [0,1)$. Wtedy dla dowolnego punktu $x_0 \in X$ ciąg $(x_n)_{n=0}^\infty$ zdefiniowany rekurencyjnie wzorem $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, jest zbieżny do jedynego* punktu stałego *odwzorowania f, tzn. do punktu $x^* \in X$ takiego, że $f(x^*) = x^*$.*

Dowód. Odwzorowanie f spełnia warunek Lipschitza ze stałą θ. Jest więc w szczególności ciągłe. Jeżeli ciąg $(x_n)_{n=0}^\infty$ jest zbieżny do pewnego $x^* \in X$, to musi to być punkt stały, co wynika ze związku $x_{n+1} = f(x_n)$ oraz ciągłości f. Punkt stały jest jedyny. Jeżeli bowiem $a, b \in X$ byłyby dwoma różnymi punktami stałymi, to $d(a,b) = d(f(a), f(b)) \leqslant \theta d(a,b) < d(a,b)$, co daje sprzeczność. Pozostaje więc pokazać, że ciąg $(x_n)_{n=0}^\infty$ jest zbieżny. Ponieważ przestrzeń jest zupełna wystarczy pokazać, że spełnia warunek Cauchy'ego. Mamy

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leqslant \theta d(x_n, x_{n-1}) \leqslant \theta^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leqslant \dots \leqslant \theta^n d(x_1, x_0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

W takim razie

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leqslant d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leqslant (\theta^{n+k-1} + \theta^{n+k-2} + \dots + \theta^n) d(x_1, x_0) = \frac{1-\theta^k}{1-\theta}\theta^n d(x_1, x_0) \leqslant \frac{1}{1-\theta}\theta^n d(x_1, x_0), \quad n, k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

skąd natychmiast wynika, że $(x_n)_{n=0}^\infty$ jest ciągiem Cauchy'ego. □

Przykład 4.3.2. Niech $X := (0, \frac{1}{4}) \subset \mathbb{R}$ i niech $f : X \longrightarrow X$, $f(x) = x^2$; X nie jest przestrzenią zupełną! Wtedy f jest odwzorowaniem zwężającym ($|x^2 - y^2| = |x-y||x+y| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$) bez punktu stałego.

4.4. Własności funkcji ciągłych

Twierdzenie 4.4.1. *Niech $f_n : X \longrightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$, oraz $f : X \longrightarrow Y$. Załóżmy, że $f_n \longrightarrow f$ jednostajnie na X. Wtedy:*

(a) *Jeżeli $f_n \in \mathcal{C}(X, Y; a)$, $n \in \mathbb{N}$, to $f \in \mathcal{C}(X, Y; a)$.*

(b) *Jeżeli $f_n \in \mathcal{C}(X, Y)$, $n \in \mathbb{N}$, to $f \in \mathcal{C}(X, Y)$.*

Dowód. (a) Wykorzystamy nierówność

$$\varrho_Y(f(x), f(a)) \leqslant \varrho_Y(f(x), f_{n_0}(x)) + \varrho_Y(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) + \varrho_Y(f_{n_0}(a), f(a)).$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wiemy, że istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $\varrho_Y(f_n(x), f(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ dla dowolnych $n \geqslant n_0$ i $x \in X$. Korzystając z ciągłości funkcji f_{n_0} w punkcie a otrzymujemy istnienie $\delta > 0$ takiego, że

[5] Stefan Banach (1892–1945).

$\varrho_Y(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ dla dowolnego $x \in B_X(a,\delta)$. A stąd $\varrho_Y(f(x), f(a)) \leqslant \varepsilon$ dla dowolnego $x \in B_X(a,\delta)$.

(b) wynika natychmiast z (a). $\square$

Ćwiczenie 4.4.2. Niech $f_n \longrightarrow f$ jednostajnie. Wtedy, jeżeli f_n jest jednostajnie ciągła dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, to f jest jednostajnie ciągła.

Twierdzenie 4.4.3 (Dini [6])**.** *Załóżmy, że (X,ϱ) jest przestrzenią zwartą, $f_n \in \mathcal{C}(X)$, $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$. Niech $f \in \mathcal{C}(X)$ i niech $f_n \longrightarrow f$* punktowo *na X, tzn. $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ dla dowolnego $x \in X$. Wtedy $f_n \longrightarrow f$ jednostajnie na X.*

Dowód. Zastępując f_n przez $f_n - f$ sprowadzamy problem do przypadku $f \equiv 0$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $K_n := \{x \in X : f_n(x) \geqslant \varepsilon\}$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy K_n jest zbiorem zwartym oraz $K_{n+1} \subset K_n$, $n \in \mathbb{N}$. Gdyby $K_n \neq \varnothing$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, to z Twierdzenia Cantora 3.2.3 istnieje punkt $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Wtedy $f_n(a) \geqslant \varepsilon$ dla dowolnego n, co przeczy zbieżności punktowej. W takim razie istnieje n_0 takie, że $K_n = \varnothing$ dla $n \geqslant n_0$, co oznacza, że $0 \leqslant f_n \leqslant \varepsilon$ dla dowolnego $n \geqslant n_0$ i $x \in X$. $\square$

Obserwacja 4.4.4. Wszystkie założenia twierdzenia Diniego są istotne.

(a) f nie jest ciągła: Niech $f_n : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $f_n(x) := x^n$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x \in [0,1) \\ 1, & \text{jeżeli } x = 1 \end{cases}$. Wtedy $f_n \searrow f$ punktowo, ale nie jednostajnie.

(b) X nie jest zwarta: Niech $f_n : [0,1) \longrightarrow [0,1)$, $f_n(x) := x^n$. Wtedy $f_n \searrow 0$ punktowo, ale nie jednostajnie.

(c) Ciąg nie jest monotoniczny: Niech $f_n : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Wtedy $f_n \longrightarrow 0$ punktowo, ale nie jednostajnie.

(d) Funkcje f_n nie są ciągłe: Niech $[0,1] \cap \mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$. Zdefiniujmy $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{q_1, \dots, q_n\}, \\ 1, & \text{jeżeli } x \in \{q_{n+1}, q_{n+2}, \dots\} \end{cases}.$$

Wtedy $f_n \searrow 0$ punktowo, ale nie jednostajnie.

Twierdzenie 4.4.5. *Niech X będzie przestrzenią zwartą i niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie funkcją ciągłą. Wtedy $f(X)$ jest przestrzenią zwartą (z metryką indukowaną z Y).*

Dowód. Niech $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset f(X)$, $y_n = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ X jest zwarta, istnieje podciąg $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ oraz $x_0 \in X$ takie, że $x_{n_k} \longrightarrow x_0$. Wobec ciągłości f mamy $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x_0)$. $\square$

Obserwacja 4.4.6. Niech $K \subset \mathbb{R}$ będzie niepustym zbiorem zwartym. Wtedy $\inf K, \sup K \in K$.

Jako wniosek dostajemy.

Twierdzenie 4.4.7 (Twierdzenie Weierstrassa o osiąganiu kresów)**.** *Niech X będzie niepustą przestrzenią zwartą oraz niech $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wtedy istnieją punkty $x_\pm \in X$ takie, że $f(x_+) = \sup f(X)$, $f(x_-) = \inf f(X)$.*

Obserwacja 4.4.8. Niech $\mathcal{C}_b(X,Y) := \mathcal{C}(X,Y) \cap \mathcal{B}(X,Y)$.

(a) $\mathcal{C}_b(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y)$, gdy X jest przestrzenią zwartą.

(b) $\mathcal{C}_b(X,Y)$ jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni $\mathcal{B}(X,Y)$.

(c) Przestrzeń $\mathcal{C}_b(X,Y)$ jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy Y jest zupełna.

Twierdzenie 4.4.9. *Jeżeli $f \in \mathcal{C}(X,Y)$, to dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset X$ spełniony jest warunek: $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{a\in K} :\ f(\overline{B}_\varrho(a,\delta)) \subset \overline{B}_d(f(a),\varepsilon)$. W szczególności, jeżeli X jest przestrzenią zwartą, to f jest jednostajnie ciągłe.*

Dowód. Ponieważ f jest ciągła, zatem dla dowolnego $a \in K$ istnieje $r(a) > 0$ takie, że $f(\overline{B}_\varrho(a, r(a))) \subset \overline{B}_d(f(a), \frac{1}{2}\varepsilon)$. Wobec zwartości zbioru K, istnieje skończona liczba punktów $a_1, \dots, a_N \in K$ takich, że $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_\varrho(a_i, \frac{1}{2}r(a_i))$. Niech $\delta := \frac{1}{2}\min\{r(a_1), \dots, r(a_N)\}$. Weźmy dowolny punkt $a \in K$, $a \in$

---

[6] Ulisse Dini (1845–1918).

$B_\varrho(a_{i_0}, \frac{1}{2}r(a_{i_0}))$, i niech $x \in \overline{B}_\varrho(a,\delta)$. Mamy $\varrho(x,a_{i_0}) \leqslant \varrho(x,a)+\varrho(a,a_{i_0}) \leqslant \delta+\frac{1}{2}r(a_{i_0}) \leqslant r(a_{i_0})$. Wynika stąd, że $d(f(x),f(a_{i_0})) \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$ i ostatecznie $d(f(x),f(a)) \leqslant d(f(x),f(a_{i_0}))+d(f(a),f(a_{i_0})) \leqslant \varepsilon$. $\square$

Twierdzenie 4.4.10. *Niech X będzie przestrzenią zwartą i niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie ciągłą bijekcją. Wtedy f^{-1} jest ciągła, czyli f jest homeomorfizmem.*

Dowód. Niech $y_n \longrightarrow y_0$, $x_n := f^{-1}(y_n)$, $x_0 := f^{-1}(y_0)$. Chcemy pokazać, że $x_n \longrightarrow x_0$. Przypuśćmy, że $x_n \not\longrightarrow x_0$, co oznacza, że istnieje $\varepsilon_0 > 0$ oraz podciąg $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ takie, że $\varrho_X(x_{n_k},x_0) \geqslant \varepsilon_0$, $k \in \mathbb{N}$. Wobec zwartości X możemy założyć, że $x_{n_k} \longrightarrow x^*$. Wynika, stąd, że $\varrho_X(x^*,x_0) \geqslant \varepsilon_0$. Z drugiej strony $f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x^*)$, skąd wynika, że $f(x^*) = f(x_0)$ — sprzeczność. $\square$

Wniosek 4.4.11. *Rzut stereograficzny $R : \boldsymbol{S} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ jest homeomorfizmem (por. Przykład 3.1.3).*

Twierdzenie 4.4.12. *Niech X będzie przestrzenią spójną i niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie funkcją ciągłą. Wtedy $f(X)$ jest przestrzenią spójną (z metryką indukowaną z Y).*

Dowód. Przypuśćmy, że $f(X) = U \cup V$, gdzie U, V są niepuste, rozłączne i otwarte. Wtedy $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$, gdzie $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ są niepuste, rozłączne i otwarte (wobec ciągłości) — sprzeczność. $\square$

Definicja 4.4.13. Niech X będzie przestrzenią spójną i niech $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Mówimy, że f ma *własność Darboux* (7), jeżeli dla dowolnych $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$, $\alpha < \beta$, i dla dowolnego $\gamma \in (\alpha,\beta)$ istnieje $c \in X$ takie, że $f(c) = \gamma$; innymi słowy: f przyjmuje wszystkie wartości pośrednie.

Twierdzenie 4.4.14. *Niech X będzie przestrzenią spójną i niech $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wtedy f ma własność Darboux.*

Obserwacja 4.4.15. Istnieją funkcje nieciągłe, posiadające własność Darboux (zob. Przykład 5.2.13).

Ćwiczenie 4.4.16. Wykazać, że każdy wielomian rzeczywisty stopnia nieparzystego posiada miejsce zerowe.

Obserwacja 4.4.17. Niech $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, będzie funkcją rosnącą. Wtedy $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = \sup f((a,b))$ oraz $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \inf f((a,b))$.

Twierdzenie 4.4.18. *Niech $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $P \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, będzie funkcją monotoniczną. Wtedy:*

(a) *funkcja f nie jest ciągła w co najwyżej przeliczalnej liczbie punktów;*
(b) *jeżeli f nie jest ciągła, to zbiór $f(P)$ nie jest spójny.*

Dowód. Możemy założyć, że f jest rosnąca.
(a) Niech
$$N(f) := \{x \in P : f \text{ nie jest ciągła w } x\}.$$
Dla dowolnego punktu $c \in \operatorname{int} P$ niech $L(c) := \lim\limits_{x\to c-} f(x)$, $R(c) := \lim\limits_{x\to c+} f(x)$. Jeżeli lewy koniec c przedziału P należy do niego, to kładziemy $L(c) := f(c)$, $R(c) := \lim\limits_{x\to c+} f(x)$. Jeżeli prawy koniec c przedziału P należy do niego, to kładziemy $L(c) := \lim\limits_{x\to c-} f(x)$, $R(c) := f(c)$.

Wtedy $-\infty < L(c) \leqslant R(c) < \infty$ oraz dla dowolnych $c_1, c_2 \in P$, $c_1 < c_2$, mamy $R(c_1) \leqslant L(c_2)$, a stąd
$$(L(c_1),R(c_1)) \cap (L(c_2),R(c_2)) = \varnothing.$$
W takim razie $c \in N(f) \iff L(c) < R(c) \iff \exists_{q(c)\in\mathbb{Q}\cap(L(c),R(c))}$. Zbudowaliśmy injekcję $N(f) \longrightarrow \mathbb{Q}$.

(b) Przypuśćmy, że $a \in N(f) \neq \varnothing$. Z poprzednich rozważań istnieje $q \in (L(a),R(a)) \setminus \{f(a)\}$. Zdefiniujmy $U := (-\infty,q) \cap f(P)$, $V := (q,+\infty) \cap f(P)$. Zbiory U oraz V są otwarte w $f(P)$, $U, V \neq \varnothing$, $U \cap V = \varnothing$ oraz $U \cup V = f(P)$, co oznacza, że $f(P)$ nie jest zbiorem spójnym. $\square$

Twierdzenie 4.4.19. *Niech $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $P \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, będzie ciągłą injekcją. Wtedy:*

(a) *f jest silnie monotoniczna;*
(b) *funkcja odwrotna $f^{-1} : f(P) \longrightarrow P$ jest ciągła.*

---

(7) Jean Darboux (1842–1917).

Dowód. (a) Wystarczy pokazać, że dla dowolnego przedziału $[a,b] \subset P$, $a < b$, funkcja $f|_{[a,b]}$ jest ściśle monotoniczna. Ustalmy a, b i przypuśćmy, że $f(a) < f(b)$ (przypadek $f(a) > f(b)$ jest analogiczny — Ćwiczenie). Z twierdzenia Weierstrassa istnieją $c_-, c_+ \in [a,b]$ takie, że $f(c_-) = \min f([a,b])$ oraz $f(c_+) = \max f([a,b])$. Pokażemy, że $c_- = a$ oraz $c_+ = b$. Przypuśćmy, że np. $a < c_-$ (przypadek $c_+ < b$ jest analogiczny — Ćwiczenie). Wtedy $f(c_-) < f(a) < f(b)$. Z własności Darboux funkcji f wynika istnienie $c \in (c_-, b)$ takiego, że $f(c) = f(a)$, co daje sprzeczność.

Zatem $c_- = a$ i $c_+ = b$.

Ustalmy $a \leqslant x < y \leqslant b$. Przypuśćmy, $f(x) > f(y)$. Wtedy $f(a) \leqslant f(y) < f(x) \leqslant f(b)$. Wobec własności Darboux, istnienie $c \in [a,x]$ taki, że $f(c) = f(y)$, co daje sprzeczność.

(b) Oczywiście $f^{-1} : f(P) \longrightarrow P$ jest funkcją ściśle monotoniczną oraz $f(P)$ jest przedziałem. Ponieważ $f^{-1}(f(P)) = P$, więc z Twierdzenia 4.4.18(b) wnioskujemy, że f^{-1} jest funkcją ciągłą. $\square$

Wniosek 4.4.20. *Dla dowolnego $a > 1$ (odp. $a \in (0,1)$)* funkcja wykładnicza $\mathbb{R} \ni x \longmapsto a^x \in \mathbb{R}_{>0}$ *jest bijektywna i ściśle rosnąca (odp. malejąca). W szczególności, jest ona homeomorfizmem, funkcją do niej odwrotną jest* funkcja logarytmiczna $\mathbb{R}_{>0} \ni x \longmapsto \log_a x \in \mathbb{R}$.

Piszemy $\ln x := \log_e x$.

Ćwiczenie 4.4.21. Korzystając z własności funkcji wykładniczej wyprowadzić następujące własności funkcji logarytmicznej $\log_a$ dla $a > 0$, $a \neq 1$.

(a) $\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$, $x_1, x_2 > 0$.
(b) $\log_a(b^x) = x \log_a b$, $b > 0$, $x \in \mathbb{R}$.
(c) $a^x = e^{x \ln a}$, $x \in \mathbb{R}$.
(d) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$.

Wniosek 4.4.22. (a) *Funkcja* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ni x \longmapsto \sin x \in [1,1]$ *jest bijektywna i ściśle rosnąca. W szczególności, jest ona homeomorfizmem; funkcją do niej odwrotną jest* $[-1,1] \ni x \longmapsto \arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(b) *Funkcja* $[0,\pi] \ni x \longmapsto \cos x \in [1,1]$ *jest bijektywna i ściśle malejąca. W szczególności, jest ona homeomorfizmem; funkcją do niej odwrotną jest* $[-1,1] \ni x \longmapsto \arccos x \in [0,\pi]$.

(c) *Funkcja* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \ni x \longmapsto \sin x \in \mathbb{R}$ *jest bijektywna i ściśle rosnąca. W szczególności, jest ona homeomorfizmem; funkcją do niej odwrotną jest* $\mathbb{R} \ni x \longmapsto \operatorname{arctg} x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(d) *Funkcja* $(0,\pi) \ni x \longmapsto \operatorname{ctg} x \in \mathbb{R}$ *jest bijektywna i ściśle malejąca. W szczególności, jest ona homeomorfizmem; funkcją do niej odwrotną jest* $\mathbb{R} \ni x \longmapsto \operatorname{arcctg} x \in (0,\pi)$.

Ćwiczenie 4.4.23 (Funkcje hiperboliczne)**.** Definiujemy:

- *sinus hiperboliczny*: $\mathbb{R} \ni x \overset{\sinh}{\longmapsto} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \in \mathbb{R}$,
- *cosinus hiperboliczny*: $\mathbb{R} \ni x \overset{\cosh}{\longmapsto} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \in [1, +\infty)$,
- *tangens hiperboliczny*: $\mathbb{R} \ni x \overset{\operatorname{tgh}}{\longmapsto} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \in (-1,1)$,
- *cotangens hiperboliczny*: $\mathbb{R}_* \ni x \overset{\operatorname{ctgh}}{\longmapsto} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$.

(a) Które ze wzorów trygonometrycznych, po ewentualnej zmianie znaków, pozostają prawdziwe dla funkcji hiperbolicznych?, np. $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ (*jedynka hiperboliczna*).

(b) Odwzorowania $\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\operatorname{tgh} : \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)$, $\cosh|_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [1,+\infty)$, $\operatorname{ctgh}|_{\mathbb{R}_{>0}} : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow (1,+\infty)$ są homeomorfizmami. Funkcje odwrotne do nich to odpowiednio:

- $\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $x \in \mathbb{R}$,
- $\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, $x \geqslant 1$,
- $\operatorname{artgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$,
- $\operatorname{arctgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$, $x > 1$.

4.5. Krzywe

Definicja 4.5.1. Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią metryczną. Każde odwzorowanie ciągłe $\gamma : [a,b] \longrightarrow X$ nazywamy *krzywą*. Zbiór $\gamma^* := \gamma([a,b])$ nazywamy *obrazem geometrycznym* krzywej γ;

γ^* jest zbiorem zwartym spójnym.

W przyszłości będziemy zawsze utożsamiać krzywą $\gamma : [a,b] \longrightarrow X$ z dowolną krzywą

$$\gamma \circ \sigma : [c,d] \longrightarrow X,$$

gdzie $\sigma : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ jest bijekcją rosnącą (zwaną *zmianą parametryzacji*). Oczywiście, zmiana parametryzacji nie zmienia obrazu geometrycznego krzywej. W szczególności, można się zawsze ograniczyć do krzywych sparametryzowanych w przedziale $[0,1]$. Jeżeli $\gamma : [a,b] \longrightarrow X$ jest krzywą, to:

- $\gamma(a)$ nazywamy *początkiem* krzywej,
- $\gamma(b)$ nazywamy *końcem* krzywej,
- jeżeli $\gamma(a) = \gamma(b)$, to mówimy, że γ jest *zamknięta*,
- jeżeli γ jest odwzorowaniem injektywnym, to mówimy, że γ jest *łukiem Jordana* (8) — wtedy $\gamma : [a,b] \longrightarrow \gamma^*$ jest homeomorfizmem,
- Jeżeli $\sigma : \mathbb{T} \longrightarrow X$ jest odwzorowaniem ciągłym injektywnym, to krzywą zamkniętą $\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow X$, $\gamma(t) := \sigma(\cos t, \sin t)$, nazywamy *krzywą Jordana*.

Dla krzywej $\gamma : [a,b] \longrightarrow X$ definiujemy krzywą *przeciwną*

$$\ominus\gamma : [a,b] \longrightarrow X, \quad \ominus\gamma(t) := \gamma(a+b-t).$$

Widać, że $(\ominus\gamma)^* = \gamma^*$.

Dla krzywych $\gamma_j : [0,1] \longrightarrow X$, $j = 1,2$, takich, że $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ definiujemy ich *sumę*

$$\gamma_1 \oplus \gamma_2 : [0,1] \longrightarrow X, \ (\gamma_1 \oplus \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{dla } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases};$$

jest to oczywiście krzywa i $(\gamma_1 \oplus \gamma_2)^* = \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$. (9)

Definicja 4.5.2. Mówimy, że X jest *łukowo spójna*, jeżeli dla dowolnych $x, y \in X$ istnieje krzywa $\gamma : [a,b] \longrightarrow X$ taka, że $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$.

Każda przestrzeń łukowo spójna jest spójna (ale nie odwrotnie — Ćwiczenie).

Obserwacja 4.5.3. Dla $X_1 \neq \varnothing, \dots, X_N \neq \varnothing$ mamy:

$X_1, \dots, X_N$ są przestrzeniami łukowo spójnymi $\iff$ $X_1 \times \dots \times X_N$ jest przestrzenią łukowo spójną.

4.6. Przestrzenie unormowane

Definicja 4.6.1. *Przestrzenią unormowaną* nad ciałem $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) nazywamy dowolną parę $(E, \| \ \|)$, gdzie E jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$, zaś $\| \ \| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ jest funkcją spełniającą następujące trzy warunki:

(a) $\forall_{x \in E} : \ \|x\| = 0 \iff x = 0$,

(b) $\forall_{\alpha \in \mathbb{K},\, x \in E} : \ \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,

(c) $\forall_{x,y \in E} : \ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Funkcję $\| \ \|$ nazywamy *normą*.

Obserwacja 4.6.2. (a) $(\mathbb{K}, | \ |)$ jest przestrzenią unormowaną.

(b) $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x-y\|$ dla dowolnych $x, y \in E$.

(c) Zdefiniujmy $\varrho(x,y) = \varrho_{\| \ \|}(x,y) := \|x-y\|$, $x, y \in E$. Wtedy $\varrho : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ jest metryką *generowaną przez normę*. Oczywiście

$$x_\nu \xrightarrow{\varrho_{\| \ \|}} x_0 \iff \|x_\nu - x_0\| \longrightarrow 0.$$

(d) Mówimy, że dwie normy $\| \ \|_1, \| \ \|_2 : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ są *równoważne*, jeżeli $\varrho_{\| \ \|_1} \sim \varrho_{\| \ \|_2}$.

(e) $B(a,r) = B_{\varrho_{\| \ \|}}(a,r) = \{x \in E : \|x-a\| < r\}$, $\overline{B}(a,r) = \overline{B}_{\varrho_{\| \ \|}}(a,r) = \{x \in E : \|x-a\| \leqslant r\}$, $B(r) := B(0,r)$, $\overline{B}(r) := \overline{B}(0,r)$.

(f) $\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$, $r > 0$.

Istotnie, wystarczy pokazać inkluzję $\supset$. W tym celu zauważmy, że jeżeli $x_0 \in \overline{B}(a,r)$, to $a + \theta(x_0 - a) \in B(a,r)$ dla dowolnego $\theta \in [0,1)$.

---

(8) Camille Jordan (1838–1922).

(9) Oznaczenia $\ominus$ i $\oplus$ mają charakter roboczy i nie musimy się do nich zbyt przywiązywać.

(g) Działania w przestrzeni unormowanej są ciągłe. Istotnie,

$$\|(x+y)-(x_0+y_0)\| \leqslant \|x-x_0\|+\|y-y_0\|,$$
$$\|\alpha x-\alpha_0 x_0\| \leqslant |\alpha-\alpha_0|\|x_0|+|\alpha|\|x-x_0\|.$$

(h) $\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$, $r>0$.

Istotnie, wystarczy pokazać inkluzję $\supset$. W tym celu zauważmy, że jeżeli $x_0 \in \overline{B}(a,r)$, to $a+\theta(x_0-a) \in B(a,r)$ dla dowolnego $\theta \in [0,1)$.

Obserwacja 4.6.3. (a) Podobnie jak dla metryk w iloczynie kartezjańskim przestrzeni unormowanych $(E_1,|\ |_1)$, ..., $(E_N,|\ |_N)$ możemy wprowadzić wiele norm. Niech $\varphi : \mathbb{R}_+^N \longrightarrow \mathbb{R}_+$ będzie funkcją taką, że:

(i) $\varphi(\xi)=0 \Longleftrightarrow \xi=0$,
(ii) $\xi \leqslant \eta \Longrightarrow \varphi(\xi) \leqslant \varphi(\eta)$,
(iii) $\varphi(\xi+\eta) \leqslant \varphi(\xi)+\varphi(\eta)$,
(iv) $\varphi(t\xi)=t\varphi(\xi)$ dla $t \in \mathbb{R}_+$.

Wtedy funkcja dana wzorem

$$\|x\| := \varphi(|x_1|_1,\dots,|x_N|_N), \quad x=(x_1,\dots,x_N) \in E_1\times\dots\times E_N,$$

jest normą na $E_1\times\dots\times E_N$ — Ćwiczenie.

(b) Jeżeli $(E_1,|\ |_1),\dots,(E_N,|\ |_N)$ są przestrzeniami unormowanymi, to w $E_1\times\dots\times E_N$ mamy następujące klasyczne normy (Ćwiczenie):

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{j=1}^N |x_j|_j^p\Big)^{1/p} = \textit{norma } l^p, \quad p \geqslant 1,$$
$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|_1,\dots,|x_N|_N\} = \textit{norma } \ell^\infty = \textit{norma maksimum}.$$

W szczególności, normami są funkcje:

$$\|x\|_1 = |x_1|_1+\dots+|x_N|_N = \textit{norma suma},$$
$$\|x\|_2 = \Big(\sum_{j=1}^N |x_j|_j^2\Big)^{1/2} = \textit{norma euklidesowa}.$$

Zauważmy, że metryki generowane przez te normy odpowiadają metrykom d_p, d_∞, d_1 i d_2 (utworzonym dla $(E_1,\varrho_{|\ |_1}),\dots(E_N,\varrho_{|\ |_N})$ — por. Wniosek 3.5.6. W szczególności, są to normy równoważne, zadające topologię iloczynu kartezjańskiego.

(c) Dla przykładu, $\mathbb{K}^N$ jest przestrzenią unormowaną przez *normę euklidesową*

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{j=1}^N |x_j|^2}, \quad x=(x_1,\dots,x_N) \in \mathbb{K}^N.$$

Dla kul w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ w normie euklidesowej rezerwujemy specjalne oznaczenia $\mathbb{B}(a,r)$, $\overline{\mathbb{B}}(a,r)$, $\mathbb{B}(r)$, $\overline{\mathbb{B}}(r)$.

Definicja 4.6.4. Niech $(E,\|\ \|)$ będzie przestrzenią unormowaną. Dla $A,B \subset E$ niech

$$A+B := \{x+y : x \in A,\ y \in B\}, \quad A,B \subset E,$$
$$A\cdot B := \{\alpha x : \alpha \in A,\ x \in B\}, \quad A \subset \mathbb{K},\ B \subset E.$$

Ponadto przyjmujemy $a+B := \{a\}+B$, $\alpha\cdot B := \{\alpha\}\cdot B$ (10). Mamy następującą własność translatywności kul: $B(a,r)=a+B(r)$, $\overline{B}(a,r)=a+\overline{B}(r)$. Ponadto, $B(r)=r\cdot B(1)$, $\overline{B}(r)=r\cdot\overline{B}(1)$.

Dla dowolnych $x,y \in E$ definiujemy *segment* o końcach x,y:

$$[x,y] := \{x+t(y-x) : t \in [0,1]\}.$$

Odnotujmy, że $[x,y]=[y,x]$ oraz $[x,x]=\{x\}$. Zauważmy, że $[x,y]$ jest obrazem geometrycznym krzywej $[0,1] \ni t \longmapsto x+t(y-x)$. W szczególności, segment jest zbiorem zwartym i spójnym.

Zbiór $A \subset E$ nazywamy:

(10) Oczywiście $a+B=T_a(B)$, gdzie $T_a : E \longrightarrow E$ oznacza *translację* $x \longmapsto a+x$.

- *wypukłym*, jeżeli $[x, y] \subset A$ dla dowolnych $x, y \in A$;
- *gwiaździstym względem punktu* $a \in A$, jeżeli $[a, x] \subset A$ dla dowolnego $x \in A$.

Każdy zbiór wypukły jest gwiaździsty względem dowolnego punktu $a \in A$.

Obserwacja 4.6.5 (Zbiory wypukłe). (a) A jest wypukły wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_2$ i dla dowolnych $x_1, \dots, x_n \in A$, $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$, dla których $t_1 + \dots + t_n = 1$ mamy $t_1x_1 + \dots + t_nx_n \in A$. Wyrażenie $t_1x_1 + \dots + t_nx_n \in A$ nazywamy *kombinacją barycentryczną punktów* $x_1, \dots, x_n$.

(b) Kule $B(a, r)$ i $\overline{B}(a, r)$ są wypukłe. Istotnie,

$$\|x + t(y - x) - a\| = \|(1 - t)(x - a) + t(y - a)\| \leqslant (1 - t)\|x - a\| + t\|y - a\|.$$

(c) Dla dowolnej rodziny zbiorów wypukłych $(A_i)_{i \in I} \subset E$ zbiór $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ jest wypukły. W szczególności, dla dowolnego zbioru $A \subset E$ istnieje najmniejszy zbiór wypukły $\operatorname{conv} A = \operatorname{conv}(A) \subset E$ zawierający A.

(d) $\operatorname{conv} A = \Big\{ \sum\limits_{j=1}^{n} t_jx_j : n \in \mathbb{N}_2,\ x_j \in A,\ t_j \in \mathbb{R}_+,\ j = 1, \dots, n,\ t_1 + \dots + t_n = 1 \Big\}$.

(e) (Twierdzenie Carathéodory'ego [11] — Ćwiczenie*) Jeżeli $A \subset \mathbb{R}^d$, to
$\operatorname{conv} A = \Big\{ \sum\limits_{j=1}^{d+1} t_jx_j : x_j \in A,\ t_j \in \mathbb{R}_+,\ j = 1, \dots, d + 1,\ t_1 + \dots + t_{d+1} = 1 \Big\}$.

(f) (Ćwiczenie) Dla dowolnego $d \geqslant 2$ istnieje zbiór $A \subset \mathbb{R}^d$ taki, że
$\operatorname{conv} A \supsetneq \Big\{ \sum\limits_{j=1}^{d} t_jx_j : x_j \in A,\ t_j \in \mathbb{R}_+,\ j = 1, \dots, d,\ t_1 + \dots + t_d = 1 \Big\}$.

(g) $\operatorname{conv}(A \times B) = (\operatorname{conv} A) \times (\operatorname{conv} B)$.

(h) Jeżeli A jest wypukły, to $\overline{A}$ jest wypukły.
Istotnie, jeżeli $x_n \longrightarrow x_0$ i $y_n \longrightarrow y_0$, to $x_n + t(y_n - x_n) \longrightarrow x_0 + t(y_0 - x_0)$, $t \in [0, 1]$.

(i) Jeżeli A jest wypukły, to $\operatorname{int} A$ jest wypukły.
Istotnie, jeżeli $B(a, r), B(b, r) \subset A$, to

$$\begin{aligned}[a, b] + B(r) &= \{(1 - t)a + tb + x : t \in [0, 1],\ x \in B(r)\} \\ &= \{(1 - t)(a + x) + t(b + x) : t \in [0, 1],\ x \in B(r)\} \subset \operatorname{conv}(B(a, r) \cup B(b, r)) \subset A,\end{aligned}$$

co dowodzi, że $[a, b] \subset \operatorname{int} A$.

(j) Jeżeli A jest wypukły i $\operatorname{int} A \neq \varnothing$, to dla dowolnych $a \in \operatorname{int} A$ i $b \in A$ mamy

$$[a, b) := \{(1 - t)a + tb : t \in [0, 1)\} \subset \operatorname{int} A.$$

W szczególności, $A \subset \overline{\operatorname{int} A}$.
Istotnie, jeżeli $B(a, r) \subset A$, to

$$B((1 - t)a + tb, r(1 - t)) \subset \operatorname{conv}(B(a, r) \cup \{b\}) \subset A, \quad t \in [0, 1).$$

Definicja 4.6.6. Dla dowolnych $x_0, \dots, x_N \in E$ definiujemy *łamaną* o wierzchołkach $x_0, \dots, x_N$

$$[x_0, \dots, x_N] := [x_0, x_1] \cup \dots \cup [x_{N-1}, x_N].$$

Zauważmy, że każda łamana jest zbiorem łukowo spójnym (Definicja 4.5.2). Łamaną $[x_0, \dots, x_N]$ możemy utożsamiać z krzywą będącą sumą odcinków.

Twierdzenie 4.6.7. *Dla dowolnego zbioru otwartego $D \subset E$ następujące warunki są równoważne:*

(i) *D jest* obszarem *(tzn. zbiorem otwartym i spójnym);*

(ii) *dla dowolnych $x, y \in D$ istnieje łamana $[x_0, \dots, x_N] \subset D$ taka, że $x_0 = x$ i $x_N = y$.*

Dowód. Dowodu wymaga jedynie implikacja ((i) $\Longrightarrow$ (ii)). Ustalmy $x_0 \in D$ i niech D_0 oznacza zbiór tych wszystkich $x \in D$, dla których istnieje łamana $[x_0, \dots, x_N] \subset D$ taka, że $x_N = x$. Problem polega na pokazaniu, że $D_0 = D$ o ile D jest obszarem. Wystarczy pokazać, że D_0 jest niepusty, otwarty i domknięty w D. Oczywiście $D_0 \neq \varnothing$, bo $x_0 \in D_0$.

Jeżeli $a \in D_0$ i $B(a, r) \subset D$ (D jest otwarty), to $B(a, r) \subset D_0$, bo jeżeli $[x_0, \dots, x_N]$ „dochodzi" do a, to $[x_0, \dots, x_N, x]$ dochodzi do x dla dowolnego $x \in B(a, r)$.

[11] Constantin Carathéodory (1873–1950).

Jeżeli b jest punktem skupienia D_0 w D i $B(b,r) \subset D$, to bierzemy dowolny punkt $a \in B(b,r) \cap D_0$ i teraz, jeżeli $[x_0,\dots,x_N]$ dochodzi do a, to $[x_0,\dots,x_N,b]$ dochodzi do b, czyli $b \in D_0$. $\square$

Niech $D \subset E$ będzie obszarem. Dla dowolnych punktów $x,y \in D$, niech

$$\varrho^i_D(x,y) := \inf\Big\{\sum_{j=1}^{n} \|x_j - x_{j-1}\| : [x_0,\dots,x_n] \subset D,\ x_0 = x,\ x_N = y\Big\}.$$

Dostajemy funkcję $\varrho^i_D : D \times D \longrightarrow \mathbb{R}_+$.

Obserwacja 4.6.8. (a) Na podstawie nierówności trójkąta, mamy $\varrho^i_D(x,y) \geqslant \|x-y\|$.

(b) ϱ^i_D jest metryką. Jest to tzw. *metryka wewnętrzna* dla obszaru D.

(c) Jeżeli $[x,y] \subset D$, to $\varrho^i_D(x,y) = \|x-y\|$. W szczególności, ϱ^i_D jest ciągła w wyjściowej topologii.

(d) Jeżeli D jest ograniczonym obszarem gwiaździstym względem punktu a, to

$$\varrho^i_D(x,y) \leqslant \|x-a\| + \|y-a\| \leqslant 2\operatorname{diam} D.$$

(e) Istnieją obszary ograniczone $D \subset \mathbb{R}^2$ takie, że ϱ^i_D nie jest funkcją ograniczoną — Ćwiczenie.

Definicja 4.6.9. Przestrzeń unormowaną $(E, \|\ \|)$ nazywamy *przestrzenią Banacha*, jeżeli przestrzeń metryczna $(E, \varrho_{\|\ \|})$ jest zupełna.

Obserwacja 4.6.10. (a) Niech $X \neq \varnothing$ będzie dowolnym zbiorem i niech E będzie przestrzenią unormowaną. Wtedy $\mathcal{B}(X,E)$ (12) z *normą Czebyszewa*

$$\|f\|_X := \sup\{\|f(x)\|_E : x \in X\}, \quad f \in \mathcal{B}(X,E),$$

ma naturalną strukturę przestrzeni unormowanej (Ćwiczenie); odnotujmy, że powyższa norma generuje metrykę Czebyszewa (Definicja3.3.1).

Ponadto, E jest Banacha wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{B}(X,E)$ jest Banacha (por. Obserwacja 3.3.3(c)).

(b) Jeżeli E jest przestrzenią Banacha, to przestrzeń $\mathcal{C}_b(X,E)$ wraz z normą Czebyszewa jest przestrzenią Banacha.

4.6.1. Przestrzenie funkcji spełniających warunek Höldera. Niech (X,ϱ) będzie przestrzenią metryczną, $X \neq \varnothing$, i nich $(E, \|\ \|)$ będzie przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{K}$, $E \neq \{0\}$. Dla $0 < \alpha \leqslant 1$ niech $\underline{h}^\alpha(X,E)$ oznacza zbiór wszystkich funkcji $f : X \longrightarrow E$, które spełniają globalny warunek Höldera z wykładnikiem α. Zauważmy, że jest to $\mathbb{K}$–przestrzeń wektorowa oraz $h^\alpha(X,E) \subset \mathcal{C}(X,E)$. Dla $f : X \longrightarrow E$ połóżmy

$$|f|_\alpha = |f|_{X,\alpha} := \sup\Big\{\frac{\|f(x)-f(y)\|}{(\varrho(x,y))^\alpha} : x,y \in X,\ x \neq y\Big\} \in [0,+\infty].$$

Jest oczywiste, że $f \in h^\alpha(X,E) \iff |f|_\alpha < +\infty$. Wtedy też $\|f(x)-f(y)\| \leqslant |f|_\alpha(\varrho(x,y))^\alpha$, $x,y \in X$.

Łatwo sprawdzić, że $|\ |_\alpha : h^\alpha \longrightarrow \mathbb{R}_+$ jest $\mathbb{K}$–*seminormą*, tzn. $|0|_\alpha = 0$, $|\lambda f|_\alpha = |\lambda||f|_\alpha$ $(\lambda \in \mathbb{K})$ oraz $|f+g|_\alpha \leqslant |f|_\alpha + |g|_\alpha$.

Definiujemy $\mathcal{H}^\alpha(X,E) := h^\alpha(X,E) \cap \mathcal{B}(X,E)$. Jest to $\mathbb{K}$–przestrzeń wektorowa. Przestrzeń tę normujemy przy pomocy normy $\|f\|_{X,\alpha} := \|f\|_X + |f|_{X,\alpha}$.

Jeżeli $d := \operatorname{diam} X < +\infty$, to dla $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$ mamy $|\ |_\beta \leqslant d^{\alpha-\beta}|\ |_\alpha$; w szczególności, $\mathcal{H}^\alpha(X,E) \subset \mathcal{H}^\beta(X,E)$ oraz $\|\ \|_{X,\beta} \leqslant C\|\ \|_{X,\alpha}$, gdzie $C := \max\{1, d^{\alpha-\beta}\}$.

Twierdzenie 4.6.11. *Jeżeli E jest Banacha, to $(\mathcal{H}^\alpha(X,E), \|\ \|_{X.\alpha})$ jest Banacha.*

Dowód. Niech $(f_s)_{s=1}^\infty \subset \mathcal{H}^\alpha(X,E)$ będzie ciągiem Cauchy'ego w sensie $\|\ \|_{X,\alpha}$. Ponieważ $(\mathcal{C}_b(X,E), \|\ \|_X)$ jest przestrzenią Banacha (Obserwacja 4.4.8(c)), mamy $f_s \xrightarrow{\|\ \|_X} f_0 \in \mathcal{C}_b(X,E)$. Pozostaje, wykazać, że $|f_s - f_0|_\alpha \longrightarrow 0$. Dla $x,y \in X$, $x \neq y$, mamy

$$\frac{\|f_s(x)-f_0(x)-(f_s(y)-f_0(y))\|}{(\varrho(x,y))^\alpha} = \lim_{\nu\to+\infty} \frac{\|f_s(x)-f_\nu(x)-(f_s(y)-f_\nu(y))\|}{(\varrho(x,y))^\alpha}$$
$$\leqslant \limsup_{\nu\to+\infty} |f_s - f_\nu|_\alpha \underset{s\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \quad \square$$

(12) Odnotujmy, że $\mathcal{B}(X,E) := \{f : X \longrightarrow E : \exists_{R>0} : f(X) \subset B(R)\}$.

Twierdzenie 4.6.12. (a) *Jeżeli $f \in \mathcal{H}^\alpha(X, \mathbb{K})$, $g \in \mathcal{H}^\alpha(X, E)$, to $f \cdot g \in \mathcal{H}^\alpha(X, E)$ oraz $\|fg\|_{X,\alpha} \leqslant \|f\|_{X,\alpha}\|g\|_{X,\alpha}$.*

(b) *Niech F będzie przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{K}$ i $\varnothing \neq Y \subset E$. Jeżeli $\varphi \in \mathcal{H}^\beta(X, E)$, $\varphi(X) \subset Y$ i $f \in \mathcal{H}^\alpha(Y, F)$, to $f \circ \varphi \in \mathcal{H}^{\alpha\beta}(X, F)$.*

Zauważmy, że biorąc $E = F = \mathbb{R}$, $X = Y = (-1, 1)$, $\varphi(t) := |t|^\beta$, $f(x) = |x|^\alpha$, widzimy, że wyniku z (b) nie da się poprawić (Ćwiczenie).

Dowód. (a) $\dfrac{\|f(x)g(x) - f(y)g(y)\|}{(\varrho(x, y))^\alpha} \leqslant \dfrac{\|(f(x) - f(y))g(y)\| + \|f(x)(g(x) - g(y))\|}{(\varrho(x, y))^\alpha} \leqslant |f|_\alpha\|g\|_X + \|f\|_X|g|_\alpha$, skąd wynika, że $\|fg\|_{X,\alpha} = \|fg\|_X + |fg|_\alpha \leqslant \|f\|_X\|g\|_X + |f|_\alpha\|g\|_X + \|f\|_X|g|_\alpha \leqslant \|f\|_{X,\alpha}\|g\|_{X,\alpha}$.

(b) $\dfrac{\|f(\varphi(t)) - f(\varphi(u))\|_F}{(\varrho(t, u))^{\alpha\beta}} \leqslant |f|_{Y,\alpha}\Big(\dfrac{\|\varphi(t) - \varphi(u)\|_E}{(\varrho(t, u))^\beta}\Big)^\alpha \leqslant |f|_{Y,\alpha}|\varphi|^\alpha_{X,\beta}$, skąd wynika, że $\|f \circ \varphi\|_{X,\alpha\beta} \leqslant \|f\|_Y + |f|_{Y,\alpha}|\varphi|^\alpha_{X,\beta}$. $\square$

ROZDZIAŁ 5

Pochodna

5.1. Podstawowe pojęcia

W tym rozdziale $P \subset \mathbb{R}$ będzie nietrywialnym przedziałem nieredukującym się do punktu, zaś E — przestrzenią unormowaną nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $E \neq \{0\}$.

Definicja 5.1.1. Niech $f : P \longrightarrow E$, $a \in P$. Powiemy, że f ma w punkcie a *pochodną*, jeżeli istnieje granica

$$f'(a) := \lim_{P-a \ni h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in E,$$

gdzie $P - a = \{x - a : x \in P\}$ (zauważmy, że $P - a$ jest przedziałem i $0 \in P - a$). Piszemy wtedy $f \in \mathcal{D}(P, E; a)$ — *jest to oznaczenie niestandardowe, dla potrzeb naszego wykładu.* W przypadku $E = \mathbb{R}$ piszemy $f \in \mathcal{D}(P; a)$. Jeżeli a jest prawym końcem przedziału P, to wtedy mamy tu do czynienia z granicą lewostronną i mówimy o pochodnej lewostronnej

$$f'_-(a) := \lim_{P-a \ni h \to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Podobnie dla pochodnych prawostronnych.

Niech $\mathcal{D}(P, E) := \bigcap_{a \in P} \mathcal{D}(P, E; a) = \{f : P \longrightarrow E : \forall_{a \in P} : f'(a) \text{ istnieje}\}$ — *jest to oznaczenie niestandardowe, dla potrzeb naszego wykładu.* Jak zwykle $\mathcal{D}(P) := \mathcal{D}(P, \mathbb{R})$.

Przykład 5.1.2. Niech $f(x) := |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Wtedy $f'_-(0) = -1$ oraz $f'_+(0) = +1$.

Twierdzenie 5.1.3. *Niech $f : P \longrightarrow E$, $a \in P$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *$f'(a)$ istnieje;*

(ii) *istnieje $\ell \in E$ oraz funkcja $\alpha : P - a \longrightarrow E$ taka, że $f(a+h) = f(a) + \ell h + \alpha(h)h$ dla $h \in P - a$ oraz $\lim_{P-a \ni h \to 0} \alpha(h) = 0$.*

Wyrażenie $\alpha(h)h$ zapisujemy krótko $o(h)$ przy $h \longrightarrow 0$.

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (ii): $\ell := f'(a)$, $\alpha(h) := \begin{cases} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a), & \text{jeżeli } h \in P - a,\ h \neq 0 \\ 0, & \text{jeżeli } h = 0 \end{cases}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell + \alpha(h)$. □

Obserwacja 5.1.4 (Interpretacja geometryczna pochodnej)**.** Niech $f, g : P \longrightarrow E$, $a \in \operatorname{int} P$. Mówimy, że *$f, g$ są styczne w punkcie a*, jeżeli $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-g(x)}{x-a} = 0$.

W tym języku, dla $a \in \operatorname{int} P$, mamy: $f'(a)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego $\ell \in E$ odwzorowania f i $P \ni x \longmapsto f(a) + \ell(x - a)$ są styczne w punkcie a.

Twierdzenie 5.1.5. $\mathcal{D}(P, E; a) \subset \mathcal{C}(P, E; a)$.

Dowód. $\lim_{h \to 0}(f(a+h) - f(a)) = \lim_{h \to 0} \big(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\big)h = f'(a) \cdot 0 = 0.$ □

Twierdzenie 5.1.6. (a) *Niech $f, g \in \mathcal{D}(P, E; a)$. Wtedy $f + g \in \mathcal{D}(P, E; a)$ oraz $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.*

(b) *Jeżeli F_1, F_2 są przestrzeniami unormowanymi, $f_j \in \mathcal{D}(P, F_j; a)$, $j = 1, 2$, oraz $B : F_1 \times F_2 \longrightarrow E$ jest odwzorowaniem dwuliniowym ciągłym ($B \in \mathcal{L}(F_1, F_2; E)$), to $B(f_1, f_2) \in \mathcal{D}(P, E; a)$ oraz $(B(f_1, f_2))'(a) = B(f_1'(a), f_2(a)) + B(f_1(a), f_2'(a))$.*

W szczególności, jeżeli $f \in \mathcal{D}(P, \mathbb{K}; a)$, $g \in \mathcal{D}(P, E; a)$, to $f \cdot g \in \mathcal{D}(P, E; a)$ oraz $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

(c) *Niech $f \in \mathcal{D}(P,E;a)$, $g \in \mathcal{D}(P,\mathbb{K};a)$, $g(x) \neq 0$, $x \in P$. Wtedy $\frac{f}{g} \in \mathcal{D}(P,E;a)$ oraz $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.*

(d) *Jeżeli $E = E_1 \times \cdots \times E_N$ i $f = (f_1,\dots,f_N) : P \longrightarrow E_1 \times \cdots \times E_N$ to:*
$f \in \mathcal{D}(P, E_1 \times \cdots \times E_N; a) \iff f_j \in \mathcal{D}(P,E_j;a)$, $j = 1,\dots,N$.

(e) *Jeżeli $L : E \longrightarrow F$ jest odwzorowaniem liniowym ciągłym ($L \in \mathcal{L}(E,F)$) oraz $f \in \mathcal{D}(P,E;a)$, to $L \circ f \in \mathcal{D}(P,F)$ i $(L \circ f)'(a) = L(f'(a))$.*

Dowód. (a) Ćwiczenie.

(b)
$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{B(f_1(a+h), f_2(a+h)) - B(f_1(a), f_2(a))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} B\Big(\frac{f_1(a+h)-f_1(a)}{h}, f_2(a+h)\Big) + \lim_{h\to 0} B\Big(f_1(a), \frac{f_2(a+h)-f_2(a)}{h}\Big) \\
&= B(f_1'(a), f_2(a)) + B(f_1(a), f_2'(a)).
\end{aligned}$$

(c) Wystarczy rozważyć przypadek $f \equiv 1$.
$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{\frac{g(a+h)-g(a)}{h}}{g(a+h)g(a)} = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}.$$

(d), (e) Ćwiczenie. □

Twierdzenie 5.1.7 (Twierdzenie o pochodnej złożenia)**.** *Niech $\varphi : Q \longrightarrow P$, gdzie Q jest przedziałem nieredukującym się do punktu i niech $t_0 \in Q$, $a := \varphi(t_0)$, $\varphi \in \mathcal{D}(Q;t_0)$ i $f \in \mathcal{D}(P,E;a)$. Wtedy $f \circ \varphi \in \mathcal{D}(Q,E;t_0)$ oraz $(f\circ\varphi)'(t_0) = f'(a)\varphi'(t_0)$.*

Dowód. Mamy
$$\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \alpha(h)h, \quad h \in P - a, \text{ gdzie } \lim_{h\to 0}\alpha(h) = 0, \\
\varphi(t_0+t) &= \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)t + \beta(t)t, \quad t \in Q - t_0, \text{ gdzie } \lim_{t\to 0}\beta(t) = 0.
\end{aligned}$$
Wynika stąd, że
$$\begin{aligned}
f(\varphi(t_0+t)) &= f(a) + f'(a)(\varphi(t_0+t) - \varphi(t_0)) + \alpha(\varphi(t_0+t)-\varphi(t_0))(\varphi(t_0+t)-\varphi(t_0)) \\
&= f(a) + f'(a)(\varphi'(t_0)t + \beta(t)t) + \alpha(\varphi(t_0+t)-\varphi(t_0))(\varphi'(t_0)t + \beta(t)t) \\
&= f(a) + f'(a)\varphi'(t_0)t + \gamma(t)t,
\end{aligned}$$
gdzie $\gamma(t) := f'(a)\beta(t) + \alpha(\varphi(t_0+t)-\varphi(t_0))(\varphi'(t_0)+\beta(t))$. Pozostaje zauważyć, że $\gamma(t) \longrightarrow 0$ gdy $t \longrightarrow 0$. □

Twierdzenie 5.1.8 (Twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej)**.** *Niech $f : P \longrightarrow Q$ będzie bijekcją, gdzie $P, Q \subset \mathbb{R}$ są przedziałami, $a \in P$, $b := f(a)$ i niech $g := f^{-1} : Q \longrightarrow P$. Załóżmy, że $f'(a)$ istnieje. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *$g'(b)$ istnieje;*

(ii) *g jest ciągła w punkcie b oraz $f'(a) \neq 0$.*

Ponadto, $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Ciągłość g w punkcie b jest oczywista. Ponieważ, $g \circ f = \mathrm{id}_P$, z twierdzenia o różniczkowaniu złożenia dostajemy $g'(b)f'(a) = 1$. Wynika stąd, że $f'(a) \neq 0$ oraz że $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Niech $t \in Q - b$ i niech $h(t) := g(b+t) - g(b)$. Wobec ciągłości funkcji g w punkcie b wnioskujemy, że $\lim_{t\to 0} h(t) = 0$. Widać, że $t = f(a + h(t)) - f(a)$. Mamy
$$\lim_{t\to 0} \frac{g(b+t)-g(b)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{h(t)}{f(a+h(t)) - f(a)} = \frac{1}{\lim_{t\to 0} \frac{f(a+h(t))-f(a)}{h(t)}} = \frac{1}{f'(a)}.$$ □

Przykład 5.1.9 (Pochodne funkcji elementarnych)**.** (a) $\mathrm{const}' = 0$.

(b) $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Dowód indukcyjny. Dla $n = 1$ wzór jest oczywisty.

$n \rightsquigarrow n+1$: $(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n = nx^{n-1}x + x^n = (n+1)x^n$.

(c) $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}_*$, $n \in \mathbb{Z}_{<0}$.
Niech $n = -k$. Wtedy $(x^n)' = (\frac{1}{x^k})' = -\frac{kx^{k-1}}{x^{2k}} = nx^{n-1}$.
(d) $(e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ (Twierdzenie 2.3.1(i)).
(e) $(a^x)' = a^x \ln a$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$.
$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$.
(f) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.
Niech $y := \log_a x$. Wtedy $(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$.
(g) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = (e^{\alpha \ln x})\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$.
(h) $(\sin x)' = \cos x$.
Istotnie, ponieważ $\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})}{h}$, wystarczy pokazać, że $\lim\limits_{t\to 0+} \frac{\sin t}{t} = 1$, co z kolei wynika z oszacowań $\sin t < t < \operatorname{tg} t$ dla $0 < t < \frac{\pi}{2}$.
(i) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$.
Niech $y := \arcsin x$. Wtedy $(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
(j) $(\cos x)' = -\sin x$.
(k) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$.
(l) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
(m) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.
(n) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
(o) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.
(p) $(\sinh x)' = \cosh x$.
(q) $(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
(r) $(\cosh x)' = \sinh x$.
(s) $(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x > 1$.
(t) $(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
(u) $(\operatorname{artgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$, $|x| < 1$.
(v) $(\operatorname{ctgh} x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$.
(w) $(\operatorname{arctgh} x)' = \frac{1}{x^2-1}$, $x > 1$.

5.2. Twierdzenia o wartościach średnich

Definicja 5.2.1. Niech $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie X jest przestrzenią metryczną, i niech $a \in X$. Mówimy, że f ma w punkcie a *maksimum lokalne* (odp. *minimum lokalne*), jeżeli istnieje otoczenie U punktu a takie, że $f(x) \leqslant f(a)$ (odp. $f(x) \geqslant f(a)$) dla $x \in U$. Jeżeli f ma w punkcie a maksimum bądź minimum lokalne, to mówimy, że ma *ekstremum lokalne*.

Mówimy, że f ma w punkcie a *silne maksimum lokalne* (odp. *silne minimum lokalne*), jeżeli istnieje otoczenie U punktu a takie, że $f(x) < f(a)$ (odp. $f(x) > f(a)$) dla $x \in U \setminus \{a\}$. Jeżeli f ma w punkcie a silne maksimum bądź silne minimum lokalne, to mówimy, że ma *silne ekstremum lokalne*.

Twierdzenie 5.2.2 (Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego)**.** *Niech $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ ma w punkcie $a \in \operatorname{int} P$ ekstremum lokalne i $f'(a)$ istnieje. Wtedy $f'(a) = 0$.*

Dowód. Rozważmy przypadek maksimum lokalnego: niech $f(a + h) \leqslant f(a)$ dla $|h| < \delta$. Wtedy

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \begin{cases} \geqslant 0, & \text{jeżeli } h \in (-\delta, 0) \\ \leqslant 0, & \text{jeżeli } h \in (0, \delta) \end{cases},$$

a ponieważ powyższy iloraz różnicowy ma granicę, gdy $h \longrightarrow 0$, to musi być $f'(a) = 0$. $\square$

Przykład 5.2.3. Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji nie jest wystarczający. Na przykład, funkcja $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, spełnia w $x = 0$ warunek konieczny istnienia ekstremum, ale nie posiada w $x = 0$ ekstremum lokalnego.

Twierdzenie 5.2.4 (Twierdzenie Rolle'a [1] o wartości średniej)**.** *Niech $f \in \mathcal{C}([a,b]) \cap \mathcal{D}((a,b))$ będzie taka, że $f(a) = f(b)$. Wtedy istnieje $\xi \in (a,b)$ takie, że $f'(\xi) = 0$.*

Dowód. Na podstawie twierdzenia Weierstrassa, istnieją $c_-, c_+ \in [a,b]$ takie, że

$$m := \min f = f(c_-), \quad M := \max f = f(c_+) \in \mathbb{R}.$$

Jeżeli $m = M$, to f jest funkcją stałą, a więc $f' \equiv 0$. Możemy więc założyć, że $m < M$. Wtedy $c_- \in (a,b)$ lub $c_+ \in (a,b)$. Przyjmijmy, że $\xi := c_+ \in (a,b)$. Ponieważ f osiąga w ξ maksimum, więc z Twierdzenia 5.2.2 wynika, że $f'(\xi) = 0$. □

Twierdzenie 5.2.5 (Twierdzenie Lagrange'a [2] o wartości średniej)**.** *Niech $f \in \mathcal{C}([a,b]) \cap \mathcal{D}((a,b))$. Wtedy istnieje $\xi \in (a,b)$ takie, że*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dowód. Korzystamy z twierdzenia Rolle'a dla funkcji

$$\varphi(x) := f(x) - \Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\Big), \quad x \in [a,b].$$ □

Twierdzenie 5.2.6 (Twierdzenie Cauchy'ego o wartości średniej)**.** *Niech $f, g \in \mathcal{C}([a,b]) \cap \mathcal{D}((a,b))$. Wtedy istnieje $\xi \in (a,b)$ takie, że*

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

Jeżeli ponadto $g'(x) \neq 0$, $x \in (a,b)$, to z Twierdzenia Rolle'a wynika, że $g(a) \neq g(b)$, a zatem mamy klasyczną postać twierdzenia Cauchy'ego o wartości średniej:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Dla $g(x) \equiv x$ dostajemy twierdzenie Lagrange'a.

Dowód. Jeżeli $g(a) = g(b)$, to z Twierdzenia Rolle'a dostajemy $\xi \in (a,b)$ taki, że $g'(\xi) = 0$ i wzór zachodzi. Jeżeli $g(a) \neq g(b)$, to stosujemy twierdzenie Rolle'a do funkcji

$$\varphi(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)), \quad x \in [a,b].$$ □

Twierdzenie 5.2.7. *Niech $f \in \mathcal{D}(P)$ i $f' \equiv 0$. Wtedy $f \equiv$ const.*

Dowód. Weźmy dowolne $a, b \in P$, $a < b$. Z twierdzenia Lagrange'a wynika istnienie $\xi \in (a,b)$ takiego, że $0 = f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. A stąd $f(a) = f(b)$. □

Obserwacja 5.2.8. Niech $f : (0,1) \cup (1,2) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := 0$ dla $x \in (0,1)$, $f(x) := 1$ dla $x \in (1,2)$. Wtedy $f' \equiv 0$.

Twierdzenie 5.2.9. *Niech $f \in \mathcal{D}(P)$ i $|f'(x)| \leqslant M$, $x \in P$. Wtedy*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|, \quad x, y \in P.$$

Dowód. Ustalmy $x, y \in P$, $x < y$. Z twierdzenia Lagrange'a istnieje $\xi \in (x,y)$ taki, że $f'(\xi) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. □

Twierdzenie 5.2.10. *Niech $f \in \mathcal{D}(P)$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *f jest rosnąca (odp. malejąca);*
(ii) *$f'(x) \geqslant 0$ (odp. $f'(x) \leqslant 0$) dla dowolnego $x \in P$.*

---

[1] Michel Rolle (1652–1719).
[2] Joseph de Lagrange (1736–1813).

Dowód. Rozważymy przypadek funkcji rosnącej.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Ustalmy $x \in P$. Jeżeli x nie jest prawym końcem przedziału, to

$$f'(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0.$$

Jeżeli x jest prawym końcem przedziału, to

$$f'(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \geqslant 0.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Niech $x, y \in P$, $x < y$. Na podstawie twierdzenia Lagrange'a mamy $0 \leqslant f'(\xi) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$.

Przypadek funkcji malejącej jest analogiczny — Ćwiczenie. $\square$

Twierdzenie 5.2.11. *Niech $f \in \mathcal{D}(P)$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *f jest silnie rosnąca (odp. silnie malejąca);*

(ii) *$f'(x) \geqslant 0$ (odp. $f'(x) \leqslant 0$) dla dowolnego $x \in P$ oraz $\operatorname{int}(\{x \in P : f'(x) = 0\}) = \varnothing$.*

Dowód. Rozważymy przypadek funkcji ściśle rosnącej.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Ponieważ f jest rosnąca, więc $f'(x) \geqslant 0$ dla dowolnego $x \in P$. Przypuśćmy, że $(a, b) \subset \{x \in P : f'(x) = 0\}$, $a < b$. Wtedy f jest stała w (a, b) — sprzeczność.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Wiemy, że f jest rosnąca. Przypuśćmy, istnieją $a, b \in P$ takie, że $a < b$ oraz $f(a) = f(b)$, a więc f jest stała w $[a, b]$, czyli $(a, b) \subset \{x \in P : f'(x) = 0\}$ — sprzeczność.

Przypadek funkcji ściśle malejącej jest analogiczny — Ćwiczenie. $\square$

Twierdzenie 5.2.12. *Niech $f \in \mathcal{D}(P)$. Wtedy f' ma własność Darboux.*

Dowód. Niech $a, b \in P$, $a < b$, $f'(a) < \gamma < f'(b)$. Niech $g(x) := f(x) - \gamma x$. Wtedy $g \in \mathcal{D}(P)$, $g'(a) < 0$ oraz $g'(b) > 0$. W szczególności, minimum globalne funkcji g w przedziale $[a, b]$ musi być przyjęte w pewnym punkcie $c \in (a, b)$ (Ćwiczenie). Wtedy $g'(c) = 0$, czyli $f'(c) = \gamma$.

Przypadek $f'(a) > \gamma > f'(b)$ jest analogiczny (g osiąga maksimum globalne w $[a, b]$ w punkcie $c \in (a, b)$) — Ćwiczenie. $\square$

Przykład 5.2.13. Funkcja

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{jeżeli } x \in \mathbb{R}_* \\ 0, & \text{jeżeli } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna na $\mathbb{R}$, $f'(0) = 0$, $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x}\big(-\frac{1}{x^2}\big) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

f' nie jest ciągła w 0 (Ćwiczenie), choć ma własność Darboux.

5.3. Reguła de L'Hôpitala

Twierdzenie 5.3.1 (Reguła de L'Hôpitala [3])**.** *Niech $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, będą różniczkowalne i takie, że $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ dla $x \in (a, b)$. Niech $c \in \{a, b\}$. Załóżmy, że spełniony jest jeden z poniższych warunków:*

(i) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$;

(ii) $\lim\limits_{x\to c} |g(x)| = +\infty$.

Wtedy $\liminf\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leqslant \liminf\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \limsup\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \limsup\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

W szczególności, jeżeli istnieje granica $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$, *to* $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Dowód. Wystarczy pokazać, że jeżeli $(x_n)_{n=1}^\infty \subset (a, b)$, $x_n \longrightarrow c$, jest taki, że $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = d \in \overline{\mathbb{R}}$, to istnieje ciąg $(\xi_n)_{n=1}^\infty \subset (a, b)$, $\xi_n \longrightarrow c$, taki że $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = d$.

---

[3] Guillaume de L'Hôpital (1661–1704).

Zauważmy, że na mocy twierdzenia Cauchy'ego, dla ustalonych dwóch punktów $x, y \in (a,b)$, $x \neq y$, istnieje $\xi = \xi(x,y) \in (x,y)$ (tutaj (x,y) oznacza zwykły przedział, gdy $x < y$, oraz przedział (y,x), gdy $y < x$) takie, że $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}$, czyli

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)}}{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}. \tag{*}$$

Ustalmy ciąg $(x_n)_{n=1}^\infty \subset (a,b)$, $x_n \longrightarrow c$, taki że $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = d \in \overline{\mathbb{R}}$.

Przypadek (i): Dobieramy ciąg $(y_n)_{n=1}^\infty \subset (a,b) \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ taki że $y_n \longrightarrow c$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f(y_n)}{g(x_n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{g(y_n)}{g(x_n)} = 0$. Niech $\xi_n := \xi(x_n, y_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\xi_n \longrightarrow c$ oraz, wobec (*), $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{f(x_n)}{g(x_n)} - \frac{f(y_n)}{g(x_n)}}{1 - \frac{g(y_n)}{g(x_n)}} = d$.

Przypadek (ii): z ciągu $(x_n)_{n=1}^\infty$ wybieramy podciąg $(z_n)_{n=1}^\infty$, taki że: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{g(z_n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{g(x_n)}{g(z_n)} = 0$ oraz $z_n \neq x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Niech $\xi_n := \xi(z_n, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\xi_n \longrightarrow c$ oraz, wobec (*), $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{f(z_n)}{g(z_n)} - \frac{f(x_n)}{g(z_n)}}{1 - \frac{g(x_n)}{g(z_n)}} = d$. $\square$

Przykład 5.3.2. (a) Korzystając n–krotnie z reguły de L'Hôpitala dostajemy:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

W konsekwencji, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$ oraz $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha \ln x = 0$ dla dowolnego $\alpha > 0$ (Ćwiczenie).

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$.

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x} = 1$, ale granica $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x+\sin x)'}{x'}$ nie istnieje.

(d) $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$, ale

$\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{-\frac{1}{x\ln^2 x}} = -\lim\limits_{x\to 0+} x\ln^2 x = \dots$ i problem jest jeszcze bardziej skomplikowany niż na początku.

5.4. Twierdzenie o przyrostach skończonych

Przykład 5.4.1. Twierdzenie Rolle'a nie zachodzi dla odwzorowań o wartościach w $\mathbb{R}^2$. Dla przykładu, niech

$$f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x) := (\cos x, \sin x).$$

Wtedy $f(0) = f(2\pi) = (1,0)$, ale $f'(\xi) = (-\sin\xi, \cos\xi) \neq (0,0)$, $\xi \in [0, 2\pi]$.

Twierdzenie 5.4.2 (Twierdzenie o przyrostach skończonych)**.** *Niech*

$$f : [a,b] \longrightarrow E, \quad \varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

będą funkcjami ciągłymi takimi, że $f'_+(x)$ i $\varphi'_+(x)$ istnieją dla $x \in [a,b] \setminus S$, gdzie $\#S \leqslant \aleph_0$. Wtedy, jeżeli $\|f'_+(x)\| \leqslant \varphi'_+(x)$ dla dowolnego $x \in [a,b] \setminus S$, to

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \varphi(b) - \varphi(a).$$

Twierdzenie pozostaje prawdziwe, jeżeli pochodne prawostronne zastąpimy przez pochodne lewostronne.

Dowód. Możemy założyć, że $\#S = \aleph_0$ oraz $a, b \in S$. Niech $S = \{a_1, a_2, \dots\}$. Weźmy $\varepsilon > 0$ i niech

$$\Phi(x) := \|f(x) - f(a)\| - (\varphi(x) - \varphi(a)) - \varepsilon(x-a) - \varepsilon,$$

$$\Psi(x) := \varepsilon \sum_{n:\, a_n < x} \frac{1}{2^n}, \quad x \in [a,b] \quad \Big(\sum_{\varnothing} \dots := 0\Big), \quad (^4)$$

$$I := \{x \in [a,b] : \Phi(x) \leqslant \Psi(x)\}, \quad c := \sup I.$$

Wystarczy pokazać, że $b \in I$ (a następnie $\varepsilon \longrightarrow 0$).

Odnotujmy, że Φ jest funkcją ciągłą, zaś Ψ jest funkcją niemalejącą.

Zauważmy, że $a \in I$ (bo $\Phi(a) = -\varepsilon$) oraz $[a, a+\delta] \subset I$ dla pewnego $\delta > 0$ (z ciągłości Φ). W szczególności, $c > a$. Ponadto, $c \in I$.

Istotnie, niech $I \ni x_n \nearrow c$, wtedy

$$\Phi(x_n) \leqslant \Psi(x_n) \leqslant \Psi(c), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Teraz $n \longrightarrow +\infty$ i korzystamy z ciągłości Φ.

Przypuśćmy, że $c < b$. Mamy dwa możliwe przypadki:

- $c = a_{n_0} \in S$. Z ciągłości Φ wynika, że istnieje $\delta > 0$ taka, że $\Phi(x) \leqslant \Phi(c) + \varepsilon/2^{n_0}$ dla $x \in [c, c+\delta] \subset [a, b]$. Wtedy, dla $x \in (c, c+\delta]$ mamy

$$\Phi(x) \leqslant \Psi(c) + \frac{\varepsilon}{2^{n_0}} \leqslant \Psi(x).$$

Wynika stąd, że $[c, c+\delta] \subset I$; sprzeczność.

- $c \notin S$. Niech

$$f(c+h) = f(c) + f'_+(c)h + \alpha(h)h, \quad \varphi(c+h) = \varphi(c) + \varphi'_+(c)h + \beta(h)h,$$

gdzie $\lim\limits_{h\to 0+} \alpha(h) = 0$ i $\lim\limits_{h\to 0+} \beta(h) = 0$. Wynika stąd, że dla małych $h > 0$ mamy

$$\begin{aligned}\Phi(c+h) &= \|f(c+h) - f(a)\| - (\varphi(c+h) - \varphi(a)) - \varepsilon(c+h-a) - \varepsilon \\ &\leqslant \Phi(c) + \|f(c+h) - f(c)\| - (\varphi(c+h) - \varphi(c)) - \varepsilon h \\ &\leqslant \Psi(c) + \|f'_+(c)\|h + \|\alpha(h)\|h - \varphi'_+(c)h - \beta(h)h - \varepsilon h \\ &\leqslant \Psi(c+h) + \big(\|\alpha(h)\| - \beta(h) - \varepsilon\big)h.\end{aligned}$$

W takim razie $[c, c+h] \subset I$ dla małych $h > 0$; sprzeczność.

W przypadku pochodnych lewostronnych definiujemy

$$g : [a,b] \longrightarrow E, \quad \psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$g(x) := -f(a+b-x), \quad \psi(x) := -\varphi(a+b-x).$$

Bez trudu sprawdzamy, że $g'_+(x) = f'_-(a+b-x)$ i $\psi'_+(x) = \varphi'_-(a+b-x)$ oraz $\|g'_+(x)\| \leqslant \psi'_+(x)$ dla $x \in [a,b] \setminus S'$, gdzie $S' := a+b-S$. Stąd, na podstawie wersji z pochodnymi prawostronnymi, mamy

$$\|f(b) - f(a)\| = \| - g(a) + g(b)\| \leqslant \psi(b) - \psi(a) = -\varphi(a) + \varphi(b). \qquad \square$$

Wniosek 5.4.3 (por. Twierdzenie 5.2.10)**.** *Jeżeli $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą taką, że $\varphi'_+(x) \geqslant 0$ dla $x \in [a,b] \setminus S$, gdzie $\#S \leqslant \aleph_0$, to φ jest niemalejąca. Wynik pozostaje prawdziwy dla pochodnych lewostronnych. W szczególności, jeżeli $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą taką, że $\varphi'_+(x) = 0$ dla $x \in [a,b] \setminus S$, gdzie $\#S \leqslant \aleph_0$, to $\varphi \equiv \mathrm{const}$.*

Dowód. Niech $x', x'' \in [a,b]$, $x' < x''$. Stosujemy twierdzenie o przyrostach skończonych dla $f := 0$ i $\varphi|_{[x',x'']}$. $\square$

Wniosek 5.4.4. *Jeżeli $f : [a,b] \longrightarrow E$ jest odwzorowaniem ciągłym takim, że $f'_+(x)$ istnieje dla $x \in [a,b] \setminus S$, gdzie $\#S \leqslant \aleph_0$, to dla dowolnego $\ell \in E$ mamy*

$$\|f(b) - f(a) - \ell(b-a)\| \leqslant \sup\{\|f'_+(x) - \ell\| : x \in [a,b] \setminus S\}(b-a).$$

W szczególności,

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup\{\|f'_+(x)\| : x \in [a,b] \setminus S\}(b-a).$$

Wynik pozostaje prawdziwy dla pochodnych lewostronnych.

Dowód. Zastępując f przez $[a,b] \ni x \longmapsto f(x) - \ell x$, redukujemy twierdzenie do $\ell = 0$.

Jeżeli $M := \sup\{\|f'_+(x)\| : x \in [a,b] \setminus S\} < +\infty$, to stosujemy twierdzenie o przyrostach skończonych do funkcji f i $\varphi(x) := Mx$, $x \in [a,b]$. $\square$

(4) Ponieważ nie dysponujemy jeszcze pojęciem szeregu, sumę $\sum\limits_{n\in A} \frac{1}{2^n}$ (dla $A \subset \mathbb{N}$) rozumiemy jako $\sup\Big\{\sum\limits_{n\in B} \frac{1}{2^n} : B \subset A,\ B \text{ skończony}\Big\}$. Wiemy, że $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1$, więc funkcja Ψ jest poprawnie określona.

Wniosek 5.4.5. *Jeżeli $f : [a,b] \longrightarrow E$ jest odwzorowaniem ciągłym takim, że $f'_+(x)$ istnieje dla $x \in [a,b] \setminus S$, gdzie $\#S \leqslant \aleph_0$, oraz $\|f'_+(x)\| \leqslant M$, $x \in [a,b] \setminus S$, to*

$$\|f(x') - f(x'')\| \leqslant M|x' - x''|, \quad x', x'' \in [a,b],$$

tzn. f spełnia warunek Lipschitza ze stałą M.

Wynik pozostaje prawdziwy dla pochodnych lewostronnych.

Wniosek 5.4.6. *Niech $f : P \longrightarrow E$ będzie funkcją ciągłą i różniczkowalną w $P \setminus \{a\}$ dla pewnego $a \in P$. Jeżeli $\ell := \lim\limits_{x \to a} f'(x)$ istnieje, to $f'(a)$ istnieje i $f'(a) = \ell$.*

Dowód. Na podstawie Wniosku 5.4.4 mamy $f(a+h) = f(a) + \ell h + \alpha(h)h$, gdzie

$$\|\alpha(h)\| \leqslant \sup\{\|f'(x) - \ell\| : x \in (a, a+h]\} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0. \qquad \square$$

5.5. Pochodne wyższych rzędów

Definicja 5.5.1. Niech $f : P \longrightarrow E$, $a \in P$ i załóżmy, że $f'(x)$ istnieje dla $x \in U \subset P$, gdzie U jest pewnym relatywnym otoczeniem punktu a. Wtedy można rozważać *drugą pochodną funkcji f w punkcie a*: $f''(a) := (f')'(a)$. Ogólnie, jeżeli $f^{(n-1)}(x)$ istnieje dla $x \in U$, to możemy rozważać *n-tą pochodną funkcji f w punkcie a*: $f^{(n)}(a) := (f^{(n-1)})'(a)$. Niech

$$\mathcal{D}^n(P,E;a) : = \{f : P \longrightarrow E : f^{(n)}(a) \text{ istnieje}\}, \quad a \in P,$$

$$\mathcal{D}^n(P,E) : = \bigcap_{a \in P} \mathcal{D}^n(P,E;a) = \{f : P \longrightarrow E : f^{(n)}(a) \text{ istnieje dla dowolnego } a \in P\},$$

$$\mathcal{C}^n(P,E) : = \{f \in \mathcal{D}^n(P,E) : f^{(n)} \in \mathcal{C}(P,E)\}, \quad \mathcal{C}^0(P,E) := \mathcal{C}(P,E), \quad \mathcal{C}^\infty(P,E) := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}^n(P,E);$$

$\mathcal{D}^n(P,E;a)$, $\mathcal{D}^n(P,E)$ *to oznaczenia niestandardowe.* Jak zwykle, $\mathcal{D}^n(P;a) := \mathcal{D}^n(P,\mathbb{R};a)$, $\mathcal{D}^n(P) := \mathcal{D}(P,\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^n(P) := \mathcal{C}^n(P,\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^\infty(P) := \mathcal{C}^\infty(P,\mathbb{R})$.

Obserwacja 5.5.2 (Ćwiczenie). (a) $\mathcal{D}^{n+1}(P,E) \subset \mathcal{C}^n(P,E) \subset \mathcal{D}^n(P,E) \subset \mathcal{C}^{n-1}(P,E)$.

(b) $\mathcal{C}^\infty(P,E) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}^n(P,E)$.

(c) $f, g \in \mathcal{D}^n(P,E;a) \Longrightarrow f + g \in \mathcal{D}^n(P,E;a)$ oraz $(f+g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a)$.

(d) $f, g \in \mathcal{D}^n(P,E) \Longrightarrow f + g \in \mathcal{D}^n(P,E)$.

(e) $f, g \in \mathcal{C}^n(P,E) \Longrightarrow f + g \in \mathcal{C}^n(P,E)$ ($n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$).

(f) Dla funkcji $f_\ell : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_\ell(x) := \begin{cases} x^\ell \sin(\frac{1}{x}), & \text{jeżeli } x \neq 0 \\ 0, & \text{jeżeli } x = 0 \end{cases}, \quad \ell \in \mathbb{N}_0,$$

mamy:
- $f_\ell \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_*)$, $\ell \in \mathbb{N}_0$,
- $f_0 \notin \mathcal{C}(\mathbb{R})$,
- $f_{2k-1} \in \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{D}^k(\mathbb{R})$,
- $f_{2k} \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$.

(g) Niech $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$,

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x \leqslant 0 \\ e^{-1/x}, & \text{jeżeli } x > 0 \end{cases}.$$

Wtedy $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Zauważmy, że $f^{(k)}(0) = 0$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_0$.

(h) Niech $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$,

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } |x| \geqslant 1 \\ e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & \text{jeżeli } |x| < 1 \end{cases}.$$

Wtedy $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Zauważmy, że $f^{(k)}(\pm 1) = 0$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_0$.

(i) Z (g) i (h) wynika, że dla dowolnego przedziału $(a,b) \subset \mathbb{R}$ istnieje funkcja $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ taka, że $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\} = (a,b)$.

(j) Wiadomo, że dla każdego zbioru domkniętego $F \subset \mathbb{R}$, zbiór $\mathbb{R} \setminus F$ jest sumą co najwyżej przeliczalnej rodziny parami rozłącznych przedziałów otwartych. Stąd, na podstawie (i), dla dowolnego zbioru domkniętego $F \subset \mathbb{R}$ istnieje funkcja $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ taka, że $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\} = F$, $f^{(j)}(x) = 0$ dla dowolnych $x \in F$ oraz $j \in \mathbb{N}$.

(k) Dla dowolnych $x_0 \in \mathbb{R}, c_0, \dots, c_n \in E$ istnieje wielomian $p : \mathbb{R} \longrightarrow E$ stopnia $\leqslant n$ taki, że $p^{(j)}(x_0) = c_j$, $j = 0, \dots, n$.

(l) Niech $f \in \mathcal{C}^n(P, E)$, gdzie $P \in \{[a,b], [a,+\infty), (-\infty, b]\}$. Wtedy (na podstawie (k)) $\mathcal{C}^n(P,E) = \mathcal{C}^n(\mathbb{R},E)|_P$.

Ćwiczenie 5.5.3. (a) Dla dowolnych $0 < a < b < +\infty$ skonstruować funkcję $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, [0,1])$ taką, że

$$f(x) \begin{cases} = 1, & \text{jeżeli } 0 \leqslant x \leqslant a \\ > 0, & \text{jeżeli } a < x < b \\ = 0, & \text{jeżeli } x \geqslant b \end{cases}.$$

(b) Dla dowolnych $-\infty < a < p < q < b < +\infty$ skonstruować funkcję $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ taką, że

$$f(x) \begin{cases} = 0, & \text{jeżeli } 0 \leqslant x \leqslant a \\ = 1, & \text{jeżeli } p \leqslant x \leqslant q \\ = 0, & \text{jeżeli } x \geqslant b \end{cases}.$$

Twierdzenie 5.5.4 (Wzór Leibniza [5])**.** *Niech $B \in \mathcal{L}(F_1, F_2; E)$. Jeżeli $f_j \in \mathcal{D}^k(P, F_j; a)$, $j =, 1, 2$, to $B(F_1, f_2) \in \mathcal{D}^k(P, E; a)$ oraz*

$$(B(f_1, f_2))^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(f_1^{(k)}(a), f_2^{(n-k)}(a)).$$

W konsekwencji,
- *jeżeli $f_j \in \mathcal{D}^n(P, F_j)$, $j = 1, 2$, to $B(f_1, f_2) \in \mathcal{D}^n(P, E)$,*
- *jeżeli $f_j \in \mathcal{C}^n(P, F_j)$, $j = 1, 2$, to $B(f_1, f_2) \in \mathcal{C}^n(P, E)$.*

W szczególności, jeżeli $f \in \mathcal{D}^k(P, \mathbb{K}; a)$, $g \in \mathcal{D}^k(P, E; a)$, to $f \cdot g \in \mathcal{D}^k(P, E; a)$ oraz

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$

Ponadto,
- *jeżeli $f \in \mathcal{D}^n(P, \mathbb{K})$, $g \in \mathcal{D}^n(P, E)$, to $f \cdot g \in \mathcal{D}^n(P, E)$,*
- *jeżeli $f \in \mathcal{C}^n(P, \mathbb{K})$, $g \in \mathcal{C}^n(P, E)$, to $f \cdot g \in \mathcal{C}^n(P, E)$.*

Dowód. Wynik jest nam znany dla $n = 1$ (Twierdzenie 5.1.6(b)).

$n \rightsquigarrow n+1$: Mamy $(B(f_1, f_2))'(x) = B(f_1'(x), f_2(x)) + B(f_1(x), f_2'(x))$, $x \in U$, gdzie U jest relatywnym otoczeniem punktu a. Jeżeli $f_j \in \mathcal{D}^{n+1}(P, F_j; a)$, $j = 1, 2$, to $f_j' \in \mathcal{D}^n(P, F_j; a)$, $j = 1, 2$. Zatem z założenia indukcyjnego $B(f', g), B(f, g') \in \mathcal{D}^n(P, E; a)$. Stąd $(B(f_1, f_2))' \in \mathcal{D}^n(P, E; a)$, a więc $B(f_1, f_2) \in \mathcal{D}^{n+1}(P, E; a)$. Ponadto,

$$(B(f_1, f_2))^{(n+1)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big(B(f_1^{(k+1)}(a), f_2^{(n-k)}(a)) + B(f_1^{(k)}(a), f_2^{(n+1-k)}(a)) \Big)$$

$$\overset{\text{Ćwiczenie}}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B(f_1^{(k)}(a), f_2^{(n+1-k)}(a)). \qquad \square$$

Twierdzenie 5.5.5. *Niech $f : P \longrightarrow E$, $\varphi : Q \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie Q jest przedziałem, $\varphi(Q) \subset P$, $t_0 \in Q$, $a := \varphi(t_0)$. Wtedy:*

(a) *Jeżeli $f \in \mathcal{D}^n(P, E; a)$ i $\varphi \in \mathcal{D}^n(Q; t_0)$, to $f \circ \varphi \in \mathcal{D}^n(Q, E; t_0)$.*

(b) *Jeżeli $f \in \mathcal{D}^n(P, E)$ i $\varphi \in \mathcal{D}^n(Q)$, to $f \circ \varphi \in \mathcal{D}^n(Q, E)$.*

(c) *Jeżeli $f \in \mathcal{C}^n(P, E)$ i $\varphi \in \mathcal{C}^n(Q)$, to $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^n(Q, E)$.*

---

[5] Gottfryd Leibniz (1646–1716).

Wzór na $(f \circ \varphi)^{(n)}(t_0)$ wyprowadzimy w Twierdzeniu 5.6.12.

Dowód. (a) Wynik jest nam znany dla $n = 1$.

$n \rightsquigarrow n+1$: Wiemy, że $(f \circ \varphi)'(x) = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$, $x \in U$, gdzie U jest otoczeniem punktu t_0. Jeżeli $f \in \mathcal{D}^{n+1}(P, E; a)$ i $\varphi \in \mathcal{D}^{n+1}(Q; t_0)$, to z założenia indukcyjnego $f' \circ \varphi \in \mathcal{D}^n(Q, E; t_0)$. Na podstawie wzoru Leibniza $(f' \circ \varphi) \cdot \varphi' \in \mathcal{D}^n(Q, E; t_0)$. W takim razie $f \circ \varphi \in \mathcal{D}^{n+1}(Q, E; t_0)$.

(b) wynika z (a).

(c) Dla $n = 1$ wystarczy wykorzystać związek $(f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi) \cdot \varphi'$. Krok indukcyjny pozostawiamy jako Ćwiczenie. □

Twierdzenie 5.5.6. *Niech $U, V \subset \mathbb{R}$ będą przedziałami otwartymi i niech $f : U \longrightarrow V$ będzie bijekcją klasy $\mathcal{C}^n(U)$ ($1 \leqslant n \leqslant +\infty$). Wtedy jeżeli $f'(a) \neq 0$ dla pewnego $a \in U$, to funkcja $g := f^{-1}$ jest klasy $\mathcal{C}^n$ w pewnym otoczeniu punktu $b := f(a)$.*

Dowód. Wiemy, że f jest ściśle monotoniczna oraz g jest ciągła (Twierdzenie 4.4.19). Jeżeli $f'(a) \neq 0$, to $f'(x) \neq 0$ dla pewnego otoczenia punktu a. Możemy wiec założyć, że $f'(x) \neq 0$ dla $x \in U$. Z Twierdzenia 5.1.8 wynika, że $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = h \circ f' \circ g(y)$, $y \in V$, gdzie $h(z) := \frac{1}{z}$ ($h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_*)$). Przypuśćmy, że już wiemy, że $g \in \mathcal{C}^k(V)$ dla pewnego $k \in \{0, \dots, n-1\}$ (wiemy, że tak jest dla $k = 0$). Wtedy $h \circ f' \circ g \in \mathcal{C}^k(V)$ (Twierdzenie 5.5.5), a więc $g' \in \mathcal{C}^k(V)$. Stąd $g \in \mathcal{C}^{k+1}(V)$. Indukcja kończy dowód. □

5.6. Wzór Taylora

Obserwacja 5.6.1. Niech $p : \mathbb{R} \longrightarrow E$ będzie wielomianem stopnia $\leqslant n$, tzn. $p(x) = p_0 + p_1 x \cdots + p_n x^n$, gdzie $p_0, \dots, p_n \in E$. Niech $a \in \mathbb{R}$. Wtedy:

(a) $p_k = \frac{1}{k!} p^{(k)}(0)$, $k = 0, \dots, n$ (Ćwiczenie).

(b) $p(x) = p(a) + p'(a)(x-a) + \frac{1}{2} p''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} p^{(n)}(a)(x-a)^n$, $x \in \mathbb{R}$.

Istotnie, niech $q(x) := p(a+x)$. Zauważmy, że $q^{(j)}(x) = p^{(j)}(a+x)$, $j \in \mathbb{N}$. Wtedy na podstawie (a) mamy $p(a+x) = q(x) = q(0) + q'(0)x + \frac{1}{2} q''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!} q^{(n)}(0)x^n = p(a) + p'(a)x + \frac{1}{2} p''(a)x^2 + \dots + \frac{1}{n!} p^{(n)}(a)x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

Definicja 5.6.2. Niech $f \in \mathcal{D}^n(P, E; a)$, przy czym, jeżeli $n \geqslant 2$, to $f^{(n-1)}(x)$ istnieje dla dowolnego $x \in U$, gdzie U jest przedziałem będącym relatywnym otoczeniem punktu a. Zdefiniujmy

$$R_n(f, a, x) := f(x) - \Big(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n\Big), \quad x \in P.$$

Ponadto kładziemy $R_0(f, a, x) = f(x) - f(a)$, $x \in P$.

Obserwacja 5.6.3. (a) $R_n(f, a, a+h) = f(a+h) - \Big(f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2!} f''(a)h^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)h^n\Big)$, $h \in P - a$, czyli

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2!} f''(a)h^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)h^n + R_n(f, a, a+h), \quad h \in P - a.$$

(b) $R_n(f, a, \cdot)^{(k)}(x) = R_{n-k}(f^{(k)}, a, x)$, $x \in U$, $k = 0, \dots, n-1$.

(c) Jeżeli $f^{(n)}(x)$ istnieje dla dowolnego $x \in U$, to $R_n(f, a, \cdot)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a) = R_0(f^{(n)}, a, x)$, $x \in U$.

(d) Jeżeli $f^{(n+1)}(x)$ istnieje dla dowolnego $x \in U$, to $R_n(f, a, \cdot)^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$, $x \in U$.

Twierdzenie 5.6.4 (Wzór Taylora [6] z resztą Peano [7])**.** *Niech f będzie jak w Definicji 5.6.2. Wtedy*

$$\lim_{P-a \ni h \to 0} \frac{R_n(f, a, a+h)}{h^n} = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

czyli $R_n(f, a, a+h) = o(h^n)$ przy $P - a \ni h \longrightarrow 0$ ($n \in \mathbb{N}$).

[6] Brook Taylor (1717–1783).
[7] Giuseppe Peano (1858–1932).

Dowód. Indukcja względem n.

Dla $n = 1$ mamy definicję pochodnej: $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + R_1(f, a, a+h)$.

$n \rightsquigarrow n+1$: Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, dla małych $0 \neq h \in U - a$ mamy:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|h|^{n+1}}\|R_{n+1}(f,a,a+h)\| &= \frac{1}{|h|^{n+1}}\|R_{n+1}(f,a,a+h) - R_{n+1}(f,a,a)\| \\ &\leqslant \frac{1}{|h|^n}\sup\{\|R_{n+1}(f,a,\cdot)'(x)\| : x \in (a, a+h]\} \\ &\leqslant \frac{1}{|h|^n}\sup\{\|R_n(f',a,a+\xi)\| : \xi \in (0,h]\} \\ &\leqslant \sup\Big\{\frac{1}{|\xi|^n}\|R_n(f',a,a+\xi)\| : \xi \in (0,h]\Big\} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0. \qquad \square\end{aligned}$$

Twierdzenie 5.6.5 (Jednoznaczność wzoru Taylora)**.** *Niech f będzie jak w Definicji 5.6.2 i niech $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ będzie wielomianem $\mathbb{R} \longrightarrow E$ takim, że*

$$f(a+h) = p(h) + o(h^n) \text{ przy } P - a \ni h \longrightarrow 0. \tag{†}$$

Wtedy $a_j = \frac{1}{j!}f^{(j)}(a)$, $j = 0, \dots, n$.

Dowód. Ze wzoru Taylora z resztą Peano mamy

$$f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2!}f''(a)h^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n = a_0 + a_1h + a_2h^2 + \dots + a_nh^n + \alpha(h)h^n,$$

przy czym $\lim\limits_{P-a\ni h\to 0}\alpha(h) = 0$. Przy $h \longrightarrow 0$ wnioskujemy stąd natychmiast, że $f(a) = a_0$. W konsekwencji

$$f'(a) + \frac{1}{2!}f''(a)h + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^{n-1} = a_1 + a_2h + \dots + a_nh^{n-1} + \alpha(h)h^{n-1},$$

co przy $h \longrightarrow 0$ daje $f'(a) = a_1$. Powtarzamy rozumowanie (Ćwiczenie). $\square$

Obserwacja 5.6.6. Dla $n = 1$ wzór (†) jest oczywiście równoważny istnieniu $f'(a)$. Dla $n \geqslant 2$ tak być nie musi. Np.

$$f(x) := \begin{cases} x^{n+1}\sin\frac{1}{x^{n+1}}, & \text{jeżeli } x \neq 0 \\ 0, & \text{jeżeli } x = 0\end{cases};$$

wtedy dla $a := 0$ wzór (†) zachodzi z $a_0 = \dots = a_n = 0$, ale $f''(0)$ nie istnieje. Istotnie, $f'(0) = 0$, $f'(x) = (n+1)\big(x^n\sin(1/x^{n+1}) - (1/x)\cos(1/x^{n+1})\big)$ dla $x \neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ nie istnieje.

Twierdzenie 5.6.7 (Wzór Taylora dla funkcji klasy $\mathcal{C}^n$)**.** *Niech $P = [a,b] \subset \mathbb{R}$ i niech $f \in \mathcal{C}^n(P,E)$. Wtedy*

$$\lim_{\delta\to 0+}\Big(\sup\Big\{\frac{\|R_n(f,x,y)\|}{|x-y|^n} : x, y \in P,\ 0 < |x-y| \leqslant \delta\Big\}\Big) = 0.$$

Dowód. Indukcja ze względu na n. Przypadek $n = 1$ wynika z twierdzenia o przyrostach skończonych (Wniosek 5.4.4):

$$\begin{aligned}&\sup\Big\{\frac{\|R_1(f,a,a+h)\|}{|h|} : a, a+h \in P,\ 0 < |h| \leqslant \delta\Big\} \\ &= \sup\Big\{\frac{\|f(a+h) - f(a) - f'(a)h\|}{|h|} : a, a+h \in P,\ 0 < |h| \leqslant \delta\Big\} \\ &\leqslant \sup\{\|f'(x) - f'(a)\| : a, a+h \in P,\ x \in [a, a+h],\ 0 < |h| \leqslant \delta\} \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

$n \rightsquigarrow n+1$: Podobnie, jak w dowodzie Twierdzenia 5.6.4 mamy:

$$\begin{aligned}&\sup\Big\{\frac{\|R_{n+1}(f,a,a+h)\|}{|h|^{n+1}} : a, a+h \in P,\ 0 < |h| \leqslant \delta\Big\} \\ &\qquad\leqslant \sup\Big\{\frac{\|R_n(f',a,a+\xi)\|}{|\xi|^n} : a, a+\xi \in P,\ 0 < |\xi| \leqslant \delta\Big\} \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

$\square$

Twierdzenie 5.6.8 (Wzór Taylora dla funkcji klasy $\mathcal{D}^{n+1}$). *Jeżeli $f \in \mathcal{D}^{n+1}(P,E)$ oraz*

$$\|f^{(n+1)}(x)\| \leqslant M, \quad x \in P,$$

to

$$\|R_n(f,a,a+h)\| \leqslant \frac{M|h|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad a \in P,\ h \in P-a.$$

Dowód. Indukcja ze względu na n. Przypadek $n=0$ wynika z twierdzenia o przyrostach skończonych.

$n \rightsquigarrow n+1$: Ustalmy $a \in P$. Mamy

$$\|R_n(f',a,a+h)\| \leqslant \frac{M|h|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad h \in P-a.$$

Niech

$$g(h) := R_{n+1}(f,a,a+h), \quad \varphi(h) := \frac{Mh^{n+2}}{(n+2)!}, \quad h \in Q := (P-a) \cap \mathbb{R}_+.$$

Wobec poprzedniej nierówności mamy $\|g'\| \leqslant \varphi'$ na Q. Stąd, na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych,

$$\|R_{n+1}(f,a,a+h)\| = \|g(h)-g(0)\| \leqslant \varphi(h)-\varphi(0) = \frac{M|h|^{n+2}}{(n+2)!}, \quad h \in Q.$$

W analogiczny sposób traktujemy przypadek $h<0$ ($\varphi(h) := -M(-h)^{n+2}/(n+2)!$, $h \in (P-a)\cap\mathbb{R}_-$). $\square$

Ćwiczenie 5.6.9. Pokazać, że jeżeli $f \in \mathcal{D}^{n+1}(P,E)$ oraz $|f^{(n+1)}| \leqslant M$, to z Twierdzenia 5.6.8 wynika Twierdzenie 5.6.7.

Twierdzenie 5.6.10 (Wzór Taylora z resztą Schlömilcha [8]). *Załóżmy, że $f \in \mathcal{D}^{n+1}(P)$, $a \in P$, $h \in P-a$, $p>0$. Wtedy istnieje $\theta = \theta_n(a,h,p) \in (0,1)$ takie, że*

$$R_n(f,a,a+h) = \frac{1}{n!p} f^{(n+1)}(a+\theta h)(1-\theta)^{n+1-p}h^{n+1}.$$

W przypadku $p=n+1$ dostajemy resztę Lagrange'a:

$$R_n(f,a,a+h) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h)h^{n+1}.$$

W przypadku $p=1$ dostajemy resztę Cauchy'ego:

$$R_n(f,a,a+h) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(a+\theta h)(1-\theta)^n h^{n+1}.$$

Dowód. Ustalamy a i $h \in P-a$, $h \neq 0$. Dla uproszczenia przyjmijmy, że $h>0$ (przypadek $h<0$ jest analogiczny — Ćwiczenie). Niech $b = a+h$,

$$\begin{aligned}
&\varphi(t) := f(b) - \Big(f(t) + f'(t)(b-t) + \frac{1}{2}f''(t)(b-t)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(t)(b-t)^n\Big),\\
&\psi(t) := (b-t)^p, \quad a \leqslant t \leqslant b.
\end{aligned}$$

Wtedy $\varphi(a) = R_n(f,a,a+h)$, $\varphi(b)=0$, $\psi(a)=h^p$, $\psi(b)=0$,

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= -\Big(f'(t) - f'(t) + f''(t)(b-t) - f''(t)(b-t) + \frac{1}{2}f'''(t)(b-t)^2 + \dots\\
&\quad - \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1} + \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(b-t)^n\Big) = -\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(b-t)^n,\\
\psi'(t) &= -p(b-t)^{p-1}, \quad a \leqslant t < b.
\end{aligned}$$

Na podstawie twierdzenia Cauchy'ego o wartości średniej istnieje $\theta \in (0,1)$ taka, że

$$\frac{R_n(f,a,a+h)}{h^p} = \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\psi(b)-\psi(a)} = \frac{\varphi'(a+\theta h)}{\psi'(a+\theta h)} = \frac{\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(a+\theta h)(1-\theta)^n h^n}{p(1-\theta)^{p-1}h^{p-1}},$$

[8] Oscar Xavier Schlömilch (1823–1901).

a stąd

$$R_n(f,a,a+h) = \frac{1}{n!p} f^{(n+1)}(a+\theta h)(1-\theta)^{n+1-p} h^{n+1}. \qquad \square$$

Przykład 5.6.11 (Przykłady użycia wzoru Taylora z resztą Lagrange'a dla $a=0$)**.** (a) $f(x) = e^x$: Wobec wzoru Taylora mamy

$$e^h = \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}\Big) + R_n(\exp,0,h), \quad h \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0,$$

przy czym $R_n(\exp,0,h) = \frac{1}{(n+1)!} e^{\theta h} h^{n+1}$, gdzie $\theta = \theta(h,n) \in (0,1)$. Stąd, dla dowolnego $h \in \mathbb{R}$ dostajemy $|R_n(\exp,0,h)| \leqslant \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|h|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (Ćwiczenie). Oznacza to, że

$$e^x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{(por. Twierdzenie 2.3.1(h))} \ (^9)\ .$$

(b) $f(x) = \sin x$: Zauważmy, że $(\sin x)^{(2k+1)} = (-1)^k \cos x$, $(\sin x)^{(2k)} = (-1)^k \sin x$. Wobec wzoru Taylora mamy

$$\sin h = \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} h^{2k+1}\Big) + R_{2n-1}(\sin,0,h),$$

przy czym $R_{2n-1}(\sin,0,h) = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sin(\theta h) h^{2n}$, gdzie $\theta = \theta(h,n) \in (0,1)$. Stąd, dla dowolnego $h \in \mathbb{R}$ dostajemy $|R_{2n-1}(\sin,0,h)| \leqslant \frac{|h|^{2n}}{(2n)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Oznacza to, że

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(c) (Ćwiczenie) $f(x) = \cos x$:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(d) $f(x) := \ln(1+x)$, $x > -1$. Wtedy $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$, $x > -1$, $k \in \mathbb{N}$, a stąd:

$$\ln(1+h) = \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} h^k}{k}\Big) + R_n(f,0,h),$$

przy czym $R_n(f,0,h) = \frac{(-1)^n h^{n+1}}{(n+1)(1+\theta h)^{n+1}}$, gdzie $\theta = \theta(h,n) \in (0,1)$. Stąd, dla dowolnego $|h| < \frac{1}{2}$ dostajemy $|R_n(f,0,h)| \leqslant \frac{1}{n+1}\big(\frac{|h|}{1-|h|}\big)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Oznacza to, że

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}, \quad |x| < \tfrac{1}{2}.$$

Uwaga: Można pokazać, że $R_n(f,0,h) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ dla $|h| < 1$ (zob. Przykład 7.3.4(c)), a więc powyższe przedstawienie funkcji $x \longmapsto \ln(1+x)$ zachodzi dla $|x| < 1$.

(e) $f(x) := (1+x)^\alpha$, $x > -1$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$: Mamy $f^{(k)}(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} = k!\binom{\alpha}{k}(1+x)^{\alpha-k}$, a stąd

$$(1+h)^\alpha = \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} h^k\Big) + R_n(f,0,h),$$

przy czym $R_n(f,0,h) = \binom{\alpha}{n+1}(1+\theta h)^{\alpha-n-1} h^{n+1}$, gdzie $\theta = \theta(h,n) \in (0,1)$. Stąd, dla dowolnego $|h| < \frac{1}{2}$ dostajemy $|R_n(f,0,h)| \leqslant \big|\binom{\alpha}{n+1}(1+\theta h)^\alpha\big| \big(\frac{|h|}{1-|h|}\big)^{n+1}$. Aby pokazać, że $R_n(f,0,h) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ wystarczy

(9) Pojęcie szeregu $\sum_{k=0}^{\infty}$ zostanie formalnie wprowadzone w Definicji 6.1.1.

udowodnić, że $\binom{\alpha}{n+1}\big(\frac{|h|}{1-|h|}\big)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Wiemy, że $\sqrt[n]{\big|\binom{\alpha}{n}\big|} \longrightarrow 1$ (Przykład 2.4.3(c)). Ustalmy $|h| < \frac{1}{2}$ i niech $\varepsilon > 0$ będzie takie, ze $(1+\varepsilon)\frac{|h|}{1-|h|} < 1$. Wtedy dla $n \geqslant N(\varepsilon)$ mamy $\big|\binom{\alpha}{n+1}\big(\frac{|h|}{1-|h|}\big)^{n+1}\big| \leqslant \big((1+\varepsilon)\frac{|h|}{1-|h|}\big)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Oznacza to, że

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad |x| < \tfrac{1}{2}.$$

Uwaga: Można pokazać, że $R_n(f,0,h) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ dla $|h| < 1$, a więc powyższe przedstawienie funkcji $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ zachodzi dla $|x| < 1$.

Jeżeli $\alpha \in \mathbb{N}_0$, to oczywiście $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^k$, $x \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 5.6.12 (Wzór na pochodną złożenia)**.** [10] *Niech $f \in \mathcal{D}^n(P,E;a)$, $\varphi \in \mathcal{D}^n(Q;t_0)$, $\varphi(Q) \subset P$, $\varphi(t_0) = a$. Wtedy*

$$(f\circ\varphi)^{(n)}(t_0) = \sum_{\alpha\in\Pi_n} \frac{n!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!} f^{(\alpha_1+\dots+\alpha_n)}(a)\Big(\frac{\varphi'(t_0)}{1!}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(\frac{\varphi^{(n)}(t_0)}{n!}\Big)^{\alpha_n},$$

gdzie $\Pi_n := \{\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n : \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = n\}$.

Dowód. Wiemy, że $f\circ\varphi \in \mathcal{D}^n(Q,E;t_0)$ (Twierdzenie 5.5.5). Wobec Twierdzenia 5.6.5, wystarczy więc pokazać, że $(f\circ\varphi)(t_0+t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + o(t^n)$ przy $t \longrightarrow 0$, gdzie

$$a_s := \sum_{\alpha\in\Pi_s} \frac{1}{\alpha_1!\cdots\alpha_s!} f^{(\alpha_1+\dots+\alpha_s)}(a)\Big(\frac{\varphi'(t_0)}{1!}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(\frac{\varphi^{(s)}(t_0)}{s!}\Big)^{\alpha_s}, \quad s = 0,\dots,n.$$

Przyjmijmy oznaczenia:

$$\varphi_j := \frac{1}{j!}\varphi^{(j)}(t_0), \quad f_j := \frac{1}{j!} f^{(j)}(a), \quad j = 0,\dots,n.$$

Wtedy

$$a_s = \sum_{\alpha\in\Pi_s} \frac{(\alpha_1+\dots+\alpha_s)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_s!} f_{\alpha_1+\dots+\alpha_s}\varphi_1^{\alpha_1}\cdots\varphi_s^{\alpha_s}, \quad s = 0,\dots,n.$$

Zauważmy, że jeżeli $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{N}_0$ oraz $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = s$, to $\alpha_{s+1} = \dots = \alpha_n = 0$. Stąd

$$a_s = \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{N}_0\\ \alpha_1+2\alpha_2+\dots+n\alpha_n=s}} \frac{(\alpha_1+\dots+\alpha_n)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!} f_{\alpha_1+\dots+\alpha_n}\varphi_1^{\alpha_1}\cdots\varphi_n^{\alpha_n}, \quad s = 0,\dots,n.$$

Wiemy, że

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^n f_i h^i + \alpha(h)h^n, \quad \varphi(t_0+t) = \sum_{j=0}^n \varphi_j t^j + \beta(t)t^n,$$

gdzie $\lim\limits_{h\to 0}\alpha(h) = 0$, $\lim\limits_{t\to 0}\beta(t) = 0$. Przechodzimy do obliczeń:

$$\begin{aligned}
(f\circ\varphi)(t_0+t) &= \sum_{i=0}^n f_i\Big(\sum_{j=1}^n \varphi_j t^j + \beta(t)t^n\Big)^i + \alpha\big(\varphi(t_0+t)-\varphi(t_0)\big)\Big(\sum_{j=1}^n \varphi_j t^j + \beta(t)t^n\Big)^n \\
&= \sum_{i=0}^n f_i\Big(\sum_{j=1}^n \varphi_j t^j\Big)^i + o(t^n) = \sum_{i=0}^n f_i \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{N}_0\\ \alpha_1+\dots+\alpha_n=i}} \frac{i!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\,\varphi_1^{\alpha_1}\cdots\varphi_n^{\alpha_n} t^{\alpha_1+2\alpha_2+\dots+n\alpha_n} + o(t^n) \\
&= \sum_{s=0}^n \Big(\sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{N}_0\\ \alpha_1+2\alpha_2+\dots+n\alpha_n=s}} \frac{(\alpha_1+\dots+\alpha_n)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!} f_{\alpha_1+\dots+\alpha_n}\varphi_1^{\alpha_1}\cdots\varphi_n^{\alpha_n}\Big)t^s + o(t^n).
\end{aligned}$$

□

Twierdzenie 5.6.13 (Warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego)**.** *Załóżmy, że $a \in \operatorname{int} P$, $f \in \mathcal{D}^n(P;a)$ oraz $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$. Wtedy:*

[10] Francesco Faà di Bruno (1825–1888).

(i) *Jeżeli n jest nieparzyste, to f nie posiada w punkcie a ekstremum lokalnego.*

(ii) *Jeżeli n jest parzyste, to f ma w punkcie a silne ekstremum lokalne. Dokładniej, jeżeli $f^{(n)}(a) < 0$, to f ma w punkcie a silne maksimum lokalne, zaś jeżeli $f^{(n)}(a) > 0$, to f ma w punkcie a silne minimum lokalne.*

Dowód. Korzystając ze wzoru Taylora z resztą Peano otrzymujemy (dla małych $\delta > 0$):

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \alpha(h)h^n = f(a) + \beta(h)h^n, \quad |h| < \delta,$$

gdzie $\lim\limits_{h\to 0} \alpha(h) = 0$, zaś $\beta(h)$ jest tego samego znaku, co $f^{(n)}(a)$. $\square$

Przykład 5.6.14. Niech $f(x) := \frac{x^2}{2} + \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. Zauważmy, że zachodzą równości $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ oraz $f^{(4)}(0) = 1 > 0$, a zatem funkcja f ma w punkcie $x = 0$ silne minimum lokalne.

5.7. Różniczkowanie ciągu wyraz po wyrazie

Twierdzenie 5.7.1 (Twierdzenie o różniczkowaniu ciągu wyraz po wyrazie)**.** *Niech E będzie przestrzenią Banacha, niech $P \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczonym przedziałem nieredukującym się do punktu, $k \in \mathbb{N}$ i niech $f_n \in \mathcal{D}^k(P, E)$, $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że:*

- *$f_n^{(k)} \longrightarrow g_k$ jednostajnie na P,*
- *istnieją punkty $c_0, \dots, c_{k-1} \in P$ takie, że ciąg $(f_n^{(j)}(c_j))_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny.*

Wtedy:

- *$f_n^{(j)} \longrightarrow g_j$ jednostajnie na P, $j = 0, \dots, k-1$,*
- *$g_0 \in \mathcal{D}^k(P)$,*
- *$g_0^{(j)} \equiv g_j$, czyli $(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n)^{(j)} = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n^{(j)}$, $j = 1, \dots, k$.*

Przykład 5.7.2. (a) Założenie, że P jest ograniczony jest istotne: Niech $f_n(x) := (x + \frac{1}{n})^2$, $x \in \mathbb{R}$. Wtedy $f_n' \longrightarrow 2x$ jednostajnie na $\mathbb{R}$, ale $f_n \longrightarrow x^2$ tylko lokalnie jednostajnie na $\mathbb{R}$ ($\sup\{|(x+\frac{1}{n})^2 - x^2| : x \in \mathbb{R}\} = +\infty$).

(b) Niech $f_n(x) := \frac{1}{n}\sin(nx)$, $x \in \mathbb{R}$. Wtedy $f_n \longrightarrow 0$ jednostajnie na $\mathbb{R}$, ale ciąg funkcyjny $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ nie jest nawet zbieżny punktowo.

Dowód Twierdzenia 5.7.1. Zastosujemy indukcję względem k.

$k = 1$: Dla $m, n \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy $F_{n,m} := f_m - f_n$. Odnotujmy, że $F_{n,m} \in \mathcal{D}(P, E)$ oraz $F_{n,m}' = f_m' - f_n'$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Ciąg $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego. Zatem istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnych $m, n \geqslant n_0$ i $x \in P$ mamy $\|F_{n,m}'(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\operatorname{diam} P}$ oraz $\|F_{n,m}(c_0)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. W takim razie, na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, dla dowolnych $m, n \geqslant n_0$ i $x \in P$, mamy

$$\|F_{n,m}(x)\| \leqslant \|F_{n,m}(x) - F_{n,m}(c_0)\| + \|F_{n,m}(c_0)\| \leqslant \sup\{\|F_{n,m}'(\xi)\| : \xi \in [x, c_0]\} \operatorname{diam} P + \tfrac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

Oznacza to, że ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego w P, zatem jest zbieżny jednostajnie na P.

Ustalmy teraz $x_0 \in P$. Mamy

$$\frac{g_0(x_0+h) - g_0(x_0)}{h} - \lim_{n\to+\infty} f_n'(x_0) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{f_n(x_0+h) - f_n(x_0)}{h} - f_n'(x_0)\Big) =: \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(h), \quad h \in P - x_0,\ h \neq 0.$$

Połóżmy dodatkowo $\varphi_n(0) := 0$. Wtedy $\varphi_n \in \mathcal{C}(P - x_0, E; 0)$. Jeżeli udowodnimy, że ciąg $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny jednostajnie w $P - x_0$, to na podstawie Twierdzenia 4.4.1 jego granica będzie ciągła w $h = 0$, co zakończy dowód.

Sprawdzimy jednostajny warunek Cauchy'ego. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $n_0 \in \mathbb{N}$ będzie takie, że dla dowolnego $m, n \geqslant n_0$ i $x \in P$ mamy $\|F_{n,m}'(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Teraz dla dowolnych $n, m \geqslant n_0$, na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, dostajemy

$$\|\varphi_m(h) - \varphi_n(h)| = \Big\|\frac{F_{n,m}(x_0+h) - F_{n,m}(x_0)}{h} - F_{n,m}'(x_0)\Big\| \leqslant \sup\{\|F_{n,m}'(\xi) - F_{n,m}'(x_0)\| : \xi \in [x_0, x_0+h]\} \leqslant \varepsilon, \quad h \in P - x_0.$$

$k-1 \rightsquigarrow k$: Stosujemy przypadek $k=1$ do funkcji $h_n := f_n^{(k-1)}$. Wiemy, że ciąg $(h_n')_{n=1}^\infty$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji g_k oraz, ciąg $(h_n(c_{k-1}))_{n=1}^\infty$ jest zbieżny. Z przypadku $k=1$ wynika, że ciąg $(h_n)_{n=1}^\infty$ jest jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji $h_0 \in \mathcal{D}(P)$ oraz $h_0' = g_k$. Teraz możemy skorzystać z założenia indukcyjnego (Ćwiczenie). $\square$

Definicja 5.7.3. Niech $\mathcal{D}_b^k(P,E) := \{f \in \mathcal{D}^k(P,E) : f^{(j)} \in \mathcal{B}(P,E), j = 1,\dots,k\}$, $\mathcal{C}_b^k(P,E) := \mathcal{C}^k(P,E) \cap \mathcal{D}_b^k(P,E)$. W przestrzeni wektorowej $\mathcal{D}_b^k(P,E)$ wprowadzamy normę (Ćwiczenie) $\|f\|_{P,k} := \sum_{j=0}^k \|f^{(j)}\|_P = \sum_{j=0}^k \sup\{\|f^{(j)}(x)\| : x \in P\}$ (zob. Obserwacja 4.6.10(a)).

Obserwacja 5.7.4. (a) Norma $\mathcal{D}_b^k(P,E) \ni f \longmapsto \max\{\|f^{(j)}\|_P : j = 0,\dots,k\}$ jest równoważna normie $\|\ \|_{P,k}$.

(b) Jeżeli P jest przedziałem zwartym, to $\mathcal{C}_b^k(P,E) = \mathcal{C}^k(P,E)$.

(c) $\mathcal{C}_b^k(P,E)$ jest podprzestrzenią domkniętą w $\mathcal{D}_b^k(P,E)$.

(d) Jeżeli E jest przestrzenią Banacha, to $(\mathcal{D}_b^k(P,E), \|\ \|_{P,k})$ jest przestrzenią Banacha i w konsekwencji $(\mathcal{C}_b^k(P,E), \|\ \|_{P,k})$ jest również przestrzenią Banacha.

Istotnie, niech $(f_n)_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $(\mathcal{D}_b^k(P,E), \|\ \|_{P,k})$. Wtedy $(f_n^{(j)})_{n=1}^\infty)$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{B}(P,E)$ dla dowolnego $j \in \{0,\dots,k\}$. Na podstawie Obserwacji 4.6.10(b) istnieje funkcja $g_j \in \mathcal{B}(P,E)$ taka, że $f_n^{(j)} \longrightarrow g_j$ jednostajnie na P, $j = 0,\dots,k$. Korzystając z Twierdzenia 5.7.1 wnioskujemy, że $f := g_0 \in \mathcal{D}^k(P,E)$ oraz $g_j = f^{(j)}$, $j = 1,\dots,k$. Stąd $f_n \longrightarrow f$ w $(\mathcal{D}_b^k(P,E), \|\ \|_{P,k})$.

5.7.1. Funkcje różniczkowalne spełniające warunek Höldera.

Definicja 5.7.5. Dla $k \in \mathbb{N}_0$ i $0 < \alpha \leqslant 1$, niech $\mathcal{H}^{k,\alpha}(P,E) := \{f \in \mathcal{D}_b^k(P,E) : f^{(k)} \in \mathcal{H}^\alpha(P,E)\} \subset \mathcal{C}_b^k(P,E)$ (zob. § 4.6.1). W przestrzeni wektorowej $\mathcal{H}^{k,\alpha}(P,E)$ wprowadzamy normę $\|f\|_{P,k,\alpha} := \|f\|_{P,k} + |f^{(k)}|_\alpha$ (Ćwiczenie).

Obserwacja 5.7.6 (Ćwiczenie). (a) Jeżeli P jest ograniczony, to dla $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$ mamy $\mathcal{H}^{k,\alpha}(P,E) \subset \mathcal{H}^{k,\beta}(P,E)$ oraz $\|\ \|_{P,k,\beta} \leqslant C\|\ \|_{P,k,\alpha}$, gdzie $C := \max\{1, (\operatorname{diam} P)^{\alpha-\beta}\}$.

(b) Dla $f \in \mathcal{B}(P,E)$ mamy: $f \in \mathcal{H}^{k+1,\alpha}(P,E) \iff f' \in \mathcal{H}^{k,\alpha}(P,E)$. Ponadto, $\|f\|_{P,k+1,\alpha} = \|f\|_P + \|f'\|_{P,k,\alpha}$.

(c) $\mathcal{D}_b^{k+1}(P,E) \subset \mathcal{H}^{k,1}(P,E)$ oraz $\|f\|_{P,k,1} \leqslant \|f\|_{P,k+1}$ (wystarczy skorzystać z twierdzenia o przyrostach skończonych).

(d) Jeżeli E jest przestrzenią Banacha, to $(\mathcal{H}^{k,\alpha}(P,E), \|\ \|_{P,k,\alpha})$ jest przestrzenią Banacha.

(e) Jeżeli $\sup\{\frac{\|f(t)-f(u)\|}{|t-u|^\alpha} : t,u \in P,\ t \neq u\} < +\infty$ dla $\alpha > 1$, to $f = \text{const}$.

Twierdzenie 5.7.7. *Jeżeli że P jest ograniczony, $f \in \mathcal{H}^{k,\alpha}(P,\mathbb{K})$ i $g \in \mathcal{H}^{k,\alpha}(P,E)$, to $f \cdot g \in \mathcal{H}^{k,\alpha}(P,E)$.*

Dowód. Dowód indukcyjny względem k (przy dowolnych pozostałych elementach). Przypadek $k=0$ wynika z Twierdzenia 4.6.12(a).

$k \rightsquigarrow k+1$: Wobec Obserwacji 5.7.6(b) wystarczy wykazać, że $(fg)' \in \mathcal{H}^{k,\alpha}(P,E)$. Wynika to natychmiast z równości $(f,g)' = f'g + fg'$ oraz z założenia indukcyjnego (wszystkie funkcje po prawej stronie są klasy $\mathcal{H}^{k,\alpha}$). $\square$

Ćwiczenie 5.7.8. Niech $P, Q \subset \mathbb{R}$ będą przedziałami ograniczonymi. Jeżeli $\varphi \in \mathcal{H}^{k,\beta}(Q,\mathbb{R})$, $\varphi(Q) \subset P$ i $f \in \mathcal{H}^{k,\alpha}(P,E)$, to $f \circ \varphi \in \mathcal{H}^{k,\boxed{?}}(Q,E)$ (por. Twierdzenie 4.6.12(b)).

Twierdzenie 5.7.9 (Wzór Taylora dla funkcji klasy $\mathcal{H}^{k,\alpha}$). *Jeżeli $f \in \mathcal{H}^{k,\alpha}(P,E)$, to*

$$\frac{\|R_k(f,a,a+h)\|}{|h|^{k+\alpha}} \leqslant |f^{(k)}|_\alpha, \quad [a,a+h] \subset P.$$

W szczególności, jeżeli $P = [a,b]$, to

$$\lim_{\delta \to 0+} \Big(\sup\Big\{ \frac{\|R_k(f,x,y)\|}{|x-y|^{k+\beta}} : x,y \in P,\ 0 < |x-y| \leqslant \delta \Big\}\Big) = 0, \quad 0 \leqslant \beta < \alpha.$$

Dowód. Indukcja względem k (przy dowolnych pozostałych elementach). Dla $k=0$ wystarczy skorzystać z definicji $|f|_\alpha$. Dla dowodu $k \rightsquigarrow k+1$ mamy:

$$\frac{\|R_{k+1}(f,a,a+h)\|}{|h|^{k+1+\alpha}} \leqslant \frac{\sup\{\|R'_{k+1}(f,a,a+\xi)\| : \xi \in (0,h]\}|h|}{|h|^{k+1+\alpha}}$$
$$= \frac{\sup\{\|R_k(f',a,a+\xi)\| : \xi \in (0,h]\}}{|h|^{k+\alpha}} \leqslant \frac{\sup\{|(f')^{(k)}|_\alpha|\xi|^{k+\alpha} : \xi \in (0,h]\}}{|h|^{k+\alpha}} \leqslant |f^{(k+1)}|_\alpha. \quad \square$$

5.8. Funkcje półciągłe

Niech X będzie dowolną przestrzenią topologiczną.

Definicja 5.8.1. Powiemy, że funkcja $u : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest *półciągła z góry* na X, jeżeli dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x \in X : u(x) < t\}$ jest otwarty. Zbiór wszystkich funkcji półciągłych z góry na X będziemy oznaczać przez $\mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}})$.

Powiemy, że u jest *półciągła z dołu* na X ($u \in \mathcal{C}^{\downarrow}(X, \overline{\mathbb{R}})$), jeżeli $-u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}})$.

Dla dowolnego przedziału $\Delta \subset \overline{\mathbb{R}}$ niech $\mathcal{C}^{\uparrow}(X, \Delta) := \{u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}}) : u(X) \subset \Delta\}$. Podobnie definiujemy $\mathcal{C}^{\downarrow}(X, \Delta)$.

Obserwacja 5.8.2. Jeżeli $A \subset X$ jest zbiorem domkniętym, to jego funkcja charakterystyczna $\chi_{A,X}$ jest półciągła z góry. Jeżeli $A \subset X$ jest zbiorem otwartym, to $\chi_A \in \mathcal{C}^{\downarrow}(X)$.

Obserwacja 5.8.3. (a) Funkcja $u : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest półciągła z dołu na X, jeżeli dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x \in X : u(x) > t\}$ jest otwarty.

(b) Dla dowolnych przedziałów $\Delta, \Delta' \subset \overline{\mathbb{R}}$, dla dowolnej ściśle rosnącej bijekcji $\varphi : \Delta \longrightarrow \Delta'$ i dla dowolnej funkcji $u : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mamy:

$$u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \Delta) \Longleftrightarrow \varphi \circ u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \Delta').$$

W szczególności, $u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}}) \Longleftrightarrow \operatorname{arctg} u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X, [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$.

Istotnie, zapiszmy $\overline{\mathbb{R}}$ w postaci sumy trzech rozłącznych przedziałów

$$\overline{\mathbb{R}} = L \cup \Delta' \cup R,$$

gdzie L jest przedziałem „na lewo" od Δ', zaś R — przedziałem „na prawo" od Δ'; nie wykluczamy przypadków gdy L lub R jest pusty. Dla $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\{x \in X : (\varphi \circ u)(x) < t\} = \begin{cases} \{x \in X : u(x) < \varphi^{-1}(t)\}, & \text{jeżeli } t \in \Delta' \\ \varnothing, & \text{jeżeli } t \in L \\ X, & \text{jeżeli } t \in R \end{cases}.$$

(c) $\mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{R}}) = \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}}) \cap \mathcal{C}^{\downarrow}(X, \overline{\mathbb{R}})$.

Inkluzja $\subset$ jest oczywista. Dla dowodu inkluzji $\supset$ ustalmy $u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}}) \cap \mathcal{C}^{\downarrow}(X, \overline{\mathbb{R}})$ oraz $a \in X$. Jeżeli $u(a) \in \mathbb{R}$, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$, zbiór $\{x \in X : u(x) < u(a) + \varepsilon\} \cap \{x \in X : u(x) > u(a) - \varepsilon\}$ jest otwartym otoczeniem punktu a, co dowodzi ciągłości u w punkcie a.

Jeżeli $u(a) = +\infty$, to dla dowolnego $M > 0$ zbiór $\{x \in X : u(x) > M\}$ jest otwartym otoczeniem punktu a, co daje ciągłość w a. Przypadek $u(a) = -\infty$ jest analogiczny (Ćwiczenie).

(d) Jeżeli $f : Y \longrightarrow X$ jest odwzorowaniem ciągłym, to $u \circ f \in \mathcal{C}^{\uparrow}(Y, \overline{\mathbb{R}})$ dla dowolnej funkcji $u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}})$.

Istotnie, $\{y \in Y : (u \circ f)(y) < t\} = f^{-1}(\{x \in X : u(x) < t\})$.

(e) $\mathbb{R}_{>0} \cdot \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}}) = \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}})$.

(f) Dla dowolnych $u, v \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}})$, jeżeli $u(x) + v(x)$ ma sens dla każdego $x \in X$, to $u + v \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}})$.
Istotnie, $\{u + v < t\} = \bigcup\limits_{\theta \in \mathbb{R}} \{u < \theta\} \cap \{v < t - \theta\}$.

(g) Jeżeli $u, v \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}})$, to $\max\{u, v\} \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}})$.
Istotnie, $\{\max\{u, v\} < t\} = \{u < t\} \cap \{v < t\}$.

(h) Jeżeli $(u_\alpha)_{\alpha \in A} \subset \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}})$, to $u := \inf\{u_\alpha : \alpha \in A\} \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}})$.
W szczególności, jeżeli $\mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}}) \ni u_n \searrow u$ punktowo na X, to $u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X, \overline{\mathbb{R}})$.
Istotnie, $\{u < t\} = \bigcup\limits_{\alpha \in A} \{u_\alpha < t\}$.

(i) Jeżeli $\mathcal{C}^{\uparrow}(X,\mathbb{R}) \ni u_n \longrightarrow u$ jednostajnie na X, to $u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X,\mathbb{R})$.

Istotnie, niech $u(a) < t - 2\varepsilon < t$ i niech $N \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $|u_N - u| < \varepsilon$ na X. W szczególności, $u_N(a) < t - \varepsilon$. Ponieważ funkcja u_N jest półciągła z góry, zatem istnieje otoczenie U punktu a takie, że $u_N < t - \varepsilon$ na U. W konsekwencji, $u < t$ na U.

Twierdzenie 5.8.4 (Twierdzenie Weierstrassa)**.** *Niech X będzie przestrzenią topologiczną zwartą i niech $f \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X,\overline{\mathbb{R}})$. Wtedy istnieje punkt $x_0 \in X$ taki, że $f(x_0) = \sup f(X)$.*

Dowód. Niech $M := \sup f(X)$. Jeżeli $M = -\infty$, to $f \equiv -\infty$ i wynik jest oczywisty. Załóżmy więc, że $M > -\infty$. Przypuśćmy, że $f(x) < M$ dla dowolnego $x \in X$. Ustalmy ciąg $M_s \nearrow M$, $-\infty < M_s < M$, $s \in \mathbb{N}$. Z półciągłości funkcji f wynika, że każdy ze zbiorów $U_s := \{x \in X : f(x) < M_s\}$ jest otwarty. Wobec definicji M mamy $U_s \subsetneq X$, $s \in \mathbb{N}$. Z naszego przypuszczenia wynika, że $U_s \nearrow X$. Teraz, korzystając ze zwartości X wnioskujemy, że musi być $X = U_{s_0}$ dla pewnego s_0 — sprzeczność. □

Twierdzenie 5.8.5. *Niech (X,ϱ) będzie przestrzenią metryczną i niech $u : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Wtedy*

$$u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X,\overline{\mathbb{R}}) \iff \forall_{a\in X} : \limsup_{x\to a} u(x) = u(a). \quad (^{11})$$

Dowód. ($\Longrightarrow$): Weźmy $a \in X$. Jeżeli $u(a) = +\infty$, to prawa strona jest oczywista. Niech więc $u(a) < +\infty$. Weźmy $t > u(a)$ i niech U będzie takim otoczeniem punktu a, że $u < t$ w U. Niech teraz $x_n \longrightarrow a$. Wtedy $u(x_n) < t$ dla $n \gg 1$. Stąd $\limsup\limits_{n\to+\infty} u(x_n) \leqslant t$, co wobec dowolności t, daje żądaną nierówność.

($\Longleftarrow$): Niech $u(a) < t$ i przypuśćmy, że w dowolnym otoczeniu U punktu a istnieje punkt x taki, że $u(x) \geqslant t$. Wtedy, bez trudu, konstruujemy ciąg $x_n \longrightarrow a$ taki, że $u(x_n) \geqslant t$, $n \in \mathbb{N}$. W takim razie, $\limsup\limits_{n\to+\infty} u(x_n) \geqslant t > u(a)$; sprzeczność. □

Twierdzenie 5.8.6 (Twierdzenie Baire'a)**.** $(^{12})$ *Niech (X,ϱ) będzie przestrzenią metryczną. Wtedy dla dowolnej funkcji $u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X,\overline{\mathbb{R}})$ istnieje ciąg $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}(X,\overline{\mathbb{R}})$ taki, że $u_n \searrow u$ punktowo na X (por. Obserwacja 5.8.3*(h)*).*

Ponadto, jeżeli $u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X,[-\infty,+\infty))$, to ciąg $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ można wybrać w $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

Dowód. Zastępując u poprzez $\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} u$ (por. Obserwacja 5.8.3(b)), sprowadzamy problem do przypadku, gdy $u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X,[-1,1])$ (odpowiednio, $u \in \mathcal{C}^{\uparrow}(X,[-1,1))$), a funkcji aproksymujących poszukujemy w $\mathcal{C}(X,[-1,1])$ (odpowiednio, $\mathcal{C}(X,(-1,1))$).

Zdefiniujmy

$$\varphi_{a,n}(x) := u(a) - n\varrho(x,a), \quad a \in X,\ x \in X,$$
$$u_n := \sup\{\varphi_{a,n} : a \in X\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Na wstępie sprawdzimy, że $u_n \in \mathcal{C}(X)$, $n \in \mathbb{N}$. Mamy

$$|\varphi_{a,n}(x') - \varphi_{a,n}(x'')| = n|\varrho(x',a) - \varrho(x'',a)| \leqslant n\varrho(x',x''), \quad x',x'' \in X,$$

a stąd $|u_n(x') - u_n(x'')| \leqslant n\varrho(x',x'')$, $x',x'' \in X$. W szczególności, u_n jest ciągła.

Jest rzeczą widoczną, że $\varphi_{a,n+1} \leqslant \varphi_{a,n}$, skąd wynika, że $u_{n+1} \leqslant u_n$. Ponadto, $\varphi_{x,n}(x) = u(x)$, a zatem $-1 \leqslant u(x) = \varphi_{x,n}(x) \leqslant u_n(x) \leqslant 1$, $x \in X$. W szczególności, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant u$.

Ustalmy $x_0 \in X$ oraz $t > u(x_0)$ (jeżeli $u(x_0) < 1$, to dobieramy t tak, by $u(x_0) < t < 1$). Niech $\delta > 0$ będzie takie, że $u(x) < t$ dla $x \in B(x_0,\delta)$. Wtedy

$$\varphi_{a,n}(x_0) = u(a) - n\varrho(x_0,a) \leqslant \max\{t, 1 - n\delta\}, \quad a \in X,\ n \in \mathbb{N}.$$

Wynika stąd, że $u_n(x_0) \leqslant \max\{t, 1-n\delta\}$, $n \in \mathbb{N}$ (jeżeli $u(x_0) < 1$, to $u_n(x_0) < 1$, $n \in \mathbb{N}$). Przechodząc do granicy dostajemy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_0) \leqslant t$, co dowodzi, że $u_n(x_0) \longrightarrow u(x_0)$.

$(^{11})$ Uwaga: W tym wzorze, przy braniu $\limsup\limits_{x\to a} u(x)$ dopuszczamy w definicji zbioru $\mathcal{S}(u,a)$ ciągi stałe $x_n = a$, $n \in \mathbb{N}$. Innymi słowy, zawsze mamy $u(a) \in \mathcal{S}(u,a)$, a wiec zawsze jest $\limsup\limits_{x\to a} u(x) \geqslant u(a)$ oraz $\liminf\limits_{x\to a} u(x) \leqslant u(a)$. Jeżeli nie chcemy zmieniać definicji $\limsup\limits_{x\to a} u(x)$, to wtedy prawą stronę należy rozumieć jako $\forall_{a\in X'} : \limsup\limits_{x\to a} u(x) \leqslant u(a)$.

$(^{12})$ René-Louis Baire (1874–1932).

W przypadku gdy $u(X) \subset [-1,1)$, wystarczy jeszcze tylko zastąpić u_n przez $\max\{u_n, -1+\frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Obserwacja 5.8.7. Można pokazać ([13]), że Twierdzenie 5.8.6 pozostaje prawdziwe dla przestrzeni topologicznej X wtedy i tylko wtedy, gdy X jest przestrzenią *doskonale normalną*, tzn. dla dowolnych rozłącznych zbiorów domkniętych $A, B \subset X$ istnieje funkcja ciągła $f : X \longrightarrow [0,1]$ taka, że $A = f^{-1}(0)$, $B = f^{-1}(1)$.

Zauważmy, że jeżeli (X, ϱ) jest przestrzenią metryczną, to warunek ten spełnia funkcja $f(x) := \frac{\varrho(x,B)}{\varrho(x,A)+\varrho(x,B)}$, $x \in X$, czyli *każda przestrzeń metryczna jest doskonale normalna*.

5.9. Funkcje wypukłe

Niech $P \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym nietrywialnym przedziałem nieredukującym się do punktu.

Definicja 5.9.1. Funkcję $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *wypukłą* (odp. *silnie wypukłą*), jeżeli

$$f(ta + (1-t)b) \leqslant tf(a) + (1-t)f(b), \quad a, b \in P,\ a < b,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$$
$$(\text{odp. } f(ta + (1-t)b) < tf(a) + (1-t)f(b), \quad a, b \in P,\ a < b,\ t \in (0,1)).$$

Funkcję f nazywamy *wklęsłą* (odp. *silnie wklęsłą*), jeżeli $-f$ jest wypukła (odp. silnie wypukła).

Obserwacja 5.9.2. Warunek wypukłości z Definicji 5.9.1 można zapisać w równoważnej postaci:

$$f(x) \leqslant f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a), \quad a, b \in P,\ a < b,\ a \leqslant x \leqslant b. \tag{†}$$

Warunek (†) będziemy nazywać *warunkiem wypukłości funkcji f dla przedziału $[a,b]$ w punkcie x*.

Istotnie, mamy $x = ta + (1-t)b$ dla pewnego $t \in [0,1]$, a więc (†) to $f(ta + (1-t)b) \leqslant f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(ta + (1-t)b - a) = f(a) + (f(b) - f(a))(1-t) = tf(a) + (1-t)f(b)$.

Ćwiczenie 5.9.3. Udowodnić, że jeżeli $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ jest wypukła, to

$$f(t_1a_1 + \dots + t_ka_k) \leqslant t_1f(a_1) + \dots + t_kf(a_k),\ k \in \mathbb{N}_2,\ t_1, \dots, t_k \geqslant 0,\ t_1 + \dots + t_k = 1,\ a_1, \dots, a_k \in P.$$

Twierdzenie 5.9.4. *Dla $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ następujące warunki są równoważne:*
(i) *f jest wypukła (odp. silnie wypukła);*
(ii) *dla dowolnych $a, b, c \in P$ takich, że $a < c < b$ mamy*

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(b)-f(c)}{b-c} \quad \Big(\text{odp. } \frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(b)-f(c)}{b-c}\Big).$$

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (ii): $c = \frac{b-c}{b-a}a + \frac{c-a}{b-a}b = ta + (1-t)b$, gdzie $t = \frac{b-c}{b-a} \in (0,1)$. Zatem z definicji wypukłości (odp. silnej wypukłości) f otrzymujemy

$$f(c) \leqslant \frac{b-c}{b-a}f(a) + \frac{c-a}{b-a}f(b) \quad \Big(\text{odp. } f(c) < \frac{b-c}{b-a}f(a) + \frac{c-a}{b-a}f(b)\Big),$$

co daje (ii) (Ćwiczenie).

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Niech $a, b \in P$, $a < b$, $t \in (0,1)$, $c := ta + (1-t)b \in (a,b)$. Wobec (ii) mamy

$$\frac{f(ta+(1-t)b)-f(a)}{(1-t)(b-a)} \leqslant \frac{f(b)-f(ta+(1-t)b)}{t(b-a)} \quad \Big(\text{odp. } \frac{f(ta+(1-t)b)-f(a)}{(1-t)(b-a)} < \frac{f(b)-f(ta+(1-t)b)}{t(b-a)}\Big),$$

co daje warunek z Definicji 5.9.1 (Ćwiczenie). $\square$

Twierdzenie 5.9.5. *Każda funkcja wypukła $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $P \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem otwartym, spełnia lokalnie warunek Lipschitza. W szczególności, jest ciągła.*

Obserwacja 5.9.6. Funkcja $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x \in [0,1) \\ 1, & \text{jeżeli } x = 1 \end{cases}$ jest wypukła (Ćwiczenie). W szczególności Twierdzenie 5.9.5 nie jest prawdziwe, gdy P nie jest otwarty.

([13]) Zob. M. Katětov, *On real-valued functions in topological spaces*, Fund. Math. 38, (1951), 85–91; H. Tong, *Some characterizations of normal and perfectly normal spaces*, Duke Math. J. 19, (1952), 289–292.

Dowód Twierdzenia 5.9.5. Niech $p_0 < p < x' < x'' < q < q_0$, $[p_0, q_0] \subset P$. Wtedy na podstawie Twierdzenia 5.9.4 mamy

$$A := \frac{f(p) - f(p_0)}{p - p_0} \leqslant \frac{f(x') - f(p)}{x' - p} \leqslant \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} \leqslant \frac{f(q) - f(x'')}{q - x''} \leqslant \frac{f(q_0) - f(q)}{q_0 - q} =: B,$$

co daje $|f(x'') - f(x')| \leqslant L(x'' - x')$, gdzie $M := \max\{|A|, |B|\}$. Pokazaliśmy, że funkcja f spełnia lokalnie w P warunek Lipschitza. Jest więc w szczególności ciągła. $\square$

Twierdzenie 5.9.7. *Dla funkcji różniczkowalnej $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ następujące warunki są równoważne:*

(i) *f jest wypukła (odp. silnie wypukła);*
(ii) *f' jest rosnąca (odp. silnie rosnąca).*

Dowód. (ii) $\Longrightarrow$ (i): Na mocy Twierdzenia 5.9.4 wystarczy pokazać, że dla $a, b, c \in P$, $a < c < b$, mamy $\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$ (odp. $\frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$). Korzystamy z twierdzenia Lagrange'a $\frac{f(c)-f(a)}{c-a} = f'(\xi_1)$, $\frac{f(b)-f(c)}{b-c} = f'(\xi_2)$ dla $a < \xi_1 < c < \xi_2 < b$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Ustalmy $a, b \in P$, $a < b$. Wiemy, że (Twierdzenie 5.9.4)

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leqslant \frac{f(b) - f(c)}{b - c}, \quad a < c < b.$$

Biorąc raz $c \longrightarrow a+$, a drugi raz $c \longrightarrow b-$, dostajemy $f'(a) \leqslant f'(b)$.

W przypadku silniej wypukłości, jeżeli już wiemy, że f' jest rosnąca, równość $f'(a) = f'(b)$ oznaczałaby, że f' jest stała na $[a, b]$. Wynika stąd, że $f(x) = \alpha x + \beta$ dla $x \in [a, b]$, a taka funkcja nie jest silnie wypukła. $\square$

Twierdzenie 5.9.8. *Jeżeli P jest przedziałem otwartym i $f \in \mathcal{D}(P)$ jest funkcją wypukłą, to dla dowolnego $a \in P$ mamy*

$$f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x - a), \quad x \in P.$$

Dowód. Korzystamy z Twierdzenia 5.9.4. Dla $x < a < b$ mamy

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Biorąc $b \longrightarrow a+$ dostajemy

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant f'(a).$$

Dla $b < a < x$ mamy

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} \leqslant \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Biorąc $b \longrightarrow a-$ dostajemy

$$f'(a) \leqslant \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$ $\square$

Twierdzenie 5.9.9. *Dla $f \in \mathcal{D}^2(P)$ następujące warunki są równoważne:*

(i) *f jest wypukła (odp. silnie wypukła);*
(ii) *$f''(x) \geqslant 0$, $x \in P$ (odp. $f''(x) \geqslant 0$, $x \in P$, oraz $\operatorname{int}\{x \in P : f''(x) = 0\} = \varnothing$).*

Dowód. Wynika natychmiast z Twierdzeń 5.9.7 oraz 5.2.11. $\square$

Przykład 5.9.10. Funkcja exp jest silnie wypukła. W konsekwencji:

$$e^{t_1 x_1 + \dots + t_n x_n} \leqslant t_1 e^{x_1} + \dots + t_n e^{x_n}, \quad n \geqslant 2,\ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R},\ t_1, \dots, t_n \in [0, 1] : t_1 + \dots + t_n = 1.$$

Biorąc $t_1 = \dots = t_n = 1/n$ i podstawiając $a_j := a^{x_j}$, $j = 1, \dots, n$, dostajemy

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}, \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+.$$

Twierdzenie 5.9.11. *Jeżeli $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ jest wypukła, to*
(a) *pochodne jednostronne $f'_-(x)$, $f'_+(x)$ istnieją dla dowolnego $x \in Q := \operatorname{int} P$,*
(b) $f'_+(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'_-(b)$, $a, b \in Q$, $a < b$,
(c) $f'_- \leqslant f'_+$,
(d) $\lim\limits_{Q \ni x \to a} f(x) \leqslant f(a)$, $a \in P \setminus Q$.
W szczególności:
(e) $f \in \mathcal{C}(Q)$,
(f) f'_+ *jest funkcją niemalejącą,*
(g) $f'_-(x) = f'_+(x)$ *dla* $x \in Q \setminus S$, *gdzie S jest co najwyżej przeliczalny,*
(h) $f \in \mathcal{C}^{\uparrow}(P)$.
Odwrotnie, jeżeli funkcja $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia (a), (c), (f), (h), *to f jest wypukła.* (14)
W szczególności:
- *jeżeli $f \in \mathcal{D}(Q) \cap \mathcal{C}^{\uparrow}(P)$, to f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy f' jest niemalejąca w Q;*
- *jeżeli $f \in \mathcal{D}^2(Q) \cap \mathcal{C}^{\uparrow}(P)$, to f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy $f'' \geqslant 0$ w Q.*

Dowód. Na wstępie przyjrzyjmy się warunkom (e), (f), (g), (h):
(e) wynika z (a).
(f) wynika z (a), (b) i (c).
Jeżeli f'_+ jest niemalejąca, to f'_+ jest ciągła poza zbiorem co najwyżej przeliczalnym. Z (b) i (c) mamy $f'_+(x-) \leqslant f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$, $x \in Q$ (15). Wynika stąd, że pochodna $f'(x)$ istnieje w każdym punkcie ciągłości f'_+, co daje (g).
(h) wynika z (d).

Załóżmy, że $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ jest wypukła. Korzystając z wypukłości funkcji f dla przedziału $[x, x+k]$ w punkcie $x+h$ dostajemy
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant \frac{f(x+k)-f(x)}{k}, \quad x \in Q,\ 0 < h < k,\ x+k \in P.$$
Oznacza to, że funkcja
$$(0,k) \ni h \longmapsto \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
jest niemalejąca. Wynika stąd, że granica $f'_+(x)$ istnieje, $-\infty \leqslant f'_+(x) < +\infty$ oraz $f'_+(x) \leqslant \frac{f(x+k)-f(x)}{k}$. Uwaga: ponieważ jeszcze nie wiemy, czy $f'_+(x) \in \mathbb{R}$, symbol $f'_+(x)$ został tu użyty w sposób niezupełnie ścisły. Ponownie korzystając z wypukłości dla przedziału $[x-k, x]$ w punkcie $x-h$, mamy
$$\frac{f(x-h)-f(x)}{h} \leqslant \frac{f(x-k)-f(x)}{k}, \quad x \in Q,\ 0 < h < k,\ x-k \in P.$$
Podobnie jak poprzednio wynika stąd, że $f'_-(x)$ istnieje, $-\infty < f'_-(x) \leqslant +\infty$ oraz $\frac{f(x)-f(x-k)}{k} \leqslant f'_-(x)$. Własność (b) jest więc wykazana.

Przechodzimy do własności (c). Zauważmy, że wyniknie z niej natychmiast, że $f'_+(x)$ i $f'_-(x)$ są skończone, czyli dostaniemy (a). Kolejny raz skorzystamy z wypukłości dla przedziału $[x-h, x+k]$ w punkcie x:
$$\frac{f(x-h)-f(x)}{-h} \leqslant \frac{f(x+k)-f(x)}{k}, \quad x \in Q,\ h, k > 0,\ x-h, x+k \in P,$$
a stąd $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$, $x \in Q$.

Pozostaje wykazać (d). Przypuśćmy np., że $b \in P$ jest prawym końcem przedziału P. Najpierw pokażemy, że granica lewostronna $f(b-) \in \overline{\mathbb{R}}$ istnieje. Ponieważ f'_+ jest funkcją niemalejącą, mamy następujące możliwości:
- $f'_+ \leqslant 0$ w Q lub $f'_+ \geqslant 0$ w Q: wtedy f jest monotoniczna w Q, a stąd granica $f(b-)$ istnieje;
- istnieje punkt $c \in Q$ taki, że $f'_+ \leqslant 0$ w $Q \cap (-\infty, c]$ i $f'_+ \geqslant 0$ w $Q \cap [c, +\infty)$: wtedy f jest niemalejąca w $Q \cap [c, +\infty)$; w szczególności, $f(b-)$ istnieje.

---
(14) Oznacza to, że f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia (a), (b), (c), (d).
(15) Tu i dalej będziemy stosować klasyczne oznaczenie $\varphi(a\pm) := \lim\limits_{x \to a\pm} \varphi(x)$.

Teraz pokażemy, że $f(b-) \leqslant f(b)$. Niech $b' \in P$, $b' < b$. Wtedy, korzystając z wypukłości dla przedziału $[b', b]$ w punkcie x, dostajemy

$$f(x) \leqslant f(b') + \frac{f(b) - f(b')}{b - b'}(x - b'), \quad x \in [b', b],$$

co przy $x \longrightarrow b$ daje $f(b-) \leqslant f(b)$.

Podobnie postępujemy, gdy $a \in P$ jest lewym końcem przedziału P — Ćwiczenie.

Załóżmy teraz, że warunki (a), (c), (f), (h) są spełnione. Najpierw pokażemy, że f jest wypukła w Q. Ustalmy $a, b \subset Q$, $a < b$, i niech

$$\varphi(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Zauważmy, że $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Chcemy pokazać, że $\varphi \leqslant 0$. Zauważmy, że φ jest ciągła (wobec (a)). Przypuśćmy, że $\varphi(c) = \max_{[a,b]} \varphi > 0$ dla pewnego $c \in (a, b)$. Mamy więc $\frac{\varphi(c+h)-\varphi(c)}{h} \leqslant 0$, $0 < h \ll 1$, a stąd $\varphi'_+(c) \leqslant 0$. Podobnie, $\frac{\varphi(c-h)-\varphi(c)}{-h} \geqslant 0$, $0 < h \ll 1$, a stąd $\varphi'_-(c) \geqslant 0$. Korzystając z (c), dostajemy $\varphi'_+(c) = 0$. Stąd, wobec (f), φ jest funkcją niemalejącą w przedziale $[c, b]$ i w szczególności, $0 < \varphi(c) \leqslant \varphi(b) = 0$ — sprzeczność.

Teraz pokażemy, że f jest wypukła w całym przedziale P. Niech $a, b \in P$, $a < b$, $0 < t < 1$ będą ustalone. Zauważmy, że $ta + (1-t)b \in Q$. Wiemy, że $f(ta' + (1-t)b') \leqslant tf(a') + (1-t)f(b')$ dla $[a', b'] \subset Q$, $a' < b'$. Korzystając z (h) mamy

$$\begin{aligned} f(ta + (1-t)b) &\leqslant \limsup_{\substack{Q \ni a' \to a \\ Q \ni b' \to b}} f(ta' + (1-t)b') \leqslant \limsup_{\substack{Q \ni a' \to a \\ Q \ni b' \to b}} \big(tf(a') + (1-t)f(b')\big) \\ &\leqslant t \limsup_{Q \ni a' \to a} f(a') + (1-t) \limsup_{Q \ni b' \to b} f(b') \leqslant tf(a) + (1-t)f(b). \end{aligned}$$

□

5.10. Średnie uogólnione

Ustalmy $n \in \mathbb{N}_2$ oraz liczby $a_1, \dots, a_n, t_1, \dots, t_n > 0$ takie, że $a_1, \dots, a_n$ są parami różne oraz $t_1 + \dots + t_n = 1$. Niech $a := (a_1, \dots, a_n)$, $t := (t_1, \dots, t_n)$. Rozważmy funkcję

$$\mathbb{R}_* \ni x \overset{S_{a,t}}{\longmapsto} \Big(t_1 a_1^x + \dots + t_n a_n^x\Big)^{1/x} \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Uwaga: Formalnie można zrezygnować z założenia, że $a_1, \dots, a_n$ są parami różne, ponieważ (poprzez zmianę n i $t_1, \dots, t_n$) zawsze można doprowadzić do sytuacji, w której bądź $n = 1$, bądź $a_1, \dots, a_n$ są parami różne.

Lemat 5.10.1. (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} S_{a,t}(x) = \max\{a_1, \dots, a_n\} =: S_{a,t}(+\infty)$.

(b) $\lim\limits_{x \to 0} S_{a,t}(x) = a_1^{t_1} \cdots a_n^{t_n} =: S_{a,t}(0)$.

(c) $\lim\limits_{x \to -\infty} S_{a,t}(x) = \min\{a_1, \dots, a_n\} =: S_{a,t}(-\infty)$.

Dowód. (a) i (c) są elementarne (Ćwiczenie).

(b) Zauważmy, że $S_{a,t} = \exp(\varphi)$, gdzie $\varphi(x) := \frac{1}{x} \ln(t_1 a_1^x + \dots + t_n a_n^x)$. Granica $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x)$ jest symbolem nieoznaczonym typu $\frac{0}{0}$. Stosujemy regułę d'Hôpitala

$$\lim_{x \to 0} \varphi(x) \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{t_1 a_1^x \ln a_1 + \dots + t_n a_n^x \ln a_n}{t_1 a_1^x + \dots + t_n a_n^x} = t_1 \ln a_1 + \dots + t_n \ln a_n.$$

□

Definicja 5.10.2. Funkcję $S_{a,t} : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ nazywamy *średnią uogólnioną liczb* $a_1, \dots, a_n$ *z wagami* $t_1, \dots, t_n$.

Obserwacja 5.10.3. W przypadku, gdy $t_1 = \dots = t_n := 1/n$, niech $S_a := S_{a,t}$. Wtedy dostajemy klasyczne średnie:

- $S_a(2) = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}$ = średnia kwadratowa;
- $S_a(1) = \dfrac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ = średnia arytmetyczna;

- $S_a(0) = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$ = średnia geometryczna;
- $S_a(-1) = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$ = średnia harmoniczna.

Uwaga: Definiując powyższe średnie rezygnujemy z założenia, że $a_j \neq a_k$ dla $j \neq k$.

Twierdzenie 5.10.4 (Ćwiczenie*). (a) *Funkcja $S_{a,t} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest klasy $\mathcal{C}^\infty$.*

(b) *Funkcja $S_{a,t}$ jest ściśle rosnąca.*

(c) *Istnieją liczby $x_\pm \in \mathbb{R}$ takie, że $S_{a,t}$ jest wypukła w przedziale $(-\infty, x_-)$ i wklęsła w $(x_+, +\infty)$.*

Obserwacja 5.10.5. Odnotujmy, że problem wypukłości funkcji $S_{a,t}$ jest wysoce nietrywialny. Dla przykładu, korzystając z pomocy komputera można łatwo, sprawdzić, że dla $n = 4$, $a_1 := 0.1635$, $a_2 := 4.7965$, $a_3 := 9.3668$, $a_4 := 1.7856$, $t_1 := 0.0455$, $t_2 := 0.1430$, $t_3 := 0.0007$, $t_4 := 0,8108$, mamy co najmniej 5 punktów przegięcia.

5.11. Uzupełnienia

Ten podrozdział nie wiąże się bezpośrednio z różniczkowaniem. Stanowi uzupełnienie naszej wiedzy o odwzorowaniach liniowych i dwuliniowych, o iloczynach skalarnych i o kategoriach Baire'a. Z wyników przedstawionych w tym podrozdziale będziemy korzystać wielokrotnie w przyszłości.

5.11.1. Odwzorowania liniowe. Niech E, F, G, ... będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{K}$.

Definicja 5.11.1. Przez $\operatorname{Hom}(E, F)$ będziemy oznaczać przestrzeń wszystkich odwzorowań $\mathbb{K}$–liniowych $L : E \longrightarrow F$. Niech $E^* := \operatorname{Hom}(E, \mathbb{K})$. Przez $\mathcal{L}(E, F)$ oznaczamy przestrzeń wszystkich odwzorowań liniowych i ciągłych $L : E \longrightarrow F$. Niech $E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Obserwacja 5.11.2. Odnotujmy, że jeżeli E jest przestrzenią nieskończenie wymiarową, to może być $E' \subsetneq E^*$. Na przykład, niech E oznacza przestrzeń wszystkich wielomianów rzeczywistych jednej zmiennej rzeczywistej, niech $\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$, $f \in E$, i niech $L : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $L(f) := f(3)$. Oczywiście $L \in E^*$. Zauważmy, że $\|(\frac{x}{2})^k\| = (\frac{1}{2})^k \longrightarrow 0$. Z drugiej strony $L((\frac{x}{2})^k) = (\frac{3}{2})^k \longrightarrow +\infty$. Oznacza to, że $L \notin E'$.

Obserwacja 5.11.3. Niech $L \in \operatorname{Hom}(E, F)$.

(a) Jeżeli $F = F_1 \times \cdots \times F_N$, $L = (L_1, \dots, L_N)$, to
$$L \in \mathcal{L}(E, F_1 \times \cdots \times F_N) \iff L_j \in \mathcal{L}(E, F_j),\ j = 1, \dots, N.$$

(b) Jeżeli $E = E_1 \times \cdots \times E_N$, $L_j : E_j \longrightarrow F$, $L_j(x_j) := L(\underbrace{0, \dots, 0}_{(j-1)\,\times}, x_j, \underbrace{0, \dots, 0}_{(N-j)\,\times})$, $j = 1, \dots, N$, to $L \in \mathcal{L}(E_1 \times \cdots \times E_N, F) \iff L_j \in \mathcal{L}(E_j, F),\ j = 1, \dots, N$. Zauważmy, że $L(x) = L_1(x_1) + \cdots + L_N(x_N)$ dla $x = (x_1, \dots, x_N) \in E_1 \times \cdots \times E_N$.

(c) Wiadomo, że zbiór $\operatorname{Hom}(\mathbb{K}^N, F)$ składa się ze wszystkich odwzorowań postaci
$$\mathbb{K}^N \ni (x_1, \dots, x_N) \longmapsto x_1 a_1 + \cdots + x_N a_N \in F,$$
gdzie $a_1, \dots, a_N \in F$. Wynika stąd, że $\operatorname{Hom}(\mathbb{K}^N, F) = \mathcal{L}(\mathbb{K}^N, F) \simeq F^N$

Wiadomo również, że $\operatorname{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) = \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \simeq \mathbb{M}(m \times n; \mathbb{K}) = \mathbb{K}[m \times n]$ = przestrzeń macierzy wymiaru $m \times n$ o wyrazach z $\mathbb{K}$. Izomorfizm $\operatorname{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \simeq \mathbb{M}(m \times n; \mathbb{K})$ dany jest następującym przepisem. Odwzorowaniu liniowemu $L : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ przyporządkowujemy macierz, której i-ta kolumna składa się ze współrzędnych wektora $L(\boldsymbol{e}_i) = L(0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$. Izomorfizm odwrotny to odwzorowanie, które przypisuje macierzy $A \in \mathbb{M}(m \times n; \mathbb{K})$ odwzorowanie liniowe postaci $\mathbb{K}^n \ni x \longmapsto A.x \in \mathbb{K}^m$, gdzie $A.x$ oznacza wynik mnożenia macierzy A przez wektor x utożsamiany z macierzą kolumnową $n \times 1$.

Twierdzenie 5.11.4. *Niech $L \in \operatorname{Hom}(E, F)$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *$L \in \mathcal{L}(E, F)$;*

(ii) *odwzorowanie L jest ciągłe w 0;*

(iii) *istnieje punkt $a \in E$ taki, że odwzorowanie L jest ciągłe w a;*

(iv) *istnieją $a \in E$, $r > 0$ takie, że $L(\overline{B}(a, r))$ jest zbiorem ograniczonym* ([16]);

([16]) Oczywiście warunek ten jest równoważny temu, że istnieją $a \in E$, $r > 0$ takie, że $L(B(a, r))$ jest zbiorem ograniczonym.

(v) *istnieje $C \geqslant 0$ takie, że $\|L(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$ dla dowolnego $x \in E$.*

Dowód. Jedyny problem to implikacja (iv) $\Longrightarrow$ (v). Niech $L(\overline{B}(a,r)) \subset \overline{B}(R)$. Wystarczy pokazać, że $\|L(x)\| \leqslant C$ dla $\|x\| = 1$. Weźmy dowolne $x \in E$ takie, że $\|x\| = 1$. Mamy:

$$\|L(x)\| = \frac{1}{r}\|L(rx)\| = \frac{1}{r}\|L(a+rx) - L(a)\| \leqslant \frac{1}{r}(\|L(a+rx)\| + \|L(a)\|) \leqslant \frac{2R}{r} =: C. \qquad \square$$

Przypomnijmy, że normy $\| \; \|_1, \| \; \|_2 : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ są równoważne, jeżeli $\varrho_{\| \; \|_1} \sim \varrho_{\| \; \|_2}$, gdzie $\varrho_{\| \; \|_j}(x,y) := \|x-y\|_j$, $j = 1, 2$. Piszemy wtedy $\| \; \|_1 \sim \| \; \|_2$.

Wniosek 5.11.5. $\| \; \|_1 \sim \| \; \|_2$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $C \geqslant 1$ takie, że $\frac{1}{C}\| \; \|_1 \leqslant \| \; \|_2 \leqslant C\| \; \|_1$.*

Powyższy wynik oznacza, iż w kategorii metryk zadanych przez normy równoważność takich metryk jest równoważna ich porównywalności.

Dowód. Stosujemy Twierdzenie 5.11.4 do identyczności $\mathrm{id}_E : (E, \| \; \|_1) \longrightarrow (E, \| \; \|_2)$. $\square$

Wniosek 5.11.6. *$\mathcal{L}(E,F)$ jest przestrzenią unormowaną przez funkcję*

$$\|L\| = \|L\|_{\mathcal{L}(E,F)} := \sup\{\|L(x)\| : \|x\| \leqslant 1\}, \quad L \in \mathcal{L}(E,F).$$

Obserwacja 5.11.7. Niech $L \in \mathcal{L}(E,F)$.

(a) Jeżeli $E \neq \{0\}$, to $\|L\| = \sup\left\{\frac{\|L(x)\|}{\|x\|} : x \in E_*\right\} = \sup\{\|L(x)\| : \|x\| = 1\}$.

(b) $\|L\|$ jest najmniejszą stałą $C \geqslant 0$ taką, że Twierdzenie 5.11.4(v) zachodzi. W szczególności, $\|L(x)\| \leqslant \|L\|\|x\|$, $x \in E$.

(c) $L|_{\overline{B}(1)} \in \mathcal{B}(\overline{B}(1), F)$ (Obserwacja 4.6.10(a)) oraz $\|L\|$ jest identyczna z normą Czebyszewa odwzorowania $L|_{\overline{B}(1)}$ w $\mathcal{B}(\overline{B}(1), F)$

(d) Jeżeli $A \in \mathcal{L}(E,F)$, $B \in \mathcal{L}(F,G)$, to $B \circ A \in \mathcal{L}(E,G)$, $\|B \circ A\| \leqslant \|B\|\|A\|$. W szczególności, jeżeli $A \in \mathcal{L}(E,E)$, to $A^k := \underbrace{A \circ \cdots \circ A}_{k\times} \in \mathcal{L}(E,E)$ i $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$.

Twierdzenie 5.11.8. *Jeżeli F jest przestrzenią Banacha, to $\mathcal{L}(E,F)$ jest przestrzenią Banacha.*

Dowód. Jeżeli $(L_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(E,F)$ jest ciągiem Cauchy'ego, to $(L_n|_{\overline{B}(1)})_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(\overline{B}(1), F)$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{B}(\overline{B}(1), F)$ wraz z normą Czebyszewa (Obserwacja 5.11.7(c)). Przypomnijmy, że przestrzeń $\mathcal{B}(\overline{B}(1), F)$ wraz z normą Czebyszewa jest przestrzenią Banacha (Obserwacja 4.6.10(a)). W takim razie istnieje odwzorowanie $\Phi \in \mathcal{B}(\overline{B}(1), F)$ takie, że $L_n|_{\overline{B}(1)} \longrightarrow \Phi$ in $\mathcal{B}(\overline{B}(1), F)$. Pozostaje wykazać, że $\Phi = L|_{\overline{B}(1)}$ dla pewnego $L \in \mathrm{Hom}(E,F)$. W tym celu zauważmy, że jeżeli $x \neq 0$, to $L_n(x) = \|x\|L_n(\frac{x}{\|x\|}) \longrightarrow \|x\|\Phi(\frac{x}{\|x\|})$. Oznacza to, że $L_n \longrightarrow L$ punktowo na E, $L = \Phi$ na $\overline{B}(1)$. Oczywiście $L : E \longrightarrow F$ jest operatorem liniowym. $\square$

Definicja 5.11.9. Niech $\mathrm{Isom}(E,F)$ oznacza rodzinę wszystkich izomorfizmów algebraicznych $L : E \longrightarrow F$ takich, że L i L^{-1} są ciągłe (tzn. L jest również izomorfizmem topologicznym).

Obserwacja 5.11.10. (a) Jeżeli $\mathrm{Isom}(E,F) \neq \varnothing$, to E jest przestrzenią Banacha wtedy i tylko wtedy, gdy F jest przestrzenią Banacha.

(b) Jeżeli $L \in \mathrm{Isom}(E,F)$ i $E \neq \{0\}$, to $\|L^{-1}\| \geqslant \|L\|^{-1}$.

Istotnie, $1 = \|\mathrm{id}_E\| = \|L^{-1} \circ L\| \leqslant \|L^{-1}\|\|L\|$.

Twierdzenie 5.11.11. *Załóżmy, że $1 \leqslant d := \dim E < \infty$. Wtedy:*

(a) *Wszystkie normy w E są równoważne.*

(b) $\mathrm{Isom}(\mathbb{K}^d, E) \neq \varnothing$.

(c) $\mathcal{L}(E,F) = \mathrm{Hom}(E,F)$ *dla dowolnej przestrzeni unormowanej F.*

(d) *E jest przestrzenią Banacha.*

([16]) $A_* := A \setminus \{0\}$.

Dowód. (a) Niech $\| \;\|$ będzie ustaloną normą na E i niech $e_1, \dots, e_d$ będzie dowolną bazą E. Zdefiniujmy $L : \mathbb{K}^d \longrightarrow E$, $L(t_1, \dots, t_d) := t_1 e_1 + \dots + t_d e_d$; L jest izomorfizmem algebraicznym. Ponadto L jest odwzorowaniem ciągłym bowiem $\|L(t)\| \leqslant \max\{\|e_1\|, \dots, \|e_d\|\}\|t\|_1 = C\|t\|_1$, $t \in \mathbb{K}^d$.

Zauważmy, że funkcja $q : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $q(x) := \|L^{-1}(x)\|_1$, jest normą na E. Wystarczy pokazać, że $\| \;\| \sim q$. Wiemy, że $\| \;\| \leqslant Cq$. Wystarczy więc pokazać, że $q \leqslant \operatorname{const} \| \;\|$ (co jest równoważne ciągłości L^{-1}). Chcemy pokazać, że $\|L^{-1}(x)\|_1 \leqslant \operatorname{const} \|x\|$, $x \in E$. Innymi słowy, $\|t\|_1 \leqslant \operatorname{const} \|L(t)\|$, $t \in \mathbb{K}^d$, co z kolei jest równoważne pokazaniu, że $\|L(t)\| \geqslant \operatorname{const} > 0$ dla $\|t\|_1 = 1$. Teraz wystarczy już tylko skorzystać z twierdzenia Weierstrassa o osiąganiu kresów (wobec faktu, że L jest ciągłe, a sfera $\{\|t\|_1 = 1\}$ jest zwarta).

(b) $L \in \operatorname{Isom}(\mathbb{K}^d, E)$.

(c) i (d) wynikają z faktu, że $\operatorname{Isom}(\mathbb{K}^d, E) \neq \varnothing$, a dla $E = \mathbb{K}^d$ własności (c) i (d) są oczywiste. □

Wniosek 5.11.12. *Niech $W \subset E$ będzie skończenie wymiarową podprzestrzenią wektorową E. Wtedy W jest przestrzenią Banacha. W szczególności, W jest domknięta.*

Twierdzenie 5.11.13. *Następujące warunki są równoważne:*

(i) $\dim E < \infty$*;*
(ii) $\forall_{a \in E,\, r>0} : \overline{B}(a, r)$ *jest zbiorem zwartym;*
(iii) $\exists_{a \in E,\, r>0} : \overline{B}(a, r)$ *jest zbiorem zwartym.*

Dowód. Implikacje (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) są oczywiste. Pozostaje do wykazania (iii) $\Longrightarrow$ (i). Korzystając z translatywności kul, widzimy, że (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Ponieważ kula $\overline{B}(0, 2)$ jest zwarta, istnieje skończona liczba punktów $a_1, \dots, a_N \in \overline{B}(0, 2)$ taka, że $\overline{B}(0, 2) \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(a_j, 1)$. Niech V oznacza podprzestrzeń generowaną przez wektory $a_1, \dots, a_N$. Na podstawie Wniosku 5.11.12, jest to podprzestrzeń domknięta. Pokażemy, że $E = V$. Ustalmy $a \in E$. Zamierzamy pokazać, że $a \in \overline{V}$. Możemy założyć, że $\|a\| < 1$. Ponieważ $a \in \overline{B}(0, 2)$, istnieją $j_1 \in \{1, \dots, N\}$ oraz $x_1 \in B(0, 1)$ takie, że $a = a_{j_1} + x_1 =: b_1 + x_1$. Powtarzając to samo dla wektora $2x_1$, wnioskujemy, że $a = b_2 + \frac{1}{2}x_2$, gdzie $b_2 \in V$ i $\|x_2\| < 1$. Po k krokach dostajemy: $a = b_k + \frac{1}{2^{k-1}}x_k$, gdzie $b_k \in V$ i $\|x_k\| < 1$. W szczególności, $a \in \overline{V}$. □

5.11.2. Odwzorowania dwuliniowe.

Definicja 5.11.14. Przez $\operatorname{Hom}(E, F; G)$ oznaczamy przestrzeń wszystkich odwzorowań dwuliniowych $B : E \times F \longrightarrow G$. Jeżeli $E = F$, to piszemy $\operatorname{Hom}^2(E, G)$ zamiast $\operatorname{Hom}(E, E; G)$.

Przez $\mathcal{L}(E, F; G)$ oznaczamy zbiór wszystkich ciągłych odwzorowań dwuliniowych $E \times F \longrightarrow G$. Niech $\mathcal{L}^2(E, G) := \mathcal{L}(E, E; G)$. Oczywiście, $\mathcal{L}(E, F; G)$ jest $\mathbb{K}$–przestrzenią wektorową.

Obserwacja 5.11.15. Przypomnijmy pewien fakt algebraiczny. Niech

$$\operatorname{Hom}(E, F; G) \ni B \overset{\Phi}{\longmapsto} \Big(E \ni x \longmapsto B(x, \cdot) \in \operatorname{Hom}(F, G)\Big) \in \operatorname{Hom}(E, \operatorname{Hom}(F, G));$$

Φ jest dobrze określone, liniowe, bijektywne i $\Psi = \Phi^{-1}$ jest dane wzorem

$$\operatorname{Hom}(E, \operatorname{Hom}(F, G)) \ni A \overset{\Psi}{\longmapsto} \Big(E \times F \ni (x, y) \longmapsto A(x)(y) \in G\Big) \in \operatorname{Hom}(E, F; G).$$

Tak więc $\operatorname{Hom}(E, F; G) \simeq \operatorname{Hom}(E, \operatorname{Hom}(F, G))$. W identyczny sposób można pokazać, że

$$\operatorname{Hom}(E, F; G) \simeq \operatorname{Hom}(F, \operatorname{Hom}(E, G));$$

$$\operatorname{Hom}(E, F; G) \ni B \longmapsto \Big(F \ni y \longmapsto B(\cdot, y) \in \operatorname{Hom}(E, G)\Big) \in \operatorname{Hom}(F, \operatorname{Hom}(E, G)).$$

Twierdzenie 5.11.16. *Niech $B \in \operatorname{Hom}(E, F; G)$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) $B \in \mathcal{L}(E, F; G)$*;*
(ii) *odwzorowanie B jest ciągłe w $(0, 0)$;*
(iii) *istnieje punkt $(a, b) \in E \times F$ taki, że odwzorowanie B jest ciągłe w (a, b);*
(iv) *istnieją $(a, b) \in E \times F$ i $r > 0$ takie, że $B(\overline{\mathbb{B}}(a, r) \times \overline{\mathbb{B}}(b, r))$ jest zbiorem ograniczonym* (17)*;*
(v) *istnieje $C \geqslant 0$ takie, że $\|B(x, y)\|_G \leqslant C\|x\|_E\|y\|_F$ dla dowolnego $(x, y) \in E \times F$.*

(17) Równoważnie: istnieją $(a, b) \in E \times F$ i $r > 0$ takie, że $B(\mathbb{B}(a, r) \times \mathbb{B}(b, r))$ jest zbiorem ograniczonym. Uwaga: dla uniknięcia kolizji oznaczeń piszemy chwilowo $\mathbb{B}(a, r)$ zamiast $B(a, r)$.

Dowód. Implikacje (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) są oczywiste.

(iv) $\Longrightarrow$ (v): Niech $B(\overline{\mathbb{B}}(a,r) \times \overline{\mathbb{B}}(b,r)) \subset \overline{\mathbb{B}}(R)$.

Wystarczy pokazać, że $\|B(x,y)\| \leqslant C$ dla $\|x\| = \|y\| = 1$. Weźmy $(x,y) \in E \times F$, $\|x\| = \|y\| = 1$:

$$\|B(x,y)\| = \frac{1}{r^2}\|B(rx,ry)\| = \frac{1}{r^2}\|B(a+rx,b+ry) - B(a,b+ry) - B(a+rx,b) + B(a,b)\|$$
$$\leqslant \frac{1}{r^2}(\|B(a+rx,b+ry)\| + \|B(a,b+ry)\| + \|B(a+rx,b)\| + \|B(a,b)\|) \leqslant \frac{4R}{r^2} =: C.$$

(v) $\Longrightarrow$ (i): $\|B(x,y) - B(x_0,y_0)\| = \|B(x-x_0,y) + B(x_0,y-y_0)\| \leqslant C(\|x-x_0\|\|y\| + \|x_0\|\|y-y_0\|)$
$\leqslant C\max\{\|x_0\|, \|y\|\}\|(x,y) - (x_0,y_0)\|_1$. □

Obserwacja 5.11.17. (a) $\mathcal{L}(E,F;G)$ wraz z normą

$$\|B\| = \|B\|_{\mathcal{L}(E,F;G)} := \sup\{\|B(x,y)\| : \|x\| \leqslant 1,\ \|y\| \leqslant 1\}, \quad B \in \mathcal{L}(E,F;G)$$

jest przestrzenią unormowaną.

(b) Jeżeli $E \neq \{0\}$ i $F \neq \{0\}$, to

$$\|B\| = \sup\Big\{\frac{\|B(x,y)\|}{\|x\|\|y\|} : (x,y) \in E_* \times F_*\Big\} = \sup\{\|B(x,y)\| : \|x\| = 1,\ \|y\| = 1\}.$$

(c) $\|B\|$ jest najmniejszą stałą $C \geqslant 0$ taką, że Twierdzenie 5.11.16(v) zachodzi. W szczególności,

$$\|B(x,y)\| \leqslant \|B\|\|x\|\|y\|, \quad (x,y) \in E \times F.$$

Przykład 5.11.18 (Przykłady odwzorowań dwuliniowych)**.** (a) $\mathcal{L}(E,F) \times E \ni (L,x) \overset{B}{\longmapsto} L(x) \in F$, $\|B\| \leqslant 1$. Ponadto (Ćwiczenie*), jeżeli $E \neq \{0\}$ i $F \neq \{0\}$, to $\|B\| = 1$.

(b) $\mathcal{L}(F,G) \times \mathcal{L}(E,F) \ni (Q,P) \overset{B}{\longmapsto} Q \circ P \in \mathcal{L}(E,G)$, $\|B\| \leqslant 1$. Ponadto (Ćwiczenie*), jeżeli $E \neq \{0\}$, $F \neq \{0\}$ i $G \neq \{0\}$, to $\|B\| = 1$.

Twierdzenie 5.11.19. (a) *Odwzorowanie* $\mathcal{L}(E,F;G) \ni B \overset{\varPhi}{\longmapsto} \big(E \ni x \longmapsto B(x,\cdot) \in \mathcal{L}(F,G)\big) \in \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G))$ *jest dobrze określone, izomorficzne i izometryczne, tzn.*

$$\varPhi \in \operatorname{Isom}(\mathcal{L}(E,F;G), \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G))), \quad \|\varPhi(B)\| = \|B\|,\ B \in \mathcal{L}(E,F;G). \quad (^{18})$$

(b) *Jeżeli E i F są skończenie wymiarowe, to* $\mathcal{L}(E,F;G) = \operatorname{Hom}(E,F;G)$.

Analogiczne własności przysługują odwzorowaniu $\mathcal{L}(E,F;G) \ni B \longmapsto \big(F \ni y \longmapsto B(\cdot,y) \in \mathcal{L}(E,G)\big) \in \mathcal{L}(F,\mathcal{L}(E,G))$.

Dowód. (a) Jest oczywiste, że $B(x,\cdot) \in \mathcal{L}(F,G)$ dla dowolnego $x \in E$. Ponadto, $\|B(x,\cdot)\| \leqslant \|B\|\|x\|$. Stąd $\varPhi(B) \in \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G))$ i $\|\varPhi(B)\| \leqslant \|B\|$. Ostatecznie $\varPhi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E,F;G),\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G)))$ i $\|\varPhi\| \leqslant 1$.

Teraz przechodzimy do odwzorowania $\varPsi = \varPhi^{-1}$:

$$\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G)) \ni A \overset{\varPsi}{\longmapsto} \Big(E \times F \ni (x,y) \longmapsto A(x)(y) \in G\Big) \in \mathcal{L}(E,F;G).$$

Ponieważ $\|A(x)(y)\| \leqslant \|A(x)\|\|y\| \leqslant \|A\|\|x\|\|y\|$, zatem $\varPsi(A) \in \mathcal{L}(E,F;G)$, $\|\varPsi(A)\| \leqslant \|A\|$. Wynika stąd, że $\varPsi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G)),\mathcal{L}(E,F;G))$ i $\|\varPsi\| \leqslant 1$.

(b) Na podstawie (a) i Twierdzenia 5.11.11 mamy: $\mathcal{L}(E,F;G) \simeq \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G)) = \operatorname{Hom}(E,\operatorname{Hom}(F,G)) \simeq \operatorname{Hom}(E,F;G)$. □

Wniosek 5.11.20. *Jeżeli G jest przestrzenią Banacha, to $\mathcal{L}(E,F;G)$ jest przestrzenią Banacha* $(^{19})$.

$(^{18})$ W szczególności, $\|\varPhi\| = \|\varPhi^{-1}\| = 1$ o ile $E \neq \{0\}$, $F \neq \{0\}$ i $G \neq \{0\}$.

$(^{19})$ Bo $\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G))$ jest przestrzenią Banacha.

5.11.3. Iloczyn skalarny. Niech $\mathcal{H}$ będzie dowolną przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definicja 5.11.21. Odwzorowanie $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ nazywamy *semi-iloczynem skalarnym*, jeżeli:

(a) odwzorowanie $\mathcal{H} \ni x \longmapsto \langle x, y\rangle$ jest $\mathbb{K}$-liniowe dla dowolnego $y \in \mathcal{H}$,

(b) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ dla dowolnych $x, y \in \mathcal{H}$, ([20])

(c) $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}_+$ dla dowolnego $x \in \mathcal{H}$.

Jeżeli ponadto

(d) $\langle x, x\rangle > 0$ dla $x \neq 0$,

to mówimy, że $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ jest *iloczynem skalarnym*, a parę $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle)$ nazywamy *przestrzenią unitarną*.

Dla przykładu, odwzorowanie $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \ni (z, w) \longmapsto \langle z, w\rangle := \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w}_j$ jest standardowym iloczynem skalarnym w $\mathbb{K}^n$.

Twierdzenie 5.11.22 (Nierówność Schwarza)**.** *Jeżeli S spełnia* (a), (b) *i* (c)*, to*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle, \quad x, y \in \mathcal{H},$$

przy czym równość zachodzi, gdy x i y są liniowo zależne.

Jeżeli $\langle\ ,\ \rangle$ spełnia dodatkowo (d)*, to równość zachodzi jedynie, gdy x i y są liniowo zależne.*

Dowód. Niech $x, y \in \mathcal{H}$. Można założyć, że $\langle x, y\rangle \neq 0$. Dla $\xi = te^{i\theta} \in \mathbb{K}$ $(t, \theta \in \mathbb{R})$ ([21]) mamy:

$$0 \leqslant \langle \xi x + y, \xi x + y\rangle = |\xi|^2\langle x, x\rangle + 2\operatorname{Re}(\xi\langle x, y\rangle) + \langle y, y\rangle.$$

Dobierając θ tak, by $e^{i\theta}\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$, dostajemy $t^2\langle x, x\rangle + 2t|\langle x, y\rangle| + \langle y, y\rangle \geqslant 0$, $t \in \mathbb{R}$, co oznacza, że $\frac{1}{4}\Delta = |\langle x, y\rangle|^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leqslant 0$.

Jeżeli $y = tx$, to $|\langle x, y\rangle|^2 = |t|^2\langle x, x\rangle^2 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$.

Załóżmy teraz, że zachodzi (d) oraz $|\langle x, y\rangle|^2 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$. Możemy założyć, że $\langle x, y\rangle \neq 0$. Równość $|\langle x, y\rangle|^2 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$ oznacza, że $\Delta = 0$, skąd wynika istnienie pierwiastka i dalej, istnienie $\xi \in \mathbb{K}$ takiego, że $\langle \xi x + y, \xi x + y\rangle = 0$. Teraz, korzystamy z (d) i wnioskujemy, że $\xi x + y = 0$. □

Twierdzenie 5.11.23. *Jeżeli $\langle\ ,\ \rangle$ jest semi-iloczynem skalarnym na $\mathcal{H}$, to funkcja*

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}, \quad x \in \mathcal{H},$$

jest seminormą taką, że $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$, $x, y \in \mathcal{H}$. Jeżeli $\langle\ ,\ \rangle$ jest iloczynem skalarnym, to $\|\ \|$ jest normą.

Dowód. Jedyną wątpliwość może budzić nierówność trójkąta. Korzystamy z nierówności Schwarza:

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$$
$$\leqslant \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \quad \square$$

Definicja 5.11.24. Jeżeli przestrzeń unitarna z normą daną przez iloczyn skalarny jest zupełna, to nazywamy ją *przestrzenią Hilberta* ([22]).

Obserwacja 5.11.25. (a) Norma dana przez iloczyn skalarny spełnia *regułę równoległoboku*:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad x, y \in \mathcal{H} \quad (\text{Ćwiczenie}).$$

(b) Dla $n \geqslant 2$ norma $\|\ \|_p : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ spełnia regułę równoległoboku wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

Istotnie, niech $x = \boldsymbol{e}_1$, $y = \boldsymbol{e}_2$. Wtedy:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 - 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \begin{cases} 2 \cdot 2^{2/p} - 4, & \text{jeżeli } 1 \leqslant p < +\infty \\ 1 + 1 - 4, & \text{jeżeli } p = +\infty \end{cases}.$$

([20]) W szczególności, wobec (a), $\langle x, \alpha' y' + \alpha'' y''\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y'\rangle + \overline{\alpha}''\langle x, y''\rangle$. Własności (a) i (b) są czasem nazywane *półtoraliniowością*. Zauważmy, że dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ odwzorowanie $\langle\ ,\ \rangle$ jest po prostu dwuliniowe symetryczne.

([21]) Jeżeli $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, to $\theta \in \{0, \pi\}$.

([22]) Dawid Hilbert (1862–1943).

Twierdzenie 5.11.26. *Jeżeli norma (w przestrzeni unormowanej) spełnia regułę równoległoboku, to jest dana przez iloczyn skalarny określony wzorem Frécheta–Jordana–von Neumanna* (23)(24)(25)

$$S_{\mathbb{K}}(x,y) = S(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2), & \textit{jeżeli } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \\ \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2), & \textit{jeżeli } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}, \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

Dowód. Jest widoczne, że $S(x,x) = \|x\|^2$, $S(y,x) = \overline{S(x,y)}$, $S(x,0) = 0$, $S(-x,y) = -S(x,y)$ oraz że S jest odwzorowaniem ciągłym. Ponadto, $S_{\mathbb{C}}(ix,y) = iS_{\mathbb{C}}(x,y)$. Cały problem polega na pokazaniu, że $S(\cdot,y)$ jest addytywne. Jeżeli bowiem tak jest, to najpierw dowodzimy indukcyjnie, że $S(nx,y) = nS(x,y)$, $n \in \mathbb{Z}$, a następnie, że $S(\alpha x,y) = \alpha S(x,y)$, $\alpha \in \mathbb{Q}$. Stąd, wobec ciągłości dostajemy $S(\alpha x,y) = \alpha S(x,y)$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

Przechodzimy do addytywności. Mamy $S_{\mathbb{C}}(x,y) = S_{\mathbb{R}}(x,y) - iS_{\mathbb{R}}(ix,y)$. Wystarczy więc udowodnić addytywność w przypadku rzeczywistym. Z reguły równoległoboku dostajemy

$$\|x \pm z + y\|^2 + \|x \pm z - y\|^2 = 2(\|x \pm z\|^2 + \|y\|^2), \quad x, y, z \in \mathcal{H},$$

co po odjęciu stronami daje $S(x+y,z)+S(x-y,z) = 2S(x,z)$. Biorąc $x := \frac{1}{2}(x'+y')$, $y := \frac{1}{2}(x'-y')$ mamy $S(x',z) + S(y',z) = 2S(\frac{1}{2}(x'+y'),z)$, $x',y',z \in \mathcal{H}$. W przypadku $y' = 0$ daje to $S(x',z) = 2S(\frac{x'}{2},z)$, $x',z \in \mathcal{H}$. Ostatecznie, $S(x',z) + S(y',z) = S(x'+y',z)$, $x',y',z \in \mathcal{H}$. ☐

5.11.4. Kategorie Baire'a. Poniżej $(X,\varrho), (Y,d)$ itd. oznaczają przestrzenie metryczne.

Definicja 5.11.27. Zbiory postaci $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, gdzie każdy zbiór $A_n \subset X$ jest nigdziegęsty, nazywamy *zbiorami I kategorii Baire'a*. Zbiory niebędące zbiorami I kategorii Baire'a noszą nazwę *zbiorów II kategorii Baire'a*.

Twierdzenie* 5.11.28 (Twierdzenie Baire'a)**.** *Niech $X \neq \varnothing$ będzie przestrzenią zupełną. Wtedy:*

(a) *Jeżeli $\Omega_n \subset X$ jest zbiorem otwartym i gęstym w X, $n \in \mathbb{N}$, to zbiór $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ jest gęsty w X.*

(b) *Jeżeli $A \subset X$ jest zbiorem I kategorii Baire'a, to $\operatorname{int} A = \varnothing$, w szczególności, $A \subsetneq X$.*

Obserwacja 5.11.29. Powyższe warunki (a), (b) są równoważne.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Niech $A_n := X \setminus \Omega_n$. Wtedy A_n jest domknięty oraz $\operatorname{int} A_n = \varnothing$, $n \in \mathbb{N}$. Wobec (b) mamy $\varnothing = \operatorname{int} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \operatorname{int}(X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n)$.

(a) $\Longrightarrow$ (b): Niech $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, przy czym $\operatorname{int} \overline{A}_n = \varnothing$, $n \in \mathbb{N}$. Niech $\Omega_n := X \setminus \overline{A}_n$. Wtedy Ω_n jest zbiorem otwartym i gęstym w X, $n \in \mathbb{N}$. Wobec (a) mamy $\varnothing = \operatorname{int}(X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n) = \operatorname{int} \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n \supset \operatorname{int} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \operatorname{int} A$.

Definicja 5.11.30. Funkcja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ jest *I klasy Baire'a*, jeżeli istnieje ciąg $(f_s)_{s=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}(X)$ taki, że $f_s \longrightarrow f$ punktowo na X. Powiemy, że funkcja f jest *n–tej klasy Baire'a*, jeżeli istnieje ciąg $(f_s)_{s=1}^{\infty}$ funkcji $(n-1)$–szej klasy Baire'a taki, że $f_s \longrightarrow f$ punktowo na X.

Twierdzenie 5.11.31 (Punkty nieciągłości funkcji I klasy Baire'a)**.** *Niech (X,ϱ) będzie przestrzenią zupełną i niech $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie I-klasy Baire'a. Oznaczmy przez $N(f)$ zbiór punktów nieciągłości f. Wtedy $N(f)$ jest zbiorem I kategorii Baire'a.*

Dowód. Niech $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$, gdzie $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}(X)$. Zdefiniujmy

$$A_{k,\ell} := \{x \in X : \forall_{n\geqslant\ell} : \ |f_n(x) - f_\ell(x)| \leqslant 1/k\}, \quad k, \ell \in \mathbb{N}.$$

Zbiór $A_{k,\ell}$ jest domknięty, zbiór $F_{k,\ell} := A_{k,\ell} \setminus \operatorname{int} A_{k,\ell}$ jest domknięty i nigdziegęsty. Wystarczy więc pokazać, że $N(f) \subset \bigcup_{k,\ell\in\mathbb{N}} F_{k,\ell}$. Ustalmy punkt $x_0 \in N(f)$. Ponieważ $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego,

(23) René Fréchet (1878–1973).
(24) Pascual Jordan (1902 – 1980).
(25) John von Neumann (1903 – 1957).

zatem dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ istnieje $\ell(k)$ takie, że $x_0 \in A_{k,\ell(k)}$. Gdyby $x_0 \in \operatorname{int} A_{k,\ell(k)}$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, wtedy, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, istniałoby $r_k > 0$ takie, że $B(x_0, r_k) \subset A_{k,\ell(k)}$. Oznacza to, że $|f_n(x) - f_{\ell(k)}(x)| \leqslant 1/k$ dla $x \in B(x_0, r_k)$ i $n \geqslant \ell(k)$. W szczególności, $|f(x) - f_{\ell(k)}(x)| \leqslant 1/k$ dla $x \in B(x_0, r_k)$. Dla $x \in B(x_0, r_k)$ mamy więc

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leqslant |f(x) - f_{\ell(k)}(x)| + |f_{\ell(k)}(x) - f_{\ell(k)}(x_0)| + |f_{\ell(k)}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leqslant \tfrac{2}{k} + |f_{\ell(k)}(x) - f_{\ell(k)}(x_0)|,\end{aligned}$$

co, wobec ciągłości $f_{\ell(k)}$, dawałoby ciągłość funkcji f w punkcie x_0. Tak więc $x_0 \in F_{k,\ell(k)}$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. □

Definicja 5.11.32. Funkcję $f : X \times Y \longrightarrow Z$ nazywamy *oddzielnie ciągłą*, jeżeli:
- $f(x, \cdot) \in \mathcal{C}(Y, Z)$ dla dowolnego $x \in X$,
- $f(\cdot, y) \in \mathcal{C}(X, Z)$ dla dowolnego $y \in Y$.

Ćwiczenie 5.11.33. Udowodnić, że funkcja $f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{jeżeli } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{jeżeli } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ jest oddzielnie ciągła, ale nie jest ciągła.

Twierdzenie 5.11.34 (Funkcje oddzielnie ciągłe)**.** *Dla dowolnej oddzielnie ciągłej funkcji $f : \mathbb{R} \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ istnieje ciąg $(f_s)_{s=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R} \times Y)$ taki, że $f_s \longrightarrow f$, tzn. dowolna funkcja oddzielnie ciągła $f : \mathbb{R} \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ jest I klasy Baire'a. W szczególności, zbiór $N(f)$ jest I kategorii Baire'a.*

Dowód.

$$f_n(x,y) := \Big(\frac{\frac{k+1}{n} - x}{\frac{1}{n}}\Big) f(\tfrac{k}{n}, y) + \Big(\frac{x - \frac{k}{n}}{\frac{1}{n}}\Big) f(\tfrac{k+1}{n}, y), \quad \tfrac{k}{n} \leqslant x \leqslant \tfrac{k+1}{n},\ y \in Y,\ k \in \mathbb{Z}$$

(dla dowolnego $y \in Y$, $f_n(\cdot, y)$ jest funkcją afiniczną na każdym przedziale $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$). Jest rzeczą widoczną, że funkcja f_n jest ciągła (bo jest ciągła na każdym „pasie" $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] \times Y$). Ponadto,

$$\begin{aligned}|f_n(x,y) - f(x,y)| &= \Big| \Big(\frac{\frac{k+1}{n} - x}{\frac{1}{n}}\Big)\Big(f(\tfrac{k}{n}, y) - f(x,y)\Big) + \Big(\frac{x - \frac{k}{n}}{\frac{1}{n}}\Big)\Big(f(\tfrac{k+1}{n}, y) - f(x,y)\Big)\Big| \\ &\leqslant \max\{|f(\tfrac{k}{n}, y) - f(x,y)|,\ |f(\tfrac{k+1}{n}, y) - f(x,y)|\}, \quad \tfrac{k}{n} \leqslant x \leqslant \tfrac{k+1}{n},\ y \in Y,\ k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Teraz dla ustalonego punktu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times Y$ oraz $\varepsilon > 0$, dobierzmy $\delta > 0$ takie, że $|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \leqslant \varepsilon$ dla $|x - x_0| \leqslant \delta$. Niech $n \geqslant 1/\delta$ i niech $\frac{k}{n} \leqslant x_0 \leqslant \frac{k+1}{n}$. Wtedy z poprzedniego oszacowania dostajemy $|f_n(x_0, y_0) - f(x_0, y_0)| \leqslant \varepsilon$, co dowodzi, że $f_n \longrightarrow f$ punktowo. □

Pojawia się naturalne pytanie czy dowolna funkcja oddzielnie ciągła $f : \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_k} \longrightarrow \mathbb{R}$ (tzn. $f(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_k) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n_j})$ dla dowolnych $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \dots, x_k \in \mathbb{R}^{n_k}$ i $j \in \{1, \dots, k\}$) jest I klasy Baire'a ? Prawdziwy jest następujący wynik:

Twierdzenie 5.11.35. *Niech $f : \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{\ell \times} \times \mathbb{R}^{n-\ell} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją oddzielnie ciągłą ($\ell \geqslant 2$). Wtedy f jest ℓ–tej klasy Baire'a.*

Okazuje się, że dla $\ell \geqslant 2$ wynik ten nie może być poprawiony, tzn. istnieją przykłady oddzielnie ciągłych funkcji f, które nie są $(\ell - 1)$–szej klasy Baire'a ([26]).

Dowód. Dla dowolnej funkcji $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$, zdefiniujmy ciąg $(g_s)_{s=1}^{\infty}$ tak, jak w Twierdzeniu 5.11.34:

$$g_s(x,y) := \Big(\frac{\frac{k+1}{n} - x}{\frac{1}{n}}\Big) g(\tfrac{k}{n}, y) + \Big(\frac{x - \frac{k}{n}}{\frac{1}{n}}\Big) g(\tfrac{k+1}{n}, y), \quad \tfrac{k}{n} \leqslant x \leqslant \tfrac{k+1}{n},\ y \in \mathbb{R}^{n-1},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Zauważmy, że:

(a) jeżeli funkcja $g(\cdot, y)$ jest ciągła dla dowolnego $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, to $g_s \longrightarrow g$ punktowo,

([26]) Zob. H. Lebesque, *Sur les fonctions représentables analytiquement*, J. math. pures appliqués (1905), 139–215.

(b) jeżeli $\mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r$ $(p, q, r \in \mathbb{N}_0)$, $y = (u, v, w)$, oraz funkcja $g(x, (u, \cdot, w))$ jest ciągła dla dowolnych $(x, u, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r$, to każda z funkcji $g_s(\cdot, (u, \cdot, w))$ jest ciągła dla dowolnych $(u, w) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r$.

Teraz postępujemy następująco:

- Stosujemy powyższą konstrukcję do $g := f$. Wobec (a), do zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że każda z funkcji $f_s^1 := g_s$ jest $(\ell - 1)$–szej klasy Baire'a. Na podstawie (b), wiemy, że każda funkcja $f_s^1(\cdot, x_2, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_\ell, x_{\ell+1})$ jest ciągła dla dowolnych $(x_2, \dots, x_\ell, x_{\ell+1}) \in \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{(\ell-1)\times} \times \mathbb{R}^{n-\ell}$, $j = 2, \dots, \ell + 1$.
- Powtarzamy konstrukcję dla $g := f_s^1$ względem zmiennej x_2. Dostajemy kolejny ciąg aproksymujący $(f_s^2)_{s=1}^\infty$ taki, że każda funkcja $f_s^2(\cdot, \cdot, x_3, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_\ell, x_{\ell+1})$ jest ciągła dla dowolnych $(x_3, \dots, x_\ell, x_{\ell+1}) \in \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{(\ell-2)\times} \times \mathbb{R}^{n-\ell}$, $j = 3, \dots, \ell + 1$.
- Powtarzamy powyższe rozumowanie ℓ razy. $\square$

Część II

Analiza Matematyczna II

ROZDZIAŁ 6

Szeregi

6.1. Szeregi w przestrzeniach Banacha

W tym rozdziale $(E, \| \ \|)$ będzie ustaloną przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $E \neq \{0\}$.

Definicja 6.1.1. Dla $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset E$ definiujemy $S_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}_0$. Parę $((a_n)_{n=0}^{\infty}, (S_n)_{n=0}^{\infty})$ nazywamy *szeregiem*. Zwykle, zamiast powyższej pary, piszemy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. Element a_n nazywamy *n-tym wyrazem szeregu*, zaś S_n nazywamy *n-tą sumą częściową szeregu*. Szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ nazywamy:

- *zbieżnym*, jeżeli $S_n \longrightarrow S \in E$. Element S nazywamy wtedy *sumą szeregu* i oznaczamy przez $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$; szeregi, które nie są zbieżne nazywamy *rozbieżnymi*;
- *bezwzględnie zbieżnym*, jeżeli szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$ jest zbieżny;
- *bezwarunkowo zbieżnym*, dla dowolnej bijekcji $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ jest zbieżny oraz $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$;
- *warunkowo zbieżnym*, jeżeli jest zbieżny, ale nie jest bezwarunkowo zbieżny.

Oczywiście można również rozważać szeregi $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$, gdzie $n_0 \in \mathbb{Z}$.

Obserwacja 6.1.2. (a) Następujące warunki są równoważne:

(i) szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny;

(ii) dla dowolnego $n_0 \in \mathbb{N}_0$ szereg $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny;

(iii) istnieje $n_0 \in \mathbb{N}_0$ takie, że szereg $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

(b) Zob. Przykład 5.6.11:

- $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$, $x \in \mathbb{R}$;
- $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, $x \in \mathbb{R}$;
- $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$, $x \in \mathbb{R}$;
- $\ln(1 + x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$, $|x| < \frac{1}{2}$;
- $(1 + x)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$, $|x| < \frac{1}{2}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

(c) Jeżeli $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$, to następujące warunki są równoważne:

(i) szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny;

(ii) ciąg $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ jest ograniczony;

(iii) pewien podciąg ciągu $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zbieżny;

(iv) pewien podciąg ciągu $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ jest ograniczony.

W przypadku, gdy $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$,

- zamiast pisać, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny będziemy pisać $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$,
- zamiast pisać, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny będziemy pisać $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

(d) Jeżeli szeregi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ są zbieżne, to dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ jest zbieżny oraz $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n + \beta \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.

(e) Pojęcie bezwzględnej zbieżności nie zależy od wyboru norm równoważnych.

(f) Niech $L \in \mathcal{L}(E, F)$ (F jest przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$). Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny do sumy S (odp. bezwzględnie zbieżny, odp. bezwarunkowo zbieżny), to szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} L(a_n)$ jest zbieżny do sumy $L(S)$ (odp. bezwzględnie zbieżny, odp. bezwarunkowo zbieżny).

W konsekwencji, jeżeli $L \in \operatorname{Isom}(E, F)$, to szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny (odp. bezwzględnie zbieżny, odp. bezwarunkowo zbieżny) wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} L(a_n)$ jest zbieżny (odp. bezwzględnie zbieżny, odp. bezwarunkowo zbieżny).

Przykład 6.1.3 (Szereg harmoniczny)**.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Istotnie,

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\Big) + \dots + \Big(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\Big) \geqslant 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + \dots + 2^{n-1}\frac{1}{2^n} = 1 + \frac{n}{2} \longrightarrow +\infty.$$

Ćwiczenie: $S_{10^3} = 7,485$, $S_{10^6} = 14,393$, $S_{10^9} = 21,301$ z dokładnością do $0,001$.

Twierdzenie 6.1.4 (Warunek konieczny zbieżności szeregów)**.** *Jeżeli szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, to* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Dowód. Niech $S := \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. Wtedy $a_n = S_n - S_{n-1} \longrightarrow S - S = 0$. $\square$

Przykład 6.1.5. *Szereg geometryczny* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, gdzie $q \in \mathbb{C}$ ($0^0 := 1$), jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|q| < 1$. Wtedy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, $|q| < 1$. Istotnie, jeżeli $|q| < 1$, to $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \longrightarrow \frac{1}{1-q}$. Gdy $|q| \geqslant 1$, to nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregów.

Twierdzenie 6.1.6 (Warunek Cauchy'ego zbieżności szeregów)**.** *Szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}_0}\ \forall_{m>n\geqslant n_0}:\ \|a_{n+1} + \dots + a_m\| \leqslant \varepsilon.$$

Dowód. Ponieważ $S_m - S_n = a_{n+1} + \dots + a_m$ wystarczy skorzystać z zupełności E. $\square$

Twierdzenie 6.1.7 (Twierdzenie o tasowaniu szeregów bezwzględnie zbieżnych)**.** *Każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest bezwarunkowo zbieżny (w szczególności, jest zbieżny).*

Dowód. Niech $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ będzie dowolną bijekcją i niech $\varepsilon > 0$. Z warunku Cauchy'ego dla szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$ wynika, że istnieje $N_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego zbioru skończonego $I \subset \mathbb{N}_{N_0+1}$ mamy $\sum\limits_{n\in I} \|a_n\| \leqslant \varepsilon$. Niech $N \geqslant N_0$ będzie takie, że $\{0, \dots, N_0\} \subset \{\sigma(0), \dots, \sigma(N)\}$. Wtedy dla dowolnych $m > n \geqslant N$ mamy $\{\sigma(n+1), \dots, \sigma(m)\} \subset \mathbb{N}_{N_0+1}$ a stąd $\sum\limits_{k=n+1}^{m} \|a_{\sigma(k)}\| \leqslant \varepsilon$. W takim razie szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ spełnia warunek Cauchy'ego, a więc jest zbieżny.

Niech $S_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $S_n^\sigma := \sum\limits_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}$. Niech $\varepsilon > 0$ i niech N_0, N będą jak powyżej. Wtedy dla $n \geqslant N$ mamy

$$\|S_n - S_n^\sigma\| \leqslant \sum_{k \in \{N_0+1,\dots,n\}} \|a_k\| + \sum_{k \in \{\sigma(0),\dots,\sigma(n)\} \setminus \{0,\dots,N_0\}} \|a_k\| \leqslant 2\varepsilon. \qquad \square$$

Twierdzenie 6.1.8 (Kryterium porównawcze)**.** (a) *Jeżeli* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$*,* $n \in \mathbb{N}_0$*, oraz* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$*, to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$*.*

(b) *Jeżeli* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$*,* $n \in \mathbb{N}_0$*, oraz* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$*, to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$*.*

(c) *Jeżeli* $a_n, b_n > 0$*,* $n \in \mathbb{N}_0$*, oraz* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ *dla* $n \geqslant N$*, to ze zbieżności szeregu* $(b_n)_{n=0}^\infty$ *wynika zbieżność szeregu* $(a_n)_{n=0}^\infty$ *oraz z rozbieżności szeregu* $(a_n)_{n=0}^\infty$ *wynika rozbieżność szeregu* $(b_n)_{n=0}^\infty$*.*

Dowód. (a) $a_0 + \dots + a_n \leqslant b_0 + \dots + b_n$.

(b) $b_0 + \dots + b_n \geqslant a_0 + \dots + a_n \longrightarrow +\infty$.

(c) Możemy założyć, że $N = 0$. Wtedy $\frac{a_n}{a_0} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_1}{a_0} \leqslant \frac{b_n}{b_0}$. $\square$

Twierdzenie 6.1.9 (Kryterium asymptotyczne)**.** *Niech* $(a_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{R}_+$*,* $(b_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{R}_{>0}$*.*

(a) *Jeżeli* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$ *oraz* $\limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} < +\infty$*, to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$*.*

(b) *Jeżeli* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$ *oraz* $\liminf\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$*, to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$*.*

(c) *Jeżeli* $(a_n)_{n=0}^\infty, (b_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{R}_{>0}$ *oraz* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, +\infty)$*, to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$*.*

Dowód. (a) Wobec Obserwacji 2.4.1(e), wnioskujemy, że istnieje $M > 0$ takie, że $a_n \leqslant M b_n$, $n \gg 1$. Możemy więc skorzystać z kryterium porównawczego.

(b) Wobec Obserwacji 2.4.1(f), wnioskujemy, że istnieje $M > 0$ takie, że $a_n \geqslant M b_n$, $n \gg 1$, i znów możemy skorzystać z kryterium porównawczego.

(c) wynika z (a) i (b). $\square$

Twierdzenie 6.1.10 (Kryterium kondensacyjne)**.** *Jeżeli* $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$*,* $n \in \mathbb{N}_0$*, to*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} < +\infty.$$

Dowód. Niech $S_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $S_n' := \sum\limits_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$. Wtedy

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}S_n' = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + \dots + 2^n a_{2^n}) = a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^{n-1} a_{2^n} \\
&\leqslant a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \dots + (a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n}) = S_{2^n} - a_0 \\
&= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots + (a_{2^{n-1}} + a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n - 1}) + a_{2^n} \\
&\leqslant a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^{n-1} a_{2^{n-1}} + 2^n a_{2^n} = S_n'.
\end{aligned} \qquad \square$$

Ćwiczenie 6.1.11. Udowodnić, że dla dowolnego $p \in \mathbb{N}_2$, jeżeli $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, to

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} p^n a_{p^n} < +\infty.$$

Przykład 6.1.12 (Szereg harmoniczny rzędu α)**.** Dla $\alpha \in \mathbb{R}$ mamy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 1$.

Rzeczywiście, jeżeli $\alpha \leqslant 1$, to $\frac{1}{n^\alpha} \geqslant \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Jeżeli $\alpha > 1$, to stosujemy kryterium kondensacyjne $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n$.

Ćwiczenie 6.1.13. Dla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$.

Obserwacja 6.1.14. Korzystając z Przykładu 5.6.11(d), wiemy się, że dla dowolnego $h > -1$ istnieje $\theta = \theta(h) \in (0,1)$ taka, że $\ln(1+h) = h - \frac{1}{2}\frac{h^2}{(1+\theta h)^2}$. Wynika stąd, że $0 < h - \ln(1+h) < \frac{1}{2}h^2$, $h > 0$. W szczególności,

$$0 < \frac{1}{n} - \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) < \frac{1}{2n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zatem szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)\Big)$$

jest zbieżny. Zauważmy, że

$$\sum_{n=1}^{N} \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) = \ln\Big(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{N+1}{N}\Big) = \ln(N+1).$$

W szczególności, ciąg

$$\Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\Big) - \ln N = \sum_{n=1}^{N} \Big(\frac{1}{n} - \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)\Big) + \ln\frac{N+1}{N}$$

jest zbieżny do granicy skończonej zwanej stałą Eulera (1) $\gamma \simeq 0,5772$.

Twierdzenie 6.1.15 (Kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregów)**.** *Niech* $\alpha := \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} \in [0, \infty]$. *Wtedy:*

(a) *Jeżeli* $\alpha < 1$, *to* $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| < +\infty$.

(b) *Jeżeli* $\alpha > 1$, *to szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny (nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregów).*

(c) *Jeżeli* $\alpha = 1$, *to nic nie wiadomo.*

Dowód. (a) Niech $q \in (\alpha, 1)$. Na podstawie Obserwacji 2.4.1(e) mamy $\sqrt[n]{\|a_n\|} \leqslant q$ dla $n \geqslant N$, czyli $\|a_n\| \leqslant q^n$, $n \geqslant N$, i stosujemy kryterium porównawcze.

(b) Niech $q \in (1, \alpha)$. Istnieje podciąg $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ taki, że $\sqrt[n_k]{\|a_{n_k}\|} \geqslant q$, $k \in \mathbb{N}_0$, a zatem $\|a_{n_k}\| \geqslant q^{n_k} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Nie jest więc spełniony warunek konieczny zbieżności szeregów.

(c) $a_n := \frac{1}{n}$, $a_n := \frac{1}{n^2}$. ☐

Twierdzenie 6.1.16 (Kryterium d'Alemberta (2) zbieżności szeregów)**.** *Niech* $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset E_*$.

(a) *Jeżeli* $\limsup_{n \to +\infty} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} < 1$, *to* $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| < +\infty$.

(b) *Jeżeli* $\frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} \geqslant 1$ *dla* $n \geqslant n_0$, *to szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny (nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregów).*

(c) *Jeżeli* $\lim_{n \to +\infty} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} > 1$, *to szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny (nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregów).*

Dowód. (a) Wystarczy zastosować Twierdzenie 2.4.2 i kryterium Cauchy'ego.

(b) $\|a_m\| \geqslant \|a_{n_0}\| > 0$ dla $m \geqslant n_0$.

(c) wynika z (b). ☐

Przykład 6.1.17. Dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ jest zbieżny.

(1) Leonhard Euler (1707–1783).
(2) Jean d'Alembert (1717–1783).

Definicja 6.1.18. Definiujemy *funkcję eksponens* $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$e^z = \exp z = \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Funkcja ta jest rozszerzeniem na całe $\mathbb{C}$ znanej nam funkcji $\mathbb{R} \ni x \longmapsto e^x$, co uzasadnia użycie symbolu e^z.

Funkcja exp zostanie szczegółowo omówiona w § 6.7.

Obserwacja 6.1.19. (a) W Twierdzeniu 6.1.16(c) nie można zastąpić $\lim\limits_{n\to+\infty}$ przez $\limsup\limits_{n\to+\infty}$. Dla przykładu, niech $a_n := \frac{2+(-1)^n}{2^n}$. Wtedy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$, ale $\limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{2} > 1$.

(b) Kryterium Cauchy'ego jest istotnie mocniejsze niż kryterium d'Alemberta. Np. w powyższym przykładzie mamy $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1$.

Oprócz poznanych dotychczas kryteriów zbieżności szeregów jest bardzo wiele innych użytecznych kryteriów. Na przykład:

Twierdzenie 6.1.20. *Niech* $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_{>0}$.

(a) *(Kryterium Kummera* (3) *) Niech* $(b_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_{>0}$ *i* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b_n} = +\infty$. *Połóżmy* $K_n := b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}$.

Jeżeli $K_n \geqslant c > 0$ *dla* $n \geqslant N$, *to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$.

Jeżeli $K_n \leqslant 0$ *dla* $n \geqslant N$, *to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

(b) *(Kryterium Raabego* (4) *) Niech* $R_n := n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$.

Jeżeli $R_n \geqslant c > 1$ *dla* $n \geqslant N$, *to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$.

Jeżeli $R_n \leqslant 1$ *dla* $n \geqslant N$, *to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

(c) *(Kryterium Bertranda* (5) *) Niech* $B_n := (\ln n)\big(n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1\big)$.

Jeżeli $B_n \geqslant c > 1$ *dla* $n \geqslant N$, *to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$.

Jeżeli $B_n \leqslant c < 1$ *dla* $n \geqslant N$, *to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

(d) *(Kryterium Gaussa* (6) *). Przypuśćmy, że* $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, *gdzie* $\lambda, \mu > 0$, *a ciąg* $(\theta_n)_{n=0}^{\infty}$ *jest ograniczony.*

Jeżeli $\lambda > 1$ *lub* ($\lambda = 1$ *i* $\mu > 1$), *to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$.

Jeżeli $\lambda < 1$ *lub* ($\lambda = 1$ *i* $\mu \leqslant 1$), *to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

Zauważmy, że dla $b_n := 1$, $n \in \mathbb{N}_0$, kryterium Kummera redukuje się do kryterium d'Alemberta.

Dowód. (a) Możemy założyć, że $N = 0$. W pierwszym przypadku mamy: $c(a_1 + \dots + a_{n+1}) \leqslant a_0 b_0 - a_1 b_1 + \dots + a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} = a_0 b_0 - a_{n+1} b_{n+1} < a_0 b_0$, a stąd $\sum\limits_{=1}^{\infty} a_k \leqslant \frac{1}{c} a_0 b_0 < +\infty$.

W drugim przypadku mamy: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{\frac{1}{b_{n+1}}}{\frac{1}{b_n}}$ i korzystamy z Twierdzenia 6.1.8(c).

(b) Stosujemy kryterium Kummera dla $b_n := n$.

---

(3) Ernst Eduard Kummer (1810–1893).
(4) Joseph Ludwig Raabe (1801–1859).
(5) Joseph Louis François Bertrand (1822–1900).
(6) Carl Friedrich Gauss (1777–1855).

(c) Zastosujemy kryterium Kummera dla $b_n := n\ln n$. Mamy $n\ln n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)-(n+1)\ln(n+1) = (\ln n)\big(n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)-1\big)-\ln(1+\frac{1}{n})^{n+1} = B_n - \ln(1+\frac{1}{n})^{n+1} \approx B_n - 1$.

(d) Mamy $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{\lambda}$, a stąd przypadki, gdy $\lambda\neq 1$ wynikają z kryterium d'Alemberta. Dalej zakładamy, że $\lambda=1$. Mamy $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\mu$, a stąd przypadki, gdy $\mu\neq 1$ wynikają z kryterium Raabego. Dalej zakładamy, że $\lambda=\mu=1$. Zastosujemy kryterium Bertranda. Mamy $B_n=\frac{\ln n}{n}\theta_n \longrightarrow 0$. □

Przykład 6.1.21. (a) Korzystając z kryterium Raabego pokażemy, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\big(\frac{n}{e}\big)^n=+\infty$. Zauważmy, że $\frac{n}{e\sqrt[n]{n!}} \longrightarrow 1$ (Przykład 2.4.3(b)) więc kryterium Cauchy'ego nie rozstrzyga. Udowodnimy, że $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\lim\limits_{n\to+\infty} n\big(\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}-1\big)=\frac{1}{2}$. Istotnie,

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\Big(\frac{e}{(1+x)^{1/x}}-1\Big) \overset{H(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 0+}\Big(\frac{e}{(1+x)^{1/x}}-1\Big)' = \lim_{x\to 0+}\Big(e^{1-\frac{1}{x}\ln(1+x)}-1\Big)'$$
$$= \lim_{x\to 0+}\frac{e}{(1+x)^{1/x}}\Big(\frac{1}{x^2}\ln(1+x)-\frac{1}{x(1+x)}\Big)$$
$$\overset{\text{Peano}}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{e}{(1+x)^{1/x}}\frac{(x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))-(x-x^2+o(x^2))}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

(b) Korzystając z kryterium Gaussa pokażemy, że szereg

$$1+\Big(\frac{1}{2}\Big)^p+\Big(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\Big)^p+\dots+\Big(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)\cdot(2n)}\Big)^p+\dots = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\Big)^p$$

jest zbieżny dla $p>2$ i rozbieżny dla $0<p\leqslant 2$. Istotnie,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\Big(\frac{2n}{2n-1}\Big)^p=\Big(1-\frac{1}{2n}\Big)^{-p}\overset{\text{Peano}}{=}1+\frac{p}{2n}+\frac{p(p+1)}{2}\frac{1}{(2n)^2}+o\Big(\frac{1}{(2n)^2}\Big)=1+\frac{\frac{p}{2}}{n}+\frac{\theta_n}{n^2},$$

gdzie ciąg $(\theta_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony.

Zauważmy, że $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\big(\frac{2n+1}{2n+2}\big)^p\longrightarrow 1$, a więc kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga.

Twierdzenie 6.1.22 (Twierdzenie Riemanna o tasowaniu szeregu warunkowo zbieżnego)**.** *Jeżeli szereg rzeczywisty* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ *jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny, to dla dowolnych* $-\infty\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant+\infty$ *istnieje bijekcja* $\sigma:\mathbb{N}_0\longrightarrow\mathbb{N}_0$ *taka, że jeżeli* $S_n':=\sum\limits_{k=0}^{n}a_{\sigma(k)}$, *to* $\liminf\limits_{n\to+\infty}S_n'=\alpha$ *i* $\limsup\limits_{n\to+\infty}S_n'=\beta$.

Oznacza to, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ *jest warunkowo zbieżny, a nawet więcej, dla dowolnego* $x\in\overline{\mathbb{R}}$ *istnieje bijekcja* $\sigma:\mathbb{N}_0\longrightarrow\mathbb{N}_0$ *taka, że* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{\sigma(k)}=x$.

Dowód. Można założyć, że $a_n\neq 0$, $n\in\mathbb{N}_0$ (Ćwiczenie). Ustalmy α,β oraz ciągi $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$, $(\beta_n)_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ takie, że $\alpha_n\longrightarrow\alpha$, $\beta_n\longrightarrow\beta$, $\beta_0>0$ oraz $\alpha_n<\beta_n$, $n\in\mathbb{N}_0$.

Niech $a_n^+:=\max\{a_n,0\}$, $a_n^-:=\max\{-a_n,0\}$. Oczywiście, $|a_n|=a_n^++a_n^-$, $a_n=a_n^+-a_n^-$. Gdyby $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^+<+\infty$ (odp. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^-<+\infty$), to wtedy $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^-<+\infty$ (odp. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^+<+\infty$), co daje $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|<+\infty$ — sprzeczność. Wynika stąd, że $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^+=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^-=+\infty$.

Niech $A:=\{n\in\mathbb{N}_0: a_n>0\}=\{k_0,k_1,\dots\}$, gdzie $k_0<k_1<\dots$, i analogicznie $B:=\{n\in\mathbb{N}_0: a_n<0\}=\{\ell_0,\ell_1,\dots\}$, gdzie $\ell_0<\ell_1<\dots$. Oczywiście $A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=\mathbb{N}_0$. Szereg $\sum\limits_{s=0}^{\infty}a_{k_s}$ (odp. $\sum\limits_{s=0}^{\infty}(-a_{\ell_s})$) różni się od szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^+$ (odp. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^-$) tylko wyrazami zerowymi, więc jest również rozbieżny.

Rozpoczynamy konstrukcję bijekcji σ:

Krok 0: Niech $p_0 \in \mathbb{N}_0$ będzie najmniejszą liczbą taką, że $T_0 := a_{k_0} + \dots + a_{k_{p_0}} > \beta_0$ i niech $q_0 \in \mathbb{N}_0$ będzie najmniejszą liczbą taką, że $U_0 := T_0 + a_{\ell_0} + \dots + a_{\ell_{q_0}} < \alpha_0$.

Krok 1: Niech $p_1 > p_0$ będzie najmniejszą liczbą taką, że $T_1 := U_0 + a_{k_{p_0+1}} + \dots + a_{k_{p_1}} > \beta_1$ i niech $q_1 > q_0$ będzie najmniejszą liczbą taką, że $U_1 := T_1 + a_{\ell_{q_0+1}} + \dots + a_{\ell_{q_1}} < \alpha_1$.

Rozbieżność szeregów gwarantuje to, że procedura może być dowolnie kontynuowana.

Teraz definiujemy

$$(\sigma(0), \sigma(1), \dots) := (k_0, \dots, k_{p_0}, \ell_0, \dots, \ell_{q_0}, k_{p_0+1}, \dots, k_{p_1}, \ell_{q_0+1}, \dots, \ell_{q_1}, \dots).$$

Zauważmy, że $0 < T_s - \beta_s \leqslant a_{k_{p_s}}$ oraz $a_{\ell_{q_s}} \leqslant U_s - \alpha_s < 0$. Wynika stąd, że $T_s \longrightarrow \beta$, $U_s \longrightarrow \alpha$. W szczególności, $\limsup\limits_{n\to+\infty} S'_n \geqslant \limsup\limits_{s\to+\infty} T_s = \beta$ oraz $\liminf\limits_{n\to+\infty} S'_n \leqslant \liminf\limits_{s\to+\infty} U_s = \alpha$.

Na koniec wystarczy jeszcze zauważyć, że sumy pośrednie przy przechodzeniu od U_{s-1} do T_s leżą pomiędzy U_{s-1} i T_s, zaś sumy pośrednie przy przechodzeniu od T_s do U_s leżą pomiędzy U_s i T_s. $\square$

Wniosek 6.1.23. *Jeżeli* $1 \leqslant d := \dim_{\mathbb{R}} E < +\infty$, *to szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest bezwarunkowo zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest bezwzględnie zbieżny. W szczególności, szereg liczb zespolonych jest bezwarunkowo zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest bezwzględnie zbieżny.*

Dowód. Implikacja ($\Longleftarrow$) wynika z Twierdzenia 6.1.7. Implikacja ($\Longrightarrow$) dla szeregów rzeczywistych ($d = 1$) wynika z Twierdzenia 6.1.20. Z Twierdzenia 5.11.11 wynika, że dowód sprowadza się do przypadku $E = \mathbb{R}^d$. Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_{n,1}, \dots, a_{n,d})$ jest bezwarunkowo zbieżny, to szeregi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n,j}$, $j = 1, \dots, d$, są bezwarunkowo zbieżne, a stąd $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|a_n\|_1 \leqslant \sum\limits_{j=1}^{d} \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_{n,j}| < +\infty$. $\square$

Twierdzenie* 6.1.24 (Lévy-Steinitz (7)(8)). *Niech* $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^d$ *będzie ciągiem takim, że* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. *Zdefiniujmy:*

$$\mathfrak{X}(\boldsymbol{a}) := \Big\{x \in \mathbb{R}^d : \exists_{\sigma:\mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0} : \sigma \textit{ jest bijekcją, szereg } \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} \textit{ jest zbieżny oraz } x = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}\Big\}.$$

Jeśli $\mathfrak{X}(\boldsymbol{a}) \neq \varnothing$, *to* $\mathfrak{X}(\boldsymbol{a})$ *jest rzeczywistą podprzestrzenią afiniczną* $\mathbb{R}^d$.

Zauważmy, że zbiór $\mathfrak{X}(\boldsymbol{a})$ jest punktem wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest bezwarunkowo (a więc bezwzględnie) zbieżny.

Prawdziwe jest następujące ogólne twierdzenie.

Twierdzenie* 6.1.25. (9) *Niech E będzie przestrzenią Banacha. Wówczas E jest skończenie wymiarowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu* $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset E$, *jeżeli szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest bezwarunkowo zbieżny, to jest bezwzględnie zbieżny.*

W szczególności, jeżeli $\dim E = \infty$, *to istnieje szereg bezwarunkowo zbieżny, który nie jest bezwzględnie zbieżny.*

6.2. Iloczyny szeregów

Twierdzenie 6.2.1. *Niech* $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty} \subset E$, $B_n := \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$, $n \in \mathbb{N}_0$. *Wtedy:*

(a) *(Kryterium Dirichleta) Jeżeli ciąg* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *jest monotoniczny,* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ *oraz ciąg* $(B_n)_{n=0}^{\infty}$ *jest ograniczony, to szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ *jest zbieżny.*

---

(7) Paul Pierre Lévy (1886–1971).

(8) Ernst Steinitz (1871–1928).

(9) Zob. A. Dvoretzky, C.A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in linear normed spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 36 (1950), 192—197.

(b) *(Kryterium Abela* [10]*) Jeżeli ciąg* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *jest monotoniczny i ograniczony oraz szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *jest zbieżny, to szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ *jest zbieżny.*

(c) *(Kryterium Leibniza) Jeżeli ciąg* $(b_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_{>0}$ *jest malejący, to szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

Dowód. (a) Niech $\|B_n\| \leqslant M$, $n \in \mathbb{N}_0$. Zdefiniujmy dodatkowo $B_{-1} := 0 \in E$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{m} a_n b_n &= \sum_{n=0}^{m} a_n (B_n - B_{n-1}) = \sum_{n=0}^{m} a_n B_n - \sum_{n=0}^{m} a_n B_{n-1}\\ &= \sum_{n=0}^{m} a_n B_n - \sum_{n=0}^{m-1} a_{n+1} B_n = \Big(\sum_{n=0}^{m-1} (a_n - a_{n+1}) B_n\Big) + a_m B_m. \qquad (*)\end{aligned}$$

Powyższe przekształcenie nosi nazwę *transformacji Abela*. Ponieważ $a_m B_m \longrightarrow 0$, wystarczy pokazać, że $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|(a_n - a_{n+1}) B_n\| < +\infty$. Istotnie, wobec monotoniczności ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ mamy

$$\sum_{n=0}^{m} |a_n - a_{n+1}| \|B_n\| \leqslant M |a_0 - a_{m+1}|, \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

a ciąg $(M|a_0 - a_{m+1}|)_{m=0}^{\infty}$ jest oczywiście ograniczony.

(b) Ciągi $(a_m)_{m=0}^{\infty}$ i $(B_m)_{m=0}^{\infty}$ mają granice, $a_m \longrightarrow a$, $B_m \longrightarrow B$. Stąd $a_m B_m \longrightarrow aB$. Teraz korzystamy z (*) i rozumujemy jak w (a).

(c) Wynika z (a) i warunku koniecznego zbieżności szeregów. □

Przykład 6.2.2. (a) Na mocy kryterium Dirichleta szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ jest zbieżny dla $|z| \leqslant 1$, $z \neq 1$.

Istotnie, dla $|z| < 1$ mamy $|\frac{z^n}{n}| \leqslant |z|^n$, a ostatni szereg to zbieżny szereg geometryczny. Dla $z \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$ mamy $|\sum\limits_{k=1}^{n} z^k| = |z \frac{1-z^n}{1-z}| \leqslant \frac{2}{|1-z|}$.

(b) Na mocy kryterium Leibniza, dla dowolnego $\alpha > 0$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ jest zbieżny.

(c) Dla dowolnego $\alpha \in (0,1]$ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ jest warunkowo zbieżny.

Definicja 6.2.3 (Iloczyn Cauchy'ego szeregów)**.** Niech $\Phi \in \mathcal{L}(E, F; G)$ i niech $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset E$, $(b_n)_{n=0}^{\infty} \subset F$, $c_n := \sum\limits_{k=0}^{n} \Phi(a_k, b_{n-k})$, $n \in \mathbb{N}_0$. Szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ nazywamy *iloczynem Cauchy'ego szeregów* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *i* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *względem odwzorowania* Φ. W przypadku, gdy $\Phi : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$, $(\alpha, x) \longmapsto \alpha x$ mówimy po prostu o iloczynie Cauchy'ego szeregów.

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

$$A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n := \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad C_n := \sum_{k=0}^{n} c_k, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$A := \lim_{n\to+\infty} A_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad B := \lim_{n\to+\infty} B_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \quad C := \lim_{n\to+\infty} C_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

oczywiście przy założeniu, że odpowiednie szeregi są zbieżne.

Twierdzenie 6.2.4 (Twierdzenie Mertensa [11])**.** (a) *Jeżeli* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|a_n\| < +\infty$ *oraz szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *jest zbieżny, to szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ *jest zbieżny oraz* $C = \Phi(A, B)$.

[10] Niels Abel (1802–1829).

(b) *Jeżeli* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|a_n\|<+\infty$ *oraz* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|b_n\|<+\infty$*, to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|c_n\|<+\infty$.

Dowód. (a) Zauważmy, że zawsze możemy założyć, że $\|\Phi\|\leqslant 1$ (Ćwiczenie). Niech $M>0$ będzie takie, że $\|B_n\|\leqslant M$, $\|a_0\|+\dots+\|a_n\|\leqslant M$, $n\in\mathbb{N}_0$. Ustalmy $\varepsilon>0$. Niech $n_0\in\mathbb{N}_0$ będzie takie, że $\sum\limits_{k=n_0+1}^{n}\|a_k\|\leqslant\frac{\varepsilon}{8M}$ dla $n\geqslant n_0+1$. Niech dalej $n_1>n_0$ będzie takie, że $\|B_{n-n_0}-B\|\leqslant\frac{\varepsilon}{4M}$ oraz $\|A_n-A\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2M}$ dla $n\geqslant n_1$. Teraz dla $n\geqslant n_1$ mamy $\|C_n-\Phi(A,B)\|\leqslant\|C_n-\Phi(A_n,B)\|+\|A_n-A\|\|B\|\leqslant\|C_n-\Phi(A_n,B)\|+\frac{\varepsilon}{2}$. Pozostaje oszacować pierwszy składnik. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}C_n&=\Phi(a_0,b_0)+\Phi(a_0,b_1)+\Phi(a_1,b_0)+\dots+\Phi(a_0,b_n)+\dots+\Phi(a_n,b_0)\\&=\Phi(a_0,b_0+\dots+b_n)+\Phi(a_1,b_0+\dots+b_{n-1})+\dots+\Phi(a_{n-1},b_0+b_1)+\Phi(a_n,b_0)=\sum_{k=0}^{n}\Phi(a_k,B_{n-k}).\end{aligned}$$

Stąd dla $n\geqslant n_1$ dostajemy:

$$\begin{aligned}\|C_n-\Phi(A_n,B)\|&=\Big\|\sum_{k=0}^{n}\Phi(a_k,B_{n-k}-B)\Big\|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\|a_k\|\|B_{n-k}-B\|\\&=\sum_{k=0}^{n_0}\|a_k\|\|B_{n-k}-B\|+\sum_{k=n_0+1}^{n}\|a_k\|\|B_{n-k}-B\|\\&\leqslant\sum_{k=0}^{n_0}\|a_k\|\|B_{n+n_0-k-n_0}-B\|+\sum_{k=n_0+1}^{n}\|a_k\|2M\leqslant\sum_{k=0}^{n_0}\|a_k\|\frac{\varepsilon}{4M}+\frac{\varepsilon}{4}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

(b) Na podstawie (a) szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\|a_k\|\|b_{n-k}\|$ jest zbieżny. Ponadto,

$$\sum_{n=0}^{m}\|c_n\|\leqslant\|\Phi\|\sum_{n=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\|a_k\|\|b_{n-k}\|.$$ □

Przykład 6.2.5. Jeżeli oba szeregi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$ są tylko zbieżne, to szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$ nie musi być zbieżny.

Dla przykładu: $a_0=b_0:=0$, $a_n=b_n:=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n\in\mathbb{N}$. Szeregi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$ są zbieżne na podstawie kryterium Leibniza i nie są bezwzględnie zbieżne (Przykład 6.1.12). Mamy $|c_n|=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}>\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$.

Obserwacja 6.2.6. (a) $\exp(a+b)=\exp(a)\exp(b)$ dla dowolnych $a,b\in\mathbb{C}$.

Istotnie, korzystamy z iloczynu Cauchy'ego szeregów. Mamy

$$\exp(a)\exp(b)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\frac{b^{n-k}}{(n-k)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}=\sum_{n=0}\frac{1}{n!}(a+b)^n=\exp(a+b).$$

(b) $\exp(0)=1$, $\exp z\neq 0$, $\exp(-z)=\frac{1}{\exp z}$, $z\in\mathbb{C}$.

Przykład 6.2.7. W przypadku p-szeregów liczb zespolonych $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{j,n}$, $j=1,\dots,p$, ich iloczyn Cauchy'ego $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$ ma postać

$$c_n=\sum_{\substack{s_1,\dots,s_p\in\mathbb{N}_0\\ s_1+\dots+s_p=n}}a_{1,s_1}\cdots a_{p,s_p},\quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Na podstawie Twierdzenia 6.2.4, jeżeli $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_{j,n}|<+\infty$, $j=1,\dots,p$, to $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|<+\infty$ oraz $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n=\prod_{j=1}^{p}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{j,n}$. W szczególności, jeżeli $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|<+\infty$, to $\big(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\big)^p=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{\substack{s_1,\dots,s_p\in\mathbb{N}_0\\ s_1+\dots+s_p=n}}a_{s_1}\cdots a_{s_p}$, przy czym ostatni szereg jest zbieżny bezwzględnie.

6.3. Iloczyny nieskończone

Oprócz szeregów liczb zespolonych rozważane są również nieskończone iloczyny liczb zespolonych.

Definicja 6.3.1. Niech $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Powiemy, że *iloczyn nieskończony* $\prod\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jeżeli dla pewnego $p \in \mathbb{N}_0$ ciąg iloczynów częściowych $I_k := \prod\limits_{n=p}^{k} a_n$, $k \in \mathbb{N}_p$, jest zbieżny do granicy skończonej i różnej od zera. W szczególności, musi być $a_n \neq 0$, $n \geqslant p$. Oczywiście, badając zbieżność iloczynu nieskończonego, zawsze możemy przyjąć, że $p = 0$. Pełny sens definicji ujawni się, gdy będziemy badać iloczyny funkcyjne $x \longmapsto \prod\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ (zob. Twierdzenie 6.4.13).

Zgodnie z tradycją wyrazy iloczynu nieskończonego zapisujemy w postaci $a_n = 1 + c_n$. Mówimy, że iloczyn nieskończony $\mathcal{I} : \prod\limits_{n=0}^{\infty}(1 + c_n)$ jest *bezwzględnie zbieżny*, jeżeli iloczyn $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1 + |c_n|)$ jest zbieżny. Iloczyn $\mathcal{I}$ nazywamy *bezwarunkowo zbieżnym*, jeżeli dla dowolnej bijekcji $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$, iloczyn nieskończony $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1 + c_{\sigma(n)})$ jest zbieżny i jego wartość nie zależy od σ. Iloczyn zbieżny, który nie jest bezwarunkowo zbieżny nazywamy *zbieżnym warunkowo*.

Przykład 6.3.2. (a) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2}$.

Istotnie, $I_k = \prod\limits_{n=2}^{k}(1 - \frac{1}{n^2}) = \prod\limits_{n=2}^{k} \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1\cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2\cdot 4}{3^2} \cdots \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{k+1}{2k} \longrightarrow \frac{1}{2}$.

(b) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{1}{n})$ jest rozbieżny. Istotnie, $I_k = \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{1}{n}) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{k+1}{k} = k + 1 \longrightarrow +\infty$.

(c) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1 - \frac{1}{n})$ jest rozbieżny. Istotnie, $I_k = \prod\limits_{n=2}^{\infty}(1 - \frac{1}{n}) = \prod\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{k-1}{k} = \frac{1}{k} \longrightarrow 0$.

Obserwacja 6.3.3 (Warunek konieczny zbieżności iloczynu nieskończonego)**.** Jeżeli iloczyn $\mathcal{I}$ jest zbieżny, to $c_n \longrightarrow 0$. Istotnie, $1 + c_n = \frac{I_n}{I_{n-1}} \longrightarrow 1$.

Twierdzenie 6.3.4 (Warunek konieczny i dostateczny zbieżności iloczynu nieskończonego)**.** *Iloczyn $\mathcal{I}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy* $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geqslant N}\ \forall_{k\in\mathbb{N}} : |(1 + c_{n+1}) \cdots (1 + c_{n+k}) - 1| \leqslant \varepsilon$. (*)

Dowód. Jeżeli iloczyn jest zbieżny, to ciąg $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Ponieważ $I_k \longrightarrow I \neq 0$, możemy założyć, że $|I_k| \geqslant c > 0$ dla $k \geqslant N_0$ przy pewnym $c > 0$. Dobierzmy teraz $N \geqslant N_0$ takie, że $|I_{n+k} - I_k| \leqslant c\varepsilon$ dla $n \geqslant N$ i $k \in \mathbb{N}$. Wtedy $|(1 + c_{n+1}) \cdots (1 + c_{n+k}) - 1| = \frac{|I_{n+k}-I_k|}{|I_k|} \leqslant \frac{c\varepsilon}{c} = \varepsilon$.

Jeżeli warunek (*) zachodzi, to biorąc $\varepsilon = \frac{1}{2}$ dostajemy $\frac{1}{2} \leqslant |(1 + c_{n+1}) \cdots (1 + c_{n+k})| \leqslant \frac{3}{2}$, $n \geqslant N$, $k \in \mathbb{N}$. W szczególności, $\frac{1}{2} \leqslant |\frac{I_k}{I_{k_0}}| \leqslant \frac{3}{2}$ dla $k > k_0 = N$.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Na postawie (*) mamy $|\frac{I_{n+k}}{I_n} - 1| = |(1 + a_{n+1}) \cdots (1 + c_{n+k}) - 1| \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon\frac{1}{|I_{k_0}|}$ dla $n \geqslant N > k_0$ i $k \in \mathbb{N}$. Wynika stąd, że $|I_{n+k} - I_n| \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon\frac{|I_n|}{|I_{k_0}|} \leqslant \varepsilon$ dla $n \geqslant N$ i $k \in \mathbb{N}$. Oznacza to, że ciąg $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Jest więc zbieżny do pewnej granicy skończonej I. Pozostaje pokazać, że $I \neq 0$, co wynika z oszacowania $\frac{1}{2} \leqslant |\frac{I_k}{I_{k_0}}|$ dla $k > k_0$. $\square$

Twierdzenie 6.3.5. *Jeżeli iloczyn* $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1 + c_n)$ *jest bezwzględnie zbieżny, to jest zbieżny.*

Dowód. Skorzystamy z Twierdzenia 6.3.4. Wystarczy zauważyć (Ćwiczenie), że

$$|(1 + c_{n+1}) \cdots (1 + c_{n+k}) - 1| \leqslant \big((1 + |c_{n+1}|) \cdots (1 + |c_{n+k}|) - 1\big). \qquad \square$$

Twierdzenie 6.3.6. *Niech $(c_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$, $\tau \in \{-1, 1\}$. Wtedy iloczyn $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1 + \tau c_n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$. W szczególności, dla dowolnego ciągu $(c_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, iloczyn $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1 + c_n)$ jest bezwzględnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| < +\infty$.*

Dowód. W przypadku $\tau = 1$ niech $S_k := \sum_{n=0}^{\infty} c_n$. Zauważmy, że ciąg $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ jest rosnący. Mamy $S_k \leqslant I_k$, co daje implikację ($\Longrightarrow$). W drugą stronę mamy $1 + x \leqslant e^x$, $x \geqslant 0$, a stąd $I_k \leqslant e^{S_k}$.

W przypadku, gdy $\tau = -1$ możemy założyć, $c_n < 1$, $n \in \mathbb{N}_0$. Mamy $1 - c_n = \frac{1}{1+\frac{c_n}{1-c_n}}$. Pozostaje udowodnić, że $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{1-c_n} < +\infty$ (Ćwiczenie). □

Twierdzenie 6.3.7. (a) *Jeżeli iloczyn $\mathfrak{I}$ jest bezwzględnie zbieżny, to jest bezwarunkowo zbieżny.*

(b) *Niech $(z_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $z_n \longrightarrow 0$. Wtedy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn $\prod_{n=0}^{\infty} e^{z_n}$ jest zbieżny.*

(c) *Niech $(c_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $c_n \longrightarrow 0$. Wtedy iloczyn $\mathfrak{I}$ jest bezwzględnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest bezwarunkowo zbieżny.*

Dowód. (a) Niech $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ będzie dowolną bijekcją. Na podstawie Twierdzenia 6.3.6 i twierdzenia o tasowaniu szeregów, iloczyn $\prod_{n=0}^{\infty}(1 + c_{\sigma(n)})$ jest bezwzględnie zbieżny. Pozostaje wykazać równość wartości. Niech $I'_k := \prod_{n=0}^{k}(1 + c_{\sigma(n)}) \longrightarrow I'$. Chcemy pokazać, że $\frac{I_k}{I'_k} \longrightarrow 1$. Skracając podobne czynniki mamy $\frac{I_k}{I'_k} = \frac{\prod_{n\in A_k}(1+c_n)}{\prod_{n\in A'_k}(1+c_n)} =: \frac{J_k}{J'_k}$, gdzie $A_k \subset \{0, \dots, k\}$ i $A'_k \subset \{\sigma(0), \dots, \sigma(k)\}$. Pokażemy, że $J_k \longrightarrow 1$ i $J'_k \longrightarrow 1$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Na podstawie Twierdzenia 6.3.4 istnieje $N_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $|\big(\prod_{n\in A}(1 + c_n)\big) - 1| \leqslant \big(\prod_{n\in A}(1 + |c_n|)\big) - 1 \leqslant \varepsilon$ dla dowolnego zbioru skończonego $A \subset \mathbb{N}_{N_0}$. Dobierzmy $N \geqslant N_0$ takie, że $\{0, \dots, N_0\} \subset \{\sigma(0), \dots, \sigma(N)\}$. Wtedy dla $k > N$ mamy $A_k \subset \{N_0 + 1, \dots, k\}$, $A'_k \subset \{\sigma(0), \dots, \sigma(k)\} \setminus \{0, \dots, N_0\}$. Wynika stąd, że $|J_k - 1| \leqslant \varepsilon$ oraz $|J'_k - 1| \leqslant \varepsilon$ dla $k > N$.

(b) Niech $S_n := \sum_{k=0}^{n} z_k$, $I_n := \prod_{k=0}^{n} e^{z_k}$, $S := \sum_{n=0}^{\infty} z_n$, $I := \prod_{n=0}^{\infty} e^{z_n}$, o ile szereg (odp. iloczyn) jest zbieżny. Mamy $e^{S_n} = I_n$, skąd natychmiast wynika, że jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ jest zbieżny, to iloczyn $\prod_{n=0}^{\infty} e^{z_n}$ jest zbieżny.

Załóżmy, że iloczyn $\prod_{n=0}^{\infty} e^{z_n}$ jest zbieżny. Niech $z_n = x_n + iy_n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Mamy $|I_n| = e^{\operatorname{Re} S_n}$, czyli $\operatorname{Re} S_k = \ln |I_n|$. Skąd wynika, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ jest zbieżny. Pozostaje wykazać, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ jest zbieżny. Zauważmy, że iloczyn $\prod_{n=0}^{\infty} e^{iy_n}$ jest zbieżny do $I/|I|$ ([12]). Problem sprowadza się więc do przypadku $x_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ (wtedy $|I| = 1$). Przypuśćmy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ jest rozbieżny. Niech $T_n := \sum_{k=0}^{n} y_k$ ($S_n = iT_n$). Z warunku Cauchy'ego wynika, że istnieje $0 < \varepsilon < \pi/4$ takie, że $\forall_{n\in\mathbb{N}_0} \exists_{m>n} : |T_{n,m}| > \varepsilon$, gdzie $T_{n,m} := T_m - T_n = \sum_{k=n+1}^{m} y_k$. Niech $0 < \lambda < \sin \varepsilon$. Istnieje $n_0 \in \mathbb{N}_0$ takie, że $|y_n| < \varepsilon$ i $|I_n - I| < \lambda$ dla $n \geqslant n_0$. Ustalmy najmniejsze $m_0 > n_0$ takie, że $|T_{n_0,m_0}| > \varepsilon$. Zauważmy, że $\varepsilon < |T_{n_0,m_0}| < 2\varepsilon$ (Ćwiczenie). Oczywiście, $|I_{m_0} - I_{n_0}| < 2\lambda$, a stąd $|I_{m_0}/I_{n_0} - 1| < 2\lambda$, czyli $|e^{iT_{n_0,m_0}} - 1| < 2\lambda$. Biorąc pod uwagę to, że $\varepsilon < |T_{n_0,m_0}| < 2\varepsilon$, dostajemy $|e^{iT_{n_0,m_0}} - 1| > 2\sin\varepsilon$ — sprzeczność.

(c) Implikacja ($\Longrightarrow$) wynika z (a). Dla dowodu przeciwnej implikacji Możemy założyć, że $|c_n| < 1/2$, $n \in \mathbb{N}_0$. Niech $z_n := \operatorname{Log} z_n = \ln|1 + c_n| + i \operatorname{Arg}(1 + c_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ ([13]). Na podstawie (a), jeżeli iloczyn $\prod_{n=0}^{\infty}(1 + c_n) = \prod_{n=0}^{\infty} e^{z_n}$ jest bezwarunkowo zbieżny, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ jest bezwarunkowo zbieżny, a więc

([12]) W tym miejscu korzystamy w rzeczywistości z ciągłości zespolonej funkcji eksponens, który to fakt udowodnimy w niedalekiej przyszłości — zob. Przykład 6.4.12(b).

([13]) Dla $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ definiujemy *logarytm główny* $\operatorname{Log} z$ wzorem $\operatorname{Log} z := \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$. Oczywiście $e^{\operatorname{Log} z} = z$. Zauważmy, że funkcja Log jest ciągła (Ćwiczenie). Ponadto, $\lim_{\mathbb{C}\ni z\to 0} \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z} = 1$ (Ćwiczenie).

bezwzględnie zbieżny (Wniosek 6.1.23). Pozostaje wykazać, że jeżeli $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| < +\infty$, to $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < +\infty$ i skorzystać z Twierdzenia 6.3.6. Wystarczy pokazać, że $|c_n| \leqslant C|z_n|$ dla pewnej stałej $C > 0$ przy $n \gg 1$, a to wynika z tego, że $\lim_{\mathbb{C}\ni z\to 0} \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z} = 1$. $\square$

6.4. Ciągi i szeregi funkcyjne

Definicja 6.4.1. Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem. Rozważmy ciąg funkcji $f_n : X \longrightarrow E$, $n \in \mathbb{N}$. Przypomnijmy, że:

• Ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny punktowo do funkcji $f : X \longrightarrow E$, jeżeli $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ dla dowolnego $x \in X$. W przypadku, gdy $X = \{x_0\}$, pojęcie ciągu funkcyjnego redukuje się do ciągu elementów przestrzeni E.

• Ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji f (por. Twierdzenie 3.3.2(i)), jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0} \, \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \, \forall_{n\geqslant n_0} \, \forall_{x\in X} : \ \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon. \tag{†}$$

Przyjmijmy dodatkowo, że (X, ϱ) jest przestrzenią metryczną. Mówimy, że ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest:

• *zbieżny lokalnie jednostajnie* do funkcji f, jeżeli dowolny punkt $a \in X$ posiada otoczenie $U \subset X$ takie, że $f_n|_U \longrightarrow f|_U$ jednostajnie;

• *zbieżny niemal jednostajnie* do funkcji f, jeżeli dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset X$ mamy $f_n|_K \longrightarrow f|_K$ jednostajnie;

Obserwacja 6.4.2. (a) $f_n \longrightarrow f$ jednostajnie na X wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \|f_n(x) - f(x)\| = 0.$$

(b) ($f_n \longrightarrow f$ jednostajnie) $\Longrightarrow$ ($f_n \longrightarrow f$ lokalnie jednostajnie) $\Longrightarrow$ ($f_n \longrightarrow f$ niemal jednostajnie) $\Longrightarrow$ ($f_n \longrightarrow f$ punktowo).

(c) Jeżeli X jest przestrzenią zwartą, to zbieżność jednostajna, lokalnie jednostajna i niemal jednostajna są równoważne.

(d) Jeżeli przestrzeń X jest *lokalnie zwarta* (tzn. każdy punkt $a \in X$ posiada otoczenie $U \subset X$ takie, że $\overline{U}$ jest zbiorem zwartym (np. $X \subset \mathbb{R}^n$)), to zbieżność lokalnie jednostajna i niemal jednostajna są równoważne.

Przykład 6.4.3. (a) Niech $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy:

• $f_n \longrightarrow f$ punktowo, gdzie $f(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x \in [0,1) \\ 1, & \text{jeżeli } x = 1 \end{cases}$.

• $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\} = \sup\{x^n : x \in [0,1)\} = 1$; w szczególności, zbieżność nie jest jednostajna (nie jest również jednostajna na $[0,1)$).

• Dla dowolnego $\theta \in (0,1)$ mamy $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,\theta]\} = \theta^n$; w szczególności, $f_n \longrightarrow f$ lokalnie jednostajnie na $[0,1)$.

(b) Niech $f_n : \mathbb{R} \to [-1,1]$, $f_n(x) := \frac{2nx}{n^2+x^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy:

• $f_n \longrightarrow 0$ punktowo na $\mathbb{R}$.

• $f_n(n) = 1$; w szczególności, ciąg nie jest zbieżny jednostajnie.

• Dla dowolnego $M > 0$ mamy $\sup\{|f_n(x)| : |x| \leqslant M\} = \frac{2nM}{n^2+M^2}$; w szczególności, $f_n \longrightarrow 0$ lokalnie jednostajnie.

(c) Niech $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy:

• $f_n \longrightarrow 0$ punktowo na $\mathbb{R}$.

• $\sup\{|f_n(x)| : x \in \mathbb{R}\} = |f_n(\pm\frac{1}{n})| = \frac{1}{2}$; w szczególności, ciąg nie jest zbieżny jednostajnie w żadnym otoczeniu zera.

Definicja 6.4.4. Wszystkie pojęcia, wprowadzone wyżej dla ciągów funkcyjnych, przenoszą się na szeregi funkcyjne $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$. Dodatkowo, dla szeregów funkcyjnych wprowadzamy pojęcie *zbieżności bezwzględnej jednostajnej*, gdy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|$ jest zbieżny jednostajnie. Można też mówić o *zbieżności bezwzględnej lokalnie jednostajnej*, czy też o *zbieżności bezwzględnej niemal jednostajnej*

Dla szeregów funkcyjnych rozważamy też pojęcie *zbieżności normalnej na X*, gdy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup\{\|f_n(x)\| : x \in X\} < +\infty.$$

Zgodnie z ogólnym wzorcem możemy też mówić o *zbieżności lokalnie normalnej*, czy też o *zbieżności niemal normalnej*.

Twierdzenie 3.3.2 daje nam natychmiast

Twierdzenie 6.4.5 (Warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej szeregu)**.** *Następujące warunki są równoważne:*

(i) *szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie na X;*

(ii) *spełniony jest* jednostajny warunek Cauchy'ego*, tzn.*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{m>n\geqslant n_0}\ \forall_{x\in X} : \Big\|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\Big\| \leqslant \varepsilon.$$

Twierdzenie 6.4.6. (a) *Szereg zbieżny bezwzględnie jednostajnie (odp. bezwzględnie lokalnie jednostajnie, bezwzględnie niemal jednostajnie) jest zbieżny jednostajnie (odp. lokalnie jednostajnie, niemal jednostajnie).*

(b) *(Kryterium Weierstrassa zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego) Szereg zbieżny normalnie (odp. lokalnie normalnie, niemal normalnie) jest zbieżny bezwzględnie jednostajnie (odp. lokalnie jednostajnie, niemal jednostajnie).*

Obserwacja 6.4.7. (a) Niech $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{B}(X, E)$. Zauważmy, że jeżeli szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie na X, to $f := \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n \in \mathcal{B}(X, E)$. Stąd:

- (zbieżność jednostajna szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ na X) $\iff$ (zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ w $\mathcal{B}(X, E)$);
- (zbieżność bezwzględna jednostajna szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ na X) $\iff$ (zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|f_n\|$ w $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$);
- (zbieżność normalna szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ na X) $\iff$ (zbieżność bezwzględna $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ w $\mathcal{B}(X, E)$).

(b) Założenie $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{B}(X, E)$ nie jest ograniczające. Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ jest jednostajnie zbieżny, to z jednostajnego warunku Cauchy'ego (z $\varepsilon = 1$) wynika, że istnieje $n_0 \in \mathbb{N}_0$ takie, że $\|f_k(x)\| \leqslant 1$, $x \in X$, $k > n_0$. Tak więc $f_k \in \mathcal{B}(X, E)$ dla $k > n_0$.

(c) Powyższe obserwacje pozwalają przenosić automatycznie wyniki dotyczące szeregów elementów przestrzeni Banacha E na szeregi funkcyjne. Po prostu stosujemy wyniki dotyczące szeregów o wyrazach z E do szeregów o wyrazach z $\mathcal{B}(X, E)$.

W ten sposób na przykład dostajemy:

Twierdzenie 6.4.8 (Twierdzenie o tasowaniu szeregów bezwzględnie jednostajnie zbieżnych)**.** *Przypuśćmy, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie bezwzględnie na X. Niech $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ będzie dowolną bijekcją. Wtedy szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)}$ jest zbieżny jednostajnie bezwzględnie na X* [14].

Przykład 6.4.9. Szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^{2n}}, \quad z \in X := \mathbb{C} \setminus \mathbb{T},$$

---

[14] Oczywiście, na podstawie Twierdzenia 6.1.7 mamy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $x \in X$.

jest zbieżny lokalnie normalnie.

Istotnie dla dowolnego $\theta \in (0,1)$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla $n \geqslant N$ mamy

$$\sup\Big\{\Big|\frac{z^n}{1-z^{2n}}\Big| : |z| \leqslant \theta\Big\} \leqslant 2\theta^n, \quad \sup\Big\{\Big|\frac{z^n}{1-z^{2n}}\Big| : |z| \geqslant \frac{1}{\theta}\Big\} \leqslant 2\theta^n \quad \text{(Ćwiczenie).}$$

Ćwiczenie 6.4.10. Niech $g_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$g_n(x) := \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & \text{jeżeli } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{n+1}{2}x, & \text{jeżeli } \frac{1}{n+1} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{1}{2n}, & \text{jeżeli } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}.$$

Zdefiniujmy $f_n := g_n - g_{n-1}$, $k \in \mathbb{N}_2$. Wtedy szereg $\sum_{n=2}^{\infty} f_n$ jest zbieżny bezwzględnie jednostajnie, ale nie jest zbieżny normalnie.

Twierdzenie 6.4.11. *Załóżmy, że szereg funkcyjny $f := \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ jest lokalnie jednostajnie zbieżny. Wtedy:*

(a) *Jeżeli dla pewnego $a \in X$ mamy $f_n \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C};a)$, $n \in \mathbb{N}$, to $f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C};a)$.*
(b) *Jeżeli $f_n \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, to $f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$.*

Dowód. Wystarczy skorzystać z Twierdzenia 4.4.1. □

Przykład 6.4.12. (a) Suma szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^{2n}}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$, jest funkcją ciągłą.
(b) Funkcja eksponens jest ciągła.

Zagadnienia dotyczące szeregów mają swoje odpowiedniki dla iloczynów funkcyjnych.

Twierdzenie 6.4.13. *Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią lokalnie zwartą i niech $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$. Jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$ jest zbieżny niemal jednostajnie w X, to iloczyn $I := \prod_{n=0}^{\infty}(1+f_n)$ jest zbieżny niemal jednostajnie w X (w szczególności, $I \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$).*

Dowód. Na podstawie Twierdzeń 6.3.5 i 6.3.6, dla dowolnego $x \in X$, iloczyn $I(x) := \prod_{n=0}^{\infty}(1+f_n(x))$ jest zbieżny bezwzględnie. Pozostaje wykazać, że $I_k \longrightarrow I$ niemal jednostajnie. Ustalmy zbiór zwarty $K \subset X$. Ponieważ $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n| \in \mathcal{C}(X)$, zatem istnieje $C > 0$ takie, że $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| \leqslant C$, $x \in K$. Stąd dla $x \in K$ dostajemy $|I_k(x)| \leqslant (1+|f_1(x)|)\cdots(1+|f_k(x)|) \leqslant e^{|f_1(x)|+\dots+|f_k(x)|} \leqslant e^C$.

Mamy $I_n - I_{n-1} = I_{n-1}f_n$. Stąd $I_k = I_0 + \sum_{n=1}^{k}(I_n - I_{n-1}) = I_0 + \sum_{n=1}^{k} I_{n-1}f_n$. Wystarczy więc pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |I_{n-1}f_n|$ jest zbieżny jednostajnie na K. Wynika to z oszacowania $|I_{n-1}(x)f_n(x)| \leqslant e^C|f_n(x)|$, $x \in K$. □

6.5. Operator odwracania w algebrach Banacha

Definicja 6.5.1. Mówimy, że $(A, \| \ \|)$ jest *algebrą Banacha* z jedynką, jeżeli:

- A jest algebrą z jedynką e,
- $(A, \| \ \|)$ jest przestrzenią Banacha,
- $\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$, $x, y \in A$,
- $\|e\| = 1$.

Niech $O(A)$ oznacza zbiór elementów odwracalnych algebry A i niech $O(A) \ni x \overset{\varLambda}{\longmapsto} x^{-1} \in O(A)$. Odnotujmy, że $\varLambda$ jest bijekcją; $\varLambda^{-1} = \varLambda$.

Obserwacja 6.5.2. (a) Niech $X \neq \varnothing$ będzie zwartą przestrzenią topologiczną i niech $A := \mathcal{C}(X,\mathbb{K})$. Wtedy A z normą Czebyszewa (supremową) jest algebrą Banacha z jedynką. Ponadto, $O(A) = \{f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{K}) : f(x) \neq 0,\ x \in X\}$ oraz $\varLambda(f) = 1/f$.

(b) Niech $E \neq \{0\}$ będzie przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$ i niech $A := \mathcal{L}(E, E)$. Wtedy A z normą z $\mathcal{L}(E, E)$ i składaniem jako mnożeniem wewnętrznym jest algebrą Banacha z jedynką id_E. Ponadto, $O(A) = \mathrm{Isom}(E, E)$ oraz $\Lambda(L) = L^{-1}$.

(c) Niech $A := \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n) \simeq \mathbb{M}(n \times n; \mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{n^2}$ (z normą operatorową z $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$). Wtedy $O(A)$ to zbiór macierzy odwracalnych, tzn. $O(A) = \{L \in \mathbb{M}(n \times n; \mathbb{K}) : \det L \neq 0\}$. Zauważmy, że jest to zbiór otwarty w $\mathbb{M}(n \times n; \mathbb{K})$. Ponadto, odwzorowanie $O(A) \ni L \overset{\Lambda}{\longmapsto} L^{-1} \in O(A)$ jest homeomorfizmem.

Powyższa sytuacja (w (c)) nie jest przypadkowa. Mamy bowiem następujący ogólny wynik.

Twierdzenie 6.5.3. *Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką e. Wtedy:*

(a) *$B(e, 1) \subset O(A)$ oraz $(e - x)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu$, $\|x\| < 1$, gdzie $x^0 := e$.*

(b) *Ogólniej, jeżeli $a \in O(A)$, to $B(a, 1/\|a^{-1}\|) \subset O(A)$ oraz $(a - x)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (a^{-1}x)^\nu a^{-1}$, $\|x\| < 1/\|a^{-1}\|$. W szczególności, $O(A)$ jest otwarty w A.*

(c) *Odwzorowanie $O(A) \ni x \overset{\Lambda}{\longmapsto} x^{-1} \in O(A)$ jest homeomorfizmem.*

Dowód. (a) Ustalmy $x \in A$, $\|x\| < 1$. Na wstępie zauważmy, że ponieważ $\|x^\nu\| \leqslant \|x\|^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, zatem szereg jest zbieżny do pewnego elementu a. Mamy:

$$(e - x)a = a - xa = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu+1} = e, \quad a(e - x) = a - ax = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu+1} = e.$$

(b) Niech $a \in O(A)$. Ustalmy $x \in A$, $\|x\| < 1/\|a^{-1}\|$. Wtedy $\|a^{-1}x\| < 1$. Ponieważ $a - x = a(e - a^{-1}x)$, wystarczy skorzystać z (a).

(c) Niech $a \in O(A)$, $\|x\| < 1/\|a^{-1}\|$. Na podstawie (b) mamy:

$$\|\Lambda(a - x) - \Lambda(a)\| = \|(a - x)^{-1} - a^{-1}\| = \|\sum_{\nu=1}^{\infty} (a^{-1}x)^\nu a^{-1}\| \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \|a^{-1}\|^{\nu+1} \|x\|^\nu = \frac{\|a^{-1}\|^2 \|x\|}{1 - \|a^{-1}\| \|x\|}. \quad \square$$

Korzystając z poprzednich rozważań łatwo dostajemy następujący wynik.

Twierdzenie 6.5.4. *Dla dowolnego $L_0 \in \mathrm{Isom}(E, F)$ i $X \in \mathcal{L}(E, F)$ takich, że $\|X\| < 1/\|L_0^{-1}\|$ mamy*

$$L_0 - X \in \mathrm{Isom}(E, F), \quad (L_0 - X)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (L_0^{-1} \circ X)^\nu \circ L_0^{-1}.$$

W szczególności, zbiór $\mathrm{Isom}(E, F)$ jest otwarty w $\mathcal{L}(E, F)$, a odwzorowanie

$$\mathrm{Isom}(E, F) \ni L \overset{\Lambda}{\longmapsto} L^{-1} \in \mathrm{Isom}(F, E)$$

jest homeomorfizmem.

6.6. Szeregi potęgowe

Niech E będzie ustaloną przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$.

Definicja 6.6.1. *Szeregiem potęgowym o środku w punkcie $a \in \mathbb{K}$* nazywamy szereg funkcyjny postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n, \tag{*}$$

gdzie $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset E$, $z \in \mathbb{K}$ ($0^0 := 1$). Oczywiście wszystkie własności szeregu (*) można odczytać badając szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, czyli zakładając, że $a = 0$. Tak też zawsze będziemy czynić. Liczbę

$$R := \frac{1}{\limsup\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|}} \in [0, +\infty]$$

nazywamy *promieniem zbieżności szeregu potęgowego*.

Twierdzenie 6.6.2. *Rozważmy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.*

(a) *Jeżeli $R>0$, to dla dowolnego $0<r<R$ istnieją $\theta\in(0,1)$ oraz $M>0$ takie, że $\|a_nz^n\|\leqslant M\theta^n$ dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$ oraz $z\in K(r)$.* ([15])

(b) *Jeżeli $R>0$, to szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ jest zbieżny lokalnie normalnie w $K(R)$.*

(c) *Jeżeli $R>0$ i $f(z):=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, $z\in K(R)$, to $f\in\mathcal{C}(K(R),E)$ (Twierdzenie 6.4.11(b)).*

(d) *Jeżeli $R<+\infty$, to dla $z\notin\overline{K(R)}\cap\mathbb{K}$ szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ jest rozbieżny.*

(e) $R=\sup\Big\{|z|:\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|a_nz^n\|<+\infty\Big\}=\sup\Big\{|z|:\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}\|a_nz^n\|<+\infty\Big\}$.

(f) *Jeżeli $0<R<+\infty$, to o zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ dla $\in\mathbb{K}\cap\partial K(R)$ nic nie można powiedzieć.*

Dowód. (a) Dla $|z|\leqslant r$ mamy $\|a_nz^n\|\leqslant\|a_n\|r^n$. Ponadto, $\limsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\|a_n\|r^n}=\frac{r}{R}<1$. Biorąc $\frac{r}{R}<\theta<1$ wnioskujemy, że istnieje $N\in\mathbb{N}$ takie, że $\|a_n\|r^n\leqslant\theta^n$ dla $n>N$. Teraz wystarczy tylko wziąć $M:=\max\{1,\|a_n\|(r/\theta)^n:n=1,\dots,N\}$.

(b) wynika z (a).

(c) wynika z (b) i Twierdzenia 6.4.11.

(d) Ponieważ $\limsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\|a_nz^n\|}=\frac{|z|}{R}>1$, wystarczy skorzystać z kryterium Cauchy'ego.

(e) Niech $R_1:=\sup\{|z|:\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|a_nz^n\|<+\infty\}$, $R_2:=\sup\{|z|:\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}\|a_nz^n\|<+\infty\}$. Na podstawie (b) i (d) mamy $R=R_1\leqslant R_2$. Jeżeli $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0}\|a_nz^n\|<+\infty$, to dla dowolnego $\theta\in(0,1)$ szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|a_n(\theta z)^n\|$ jest zbieżny, a więc $R_2\leqslant R_1$.

(f) Rozważmy następujące przykłady ($R=1$):

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^n$: dla dowolnego $z\in\mathbb{T}$ szereg jest rozbieżny.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$: dla dowolnego $z\in\mathbb{T}$ szereg jest bezwzględnie zbieżny.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$: dla $z=1$ szereg jest rozbieżny; dla $z\in\mathbb{T}\setminus\{1\}$ szereg jest zbieżny na mocy kryterium Dirichleta (Przykład 6.2.2(a)). □

Obserwacja 6.6.3. Jeżeli $f(z):=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, $z\in K(R)$ ($R>0$), to $a_1=f'(0):=\lim\limits_{z\to0}\frac{f(z)-f(0)}{z}$ ([16]).

Istotnie, $\frac{f(z)-f(0)}{z}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{n+1}z^n$, $z\in K(R)\setminus\{0\}$. Szereg potęgowy $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{n+1}z^n$ ma ten sam promień zbieżności: $\limsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_{n+1}|}=\limsup\limits_{n\to+\infty}\big(\sqrt[n+1]{\|a_{n+1}\|}\big)^{\frac{n+1}{n}}=\limsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n+1]{\|a_{n+1}\|}$. W szczególności, funkcja $g(z):=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{n+1}z^n$, $z\in K(R)$, jest ciągła. Mamy więc $a_1=g(0)=\lim\limits_{z\to0}g(z)=\lim\limits_{z\to0}\frac{f(z)-f(0)}{z}$.

6.7. Funkcje e^z, $\sin z$, $\cos z$, ...

Głównym celem tego podrozdziału jest formalne zdefiniowanie liczby π i funkcji trygonometrycznych.
Przypomnijmy (Definicja 6.1.18), że funkcję eksponens $\exp:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ definiujmy wzorem

$$e^z=\exp z=\exp(z):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad z\in\mathbb{C}.$$

([15]) Uwaga: Tu i dalej, jeżeli $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, to $K(a,r)$, $K(r)$ oznaczają koła na płaszczyźnie. Jeżeli zaś $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ to oznaczają one przedziały $(a-r,a+r)$, $(-r,r)$.

([16]) Oczywiście, jeżeli $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, to $f'(0)$ pokrywa się ze znaną nam pochodną. Jeżeli $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, to jest to coś nowego — *pochodna zespolona*

Jest to funkcja ciągła. Ponadto, Na podstawie Obserwacji 6.6.3 mamy $(e^z)'(0) = 1$.

Definicja 6.7.1. *Definiujemy* funkcje trygonometryczne (*wzory Eulera*):

$$\sin z := \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}, \quad \cos z := \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Obserwacja 6.7.2. (a) sin i cos są funkcjami ciągłymi.

(b) $\exp(iz) = \cos z + i \sin z$, $z \in \mathbb{C}$.

(c) $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$, $z \in \mathbb{C}$.

(d) $\sin z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$.

Istotnie,

$$\sin z = \frac{1}{2i}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}\Big) = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}\Big) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(iz)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

(e) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ oraz $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, $a, b \in \mathbb{C}$. W szczególności, $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, $z \in \mathbb{C}$ (*jedynka trygonometryczna*).

Istotnie,

$$\sin a \cos b + \sin b \cos a = \frac{1}{4i}\Big((e^{ia} - e^{-ia})(e^{ib} + e^{-ib}) + (e^{ib} - e^{-ib})(e^{ia} + e^{-ia})\Big)$$
$$= \frac{1}{2i}(e^{ia}e^{ib} - e^{-ia}e^{-ib}) = \frac{1}{2i}(e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}) = \sin(a+b).$$

Drugi wzór pozostawiamy jako Ćwiczenie.

(f) $\sin(\mathbb{R}) \subset [-1,1]$, $\cos(\mathbb{R}) \subset [-1,1]$.

(g) Na podstawie Obserwacji 6.6.3 mamy $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$, $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\cos z - 1}{z} = 0$.

Zauważmy, że

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} < -1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} < -1 + \frac{2^4}{4!}\Big(1 + \frac{2^2}{5^2} + \frac{2^4}{5^4} + \dots\Big)$$
$$= -1 + \frac{16}{24}\frac{1}{1 - \frac{4}{25}} = -1 + \frac{50}{63} < 0.$$

W takim razie, z własności Darboux funkcji ciągłych wynika, że funkcja cos musi mieć zero w przedziale $(0,2)$.

Definicja 6.7.3. $\pi := 2 \inf\{x > 0 : \cos x = 0\}$.

Obserwacja 6.7.4. (a) $0 < \pi < 4$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

(b) $0 < \cos x < 1$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Ustalmy $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Oczywiście $0 < \cos x \leqslant 1$. Dla uzyskania ostrej nierówności zauważmy, że

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!}\Big(1 - \frac{x^2}{3 \cdot 4}\Big) - \frac{x^6}{6!}\Big(1 - \frac{x^2}{7 \cdot 8}\Big) - \dots < 1.$$

(c) $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ oraz $0 < \sin x < 1$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Ustalmy $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Oczywiście $\sin \frac{\pi}{2} \in \{-1, +1\}$. Wystarczy pokazać, że $\sin x > 0$. Mamy

$$\sin x = x\Big(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3}\Big) + \frac{x^5}{5!}\Big(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\Big) + \dots > 0.$$

(d) $\cos \pi = \cos 2\frac{\pi}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{2} - \sin^2 \frac{\pi}{2} = -1$,
$\sin \pi = 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0$,
$\cos(2\pi) = \cos^2 \pi - \sin^2 \pi = 1$,
$\sin(2\pi) = 2 \sin \pi \cos \pi = 0$.

(e) $\cos(z+2(k+1)\pi) = \cos(z+2k\pi)\cos 2\pi - \sin(z+2k\pi)\sin 2\pi = \cos(z+2k\pi)$, a stąd $\cos(z+2k\pi) = \cos z$,

$\sin(z + 2k\pi) = \sin z$, $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$ (korzystamy z Obserwacji 6.7.2(e)).

(f) $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. W szczególności, $e^{\pi i} = -1$.

(g) $e^{z+2k\pi i} = e^z$, $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Istotnie, $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$.

Twierdzenie 6.7.5. (a) *Odwzorowanie* $[0, 2\pi) \ni t \overset{\Phi}{\longmapsto} e^{it} \in \mathbb{T}$ *jest bijektywne.*

(b) $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(c) $e^a = e^b \iff \frac{a-b}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$.

(d) *Dla* $x \in \mathbb{R}$ *funkcje* $\sin x$ *i* $\cos x$ *pokrywają się z funkcjami znanymi z trygonometrii.*

Dowód. (a) Wiemy, że $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1) \in \Phi([0, 2\pi))$. Ponadto, wiemy, że

$$\{(x + iy) \in \mathbb{T} : x > 0,\ y > 0\} = \Phi((0, \tfrac{\pi}{2})).$$

Z okresowości wnioskujemy, że $\mathbb{T} \subset \Phi([0, 2\pi))$. Pozostaje injektywność. Przypuśćmy, że $\Phi(t') = \Phi(t'')$, $t' < t''$. Niech $4t := t'' - t'$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, $x + iy := e^{it} \in \mathbb{T}$ $(x, y \in (0, 1))$. Mamy $e^{i4t} = 1$, czyli $1 = (x+iy)^4 = (x^2 - y^2 + 2ixy)^2 = (x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2 + 8ixy(x^2 - y^2)$. Stąd $x^2 = y^2$, a więc $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$. Ostatecznie dostajemy $1 = (x + iy)^4 = -1$ — sprzeczność.

(b) Mamy $z = |z| \cdot \frac{z}{|z|}$. Na podstawie (a) istnieje $y \in [0, 2\pi)$ takie, że $e^{iy} = \frac{z}{|z|}$. Oczywiście istnieje $x \in \mathbb{R}$ takie, że $e^x = |z|$. Ostatecznie wiec mamy $z = e^x(\cos y + i \sin y) = e^{x+iy}$.

(c) Niech $c := a - b = \alpha + i\beta$. Mamy $1 = e^c = e^\alpha(\cos\beta + i \sin\beta)$, Stąd $\sin\beta = 0$, a więc, wobec (a), $\frac{\beta}{2\pi} \in \mathbb{Z}$. W konsekwencji $1 = e^\alpha$, skąd wynika, że $\alpha = 0$.

(d) Ćwiczenie. $\square$

Definicja 6.7.6 (Funkcje hiperboliczne)**.** Funkcje hiperboliczne cosh i sinh (zob. Ćwiczenie 4.4.23) mogą być rozszerzone na całą płaszczyznę zespoloną. Definiujemy:

- *cosinus hiperboliczny*: $\mathbb{C} \ni z \overset{\cosh}{\longmapsto} \frac{e^z + e^{-z}}{2} \in \mathbb{C}$;
- *sinus hiperboliczny*: $\mathbb{C} \ni z \overset{\sinh}{\longmapsto} \frac{e^z - e^{-z}}{2} \in \mathbb{C}$;
- *tangens hiperboliczny*: $\mathbb{C} \setminus \{(\frac{1}{2} + k)\pi i : k \in \mathbb{Z}\} \ni z \overset{\mathrm{tgh}}{\longmapsto} \frac{\sinh z}{\cosh z} \in \mathbb{C}$.

6.8. Przeliczalne rodziny sumowalne

Poznane wcześnie pojęcie szeregu bezwarunkowo zbieżnego będziemy chcieli przenieść na szeregi funkcyjne postaci $\sum\limits_{i \in I} f_i$, gdzie I jest dowolnym zbiorem przeliczalnym, X jest dowolnym zbiorem niepustym, zaś $f_i : X \longrightarrow E$, $i \in I$, gdzie E jest przestrzenią Banacha nad ciałem $\mathbb{K}$, $E \neq \{0\}$. Oznaczmy przez $\mathcal{F}(I)$ rodzinę wszystkich niepustych skończonych podzbiorów I. Rozważmy rodzinę funkcji $f_i : X \longrightarrow E$, $i \in I$. Dla $A \in \mathcal{F}(I)$ zdefiniujmy $f_A := \sum\limits_{i \in A} f_i : X \longrightarrow E$. Oczywiście $f_{\{i\}} = f_i$. Przyjmujemy, że $f_\varnothing := 0$.

Obserwacja 6.8.1. (a) W przypadku, gdy $X = \{x_0\}$ szereg $\sum\limits_{i \in I} f_i$ redukuje się do szeregu elementów przestrzeni Banacha E.

(b) Istnieje też możliwość badania szeregów $\sum\limits_{i \in I} f_i$, gdzie I jest dowolnym zbiorem nieskończonym (zob. Definicja 6.8.6).

Twierdzenie 6.8.2. *Następujące warunki są równoważne:*

(i) *rodzina* $(f_i)_{i \in I}$ *jest* jednostajnie sumowalna na X, *tzn. istnieje funkcja* $f_I : X \longrightarrow E$ *taka, że*

$$\forall_{\varepsilon > 0}\ \exists_{S(\varepsilon) \in \mathcal{F}(I)}\ \forall_{A \in \mathcal{F}(I):\ S(\varepsilon) \subset A}\ \forall_{x \in X} : \|f_A(x) - f_I(x)\| \leqslant \varepsilon;$$

(ii) *rodzina* $(f_i)_{i \in I}$ *spełnia* jednostajny warunek Cauchy'ego, *tzn.*

$$\forall_{\varepsilon > 0}\ \exists_{C(\varepsilon) \in \mathcal{F}(I)} \forall_{A \in \mathcal{F}(I \setminus C(\varepsilon))}\ \forall_{x \in X} : \|f_A(x)\| \leqslant \varepsilon;$$

(iii) *rodzina* $(f_i)_{i \in I}$ *jest* jednostajnie bezwarunkowo sumowalna, *tzn. dla dowolnej bijekcji* $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow I$ *szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)}$ *jest zbieżny jednostajnie na* X *i jego suma nie zależy od* σ, *przy czym tą sumą jest funkcja* f_I *z warunku* (i)*;*

(iv) *dla dowolnej bijekcji* $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow I$ *szereg* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)}$ *jest zbieżny jednostajnie na* X.

Obserwacja 6.8.3. (a) Funkcja f_I w warunku (i) jest wyznaczona jednoznacznie. Nazywamy ją *sumą* rodziny $(f_i)_{i\in I}$ i oznaczamy przez $f_I = \sum\limits_{i\in I} f_i$.

(b) Jeżeli $X = \{x_0\}$ słowo „jednostajnie" pomijamy i mówimy o *sumowalnej* rodzinie elementów przestrzeni E.

(c) Zauważmy, że w warunku (i) (odp. (ii)) zbiór $S(\varepsilon)$ (odp. $C(\varepsilon)$) może być powiększony bez szkody dla zachodzenia warunku.

(d) Jednostajna sumowalność to nic innego jak jednostajna bezwarunkowa zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_{\sigma(n)}$ dla pewnej dowolnie ustalonej bijekcji $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow I$.

(e) Jeżeli rodzina $(f_i)_{i\in I} \subset \mathcal{B}(X, E)$ jest jednostajnie sumowalna na X, to istnieje stała $M > 0$ taka, że $\|f_A(x)\| \leqslant M$, $x \in X$, $A \in \mathcal{F}(I)$. W szczególności, $\|f_I(x)\| \leqslant M$, $x \in X$.

Istotnie, dla $A \in \mathcal{F}(I \setminus S(1))$ mamy $\|f_A(x)\| = \|f_{A\cup S(1)}(x) - f_{S(1)}(x)\| \leqslant \|\|f_{A\cup S(1)}(x) - f_I(x)\| + \|f_{S(1)}(x) - f_I(x)\| \leqslant 2$. Teraz wystarczy przyjąć $M := \max\{2, \|f_i\|_X : i \in S(1)\}$.

Dowód Twierdzenia 6.8.2. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Niech $C(\varepsilon) := S(\varepsilon/2) := S$. Wtedy dla $A \in \mathcal{F}(I \setminus S)$ i $x \in X$ mamy:

$$\|f_A(x)\| = \|f_{A\cup S}(x) - f_S(x)\| \leqslant \|f_{A\cup S}(x) - f_I(x)\| + \|f_S(x) - f_I(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Możemy założyć, że $C(\frac{1}{n}) \subsetneq C(\frac{1}{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$. Niech $s_n := f_{C(\frac{1}{n})}$, $n \in \mathbb{N}$. Mamy

$$\|s_{n+k}(x) - s_n(x)\| = \|f_{C(\frac{1}{n+k})\setminus C(\frac{1}{n})}(x)\| \leqslant \frac{1}{n}, \quad n, k \in \mathbb{N},\ x \in X.$$

Oznacza to, że ciąg funkcji $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego na X. Ponieważ E jest przestrzenią Banacha, zatem $s_n \longrightarrow s$ jednostajnie na X (dla pewnej funkcji $s : X \longrightarrow E$). Pokażemy, że rodzina $(f_i)_{i\in I}$ jest jednostajnie sumowalna do s.

Z poprzedniej nierówności wynika, że $\|s_n(x) - s(x)\| \leqslant \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$. Jeżeli teraz $A \in \mathcal{F}(I)$ i $C(\frac{1}{n}) \subset A$, to

$$\|f_A(x) - s(x)\| \leqslant \|f_A(x) - f_{C(\frac{1}{n})}(x)\| + \|f_{C(\frac{1}{n})}(x) - s(x)\| \leqslant \|f_{A\setminus C(\frac{1}{n})}(x)\| + \frac{1}{n} \leqslant \frac{2}{n}, \ x \in X.$$

(i) $\Longrightarrow$ (iii): Ustalmy bijekcję $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow I$ oraz $\varepsilon > 0$. Niech $N_0 \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $S(\varepsilon) \subset \{\sigma(0), \dots, \sigma(N_0)\}$ Wtedy dla dowolnego $N \geqslant N_0$ mamy $S(\varepsilon) \subset \{\sigma(0), \dots, \sigma(N)\} =: A$, a stąd

$$\Big\|\sum_{n=0}^{N} f_{\sigma(n)}(x) - f_I(x)\Big\| = \|f_A(x) - f_I(x)\| \leqslant \varepsilon, \quad x \in X.$$

Implikacja (iii) $\Longrightarrow$ (iv) jest oczywista.

(iv) $\Longrightarrow$ (ii): Przypuśćmy, że dla pewnego $\varepsilon > 0$ warunek (ii) nie zachodzi. Ustalmy dowolne $i_0 \in I$. Zbiór $C(\varepsilon) := \{i_0\}$ nie może być dobry. W takim razie istnieje zbiór $F(1) \in \mathcal{F}(I \setminus \{i_0\})$ taki, że $\sup_{x\in X} \|f_{F(1)}(x)\| > \varepsilon$. Zbiór $C(\varepsilon) := F(1)$ też nie może być dobry. Znajdziemy więc $F(2) \in \mathcal{F}(I \setminus F(1))$ taki, że $\sup_{x\in X} \|f_{F(2)}(x)\| > \varepsilon$. Teraz bierzemy $C(\varepsilon) := F(1) \cup F(2)$ i znajdujemy $F(3) \in \mathcal{F}(I \setminus (F(1) \cup F(2)))$ taki, że $\sup_{x\in X} \|f_{F(3)}(x)\| > \varepsilon$. Rozumując dalej znajdziemy ciąg $(F(k))_{k=1}^{\infty}$ parami rozłącznych skończonych podzbiorów I taki, że $\sup_{x\in X} \|f_{F(k)}(x)\| > \varepsilon$, $k \in \mathbb{N}$.

Teraz skonstruujemy pewną bijekcję $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow I$, którą będziemy utożsamiać z permutacją zbioru I.

Jeżeli zbiór $F(0) := I \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F(k)$ jest skończony, to na początku ustawimy elementy zbioru $F(0)$ w dowolnej kolejności, potem elementy zbioru $F(1)$ (też w dowolnej kolejności), potem $F(2)$ itd.

Niech $N(k) := \#F(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Zdefiniujmy $S_N := \sum\limits_{n=0}^{N} f_{\sigma(n)}$. Wtedy $S_{N(0)+\dots+N(k)} - S_{N(0)+\dots+N(k-1)} = f_{F(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, a więc ciąg $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ nie spełnia warunku Cauchy'ego; sprzeczność.

W przypadku gdy zbiór $F(0)$ jest nieskończony, ustawiamy jego elementy w ciąg $i_1, i_2, \dots$, a następnie budujemy permutację σ następująco: stawiamy i_1, potem elementy zbioru $F(1)$, potem i_2, potem $F(2)$, itd. Podobnie jak poprzednio, bez trudu widzimy, że $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ nie może spełniać warunku Cauchy'ego bowiem $S_{N(0)+\dots+N(k)+k} - S_{N(0)+\dots+N(k-1)+k} = f_{F(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, a więc $(S_N)_{N=0}^{\infty}$ nie może spełniać warunku Cauchy'ego; sprzeczność. $\square$

Twierdzenie 6.8.4 (Twierdzenie o grupowaniu wyrazów). *Niech* $I = \bigcup_{j \in J} I(j)$, *gdzie* $I(j) \neq \varnothing$ *i* $I(j) \cap I(k) = \varnothing$ *dla* $j \neq k$ (17)(18). *Jeżeli rodzina* $(f_i)_{i \in I}$ *jest jednostajnie sumowalna na* X, *to rodzina* $(f_{I(j)})_{j \in J}$ *jest jednostajnie sumowalna na* X (19). *Ponadto,*

$$\sum_{j \in J} f_{I(j)} = f_I, \ \textit{czyli} \ \sum_{j \in J} \Big(\sum_{i \in I(j)} f_i \Big) = \sum_{i \in I} f_i.$$

Odnotujmy, że oczywiście twierdzenie odwrotne nie zachodzi, np. $E := \mathbb{R}$, $I = J := \mathbb{N}$, $I(j) := \{2j-1, 2j\}$, $f_i := (-1)^i$. Wtedy $f_{I(j)} = 0$ dla dowolnego $j \in \mathbb{N}$, ale rodzina $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ nie jest sumowalna.

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $B(\varepsilon) := \{j \in J : I(j) \cap S(\frac{\varepsilon}{2}) \neq \varnothing\}$, gdzie $S(\frac{\varepsilon}{2}) \in \mathcal{F}(I)$ jest takie, jak w Twierdzeniu 6.8.2(i). Ponieważ zbiory $I(j)$, $j \in J$, są parami rozłączne mamy $B(\varepsilon) \in \mathcal{F}(J)$. Pokażemy, że z punktu widzenia rodziny $(f_{I(j)})_{j \in J}$ zbiór $B(\varepsilon)$ będzie pełnić rolę zbioru $S(\varepsilon)$, tzn. $\|f_I(x) - \sum_{j \in B} f_{I(j)}(x)\| \leqslant \varepsilon$, $x \in X$, dla dowolnego $B \in \mathcal{F}(J)$ takiego, że $B(\varepsilon) \subset B$.

Ustalmy B i niech $N := \#B$. Dla dowolnego $j \in J$ niech $D(j) \in \mathcal{F}(I(j))$ będzie takie, że

$$A \in \mathcal{F}(I(j)),\ D(j) \subset A \Longrightarrow \|f_A(x) - f_{I(j)}(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2N}, \quad x \in X. \quad (20)$$

Możemy oczywiście założyć, że $S(\frac{\varepsilon}{2}) \cap I(j) \subset D(j)$. Niech $A := \bigcup_{j \in B} D(j)$. Zauważmy, $S(\frac{\varepsilon}{2}) \subset A$, a więc $\|f_A(x) - f_I(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, $x \in X$. Mamy:

$$\begin{aligned} \Big\| f_I(x) - \sum_{j \in B} f_{I(j)}(x) \Big\| &\leqslant \Big\| f_I(x) - \sum_{j \in B} f_{D(j)}(x) \Big\| + \sum_{j \in B} \|f_{D(j)}(x) - f_{I(j)}(x)\| \\ &\leqslant \|f_I(x) - f_A(x)\| + \varepsilon/2 \leqslant \varepsilon, \quad x \in X. \end{aligned}$$

$\square$

Twierdzenie 6.8.5 (Twierdzenie o mnożeniu rodzin sumowalnych). *Niech* $\Phi \in \mathcal{L}(E, F; G)$. *Niech* $(f_i)_{i \in I}$ *będzie jednostajnie sumowalną rodziną odwzorowań ograniczonych* $f_i : X \longrightarrow E$, $i \in I$, *i niech* $(g_j)_{j \in J}$ *będzie jednostajnie sumowalną rodziną odwzorowań ograniczonych* $g_j : X \longrightarrow F$, $j \in J$. *Jeżeli co najmniej jedna z tych rodzin jest bezwzględnie jednostajnie sumowalna, to rodzina* $(\Phi(f_i, g_j))_{(i,j) \in I \times J}$ *jest jednostajnie sumowalna oraz* $\sum_{(i,j) \in I \times J} \Phi(f_i, g_j) = \Phi(f_I, g_J)$. *Jeżeli obie rodziny są bezwzględnie jednostajnie sumowalne, to rodzina* $(\Phi(f_i, g_j))_{(i,j) \in I \times J}$ *jest bezwzględnie jednostajnie sumowalna.*

Dowód. Załóżmy, że rodzina $(g_j)_{j \in J}$ jest bezwzględnie jednostajnie sumowalna. Pozostały przypadek pozostawiamy jako Ćwiczenie. Jeżeli już będziemy wiedzieć, że rodzina $(\Phi(f_i g_j))_{(i,j) \in I \times J}$ jest jednostajnie sumowalna, to wzór na sumę będzie natychmiast wynikać z twierdzenia o grupowaniu rodzin sumowalnych. Istotnie, biorąc $I(j) := I \times \{j\}$, dostajemy

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} \Phi(f_i, g_j) = \sum_{j \in J} \Big(\sum_{i \in I} \Phi(f_i, g_j) \Big) = \sum_{j \in J} \Phi\Big(f_i, \sum_{i \in I} g_j \Big) = \sum_{j \in J} \Phi(f_i, g_J) = \Phi(f_I, g_J).$$

Przechodzimy do dowodu jednostajnej sumowalności rodziny $(\Phi(f_i g_j))_{(i,j) \in I \times J}$. Możemy założyć, że $\|\Phi\| \leqslant 1$. Wiemy, że istnieje stała $M > 0$ taka, że dla dowolnych $A \in \mathcal{F}(I)$, $B \in \mathcal{F}(J)$ mamy: $\|f_A(x)\| \leqslant M$, $\sum_{j \in B} \|g_j(x)\| \leqslant M$, $x \in X$. W szczególności, $\|f_I(x)\| \leqslant M$ oraz $\sum_{j \in J} \|g_j(x)\| \leqslant M$, $x \in X$ (zob. Obserwacja 6.8.3(e)).

Weźmy $\varepsilon > 0$ i niech zbiory $S(\varepsilon) \in \mathcal{F}(I)$, $C(\varepsilon) \in \mathcal{F}(J)$ będą takie, że $|f_A(x) - f_I(x)| \leqslant \varepsilon$, $x \in X$, dla dowolnego $A \in \mathcal{F}(I)$ takiego, że $S(\varepsilon) \subset A$ oraz $\sum_{j \in B} \|g_j(x)\| \leqslant \varepsilon$, $x \in X$, dla dowolnego $B \in \mathcal{F}(J \setminus C(\varepsilon))$.

---

(17) Pewne rodziny $I(j)$ mogą być skończone.

(18) Zauważmy, że $\#J \leqslant \aleph_0$. Zbiór J może być skończony.

(19) Na podstawie Twierdzenia 6.8.2(ii) każda z rodzin $(f_i)_{i \in I(j)}$ jest sumowalna.

(20) Tzn. zbiór $D(j)$ pełni względem rodziny $(f_i)_{i \in I(j)}$ rolę zbioru $S(\frac{\varepsilon}{2N})$. W przypadku, gdy rodzina $I(j)$ jest skończona przyjmujemy $D(j) := I(j)$.

Niech teraz $D \in \mathcal{F}(I \times J)$ będzie taki, że $S(\varepsilon) \times C(\varepsilon) \subset D$. Dla dowolnego $j \in J$ niech $D(j) := \{i \in I : (i,j) \in D\}$ (21). Mamy

$$\sum_{(i,j)\in D} \varPhi(f_i, g_j) - \varPhi(f_I, g_J) = \sum_{(i,j)\in D} \varPhi(f_i, g_j) - \sum_{j\in J} \varPhi(f_I, g_j) = \sum_{j\in J} \varPhi(f_{D(j)} - f_I, g_j)$$

($f_\varnothing := 0$). Wynika stąd, że

$$\Big\| \sum_{(i,j)\in D} \varPhi(f_i, g_j) - \varPhi(f_I, g_J) \Big\| \leqslant \sum_{j\in C(\varepsilon)} \|f_{D(j)} - f_I\| \|g_j\| + \sum_{j\notin C(\varepsilon)} \|f_{D(j)} - f_I\| \|g_j\|$$
$$\leqslant \varepsilon \sum_{j\in C(\varepsilon)} \|g_j\| + 2M \sum_{j\notin C(\varepsilon)} \|g_j\| \leqslant 3M\varepsilon.$$

Jeżeli obie rodziny są bezwzględnie jednostajnie sumowalne, to na podstawie pierwszej części dowodu rodzina $(\|f_i\|\|g_j\|)_{(i,j)\in I\times J}$ jest jednostajnie sumowalna, co oznacza, że rodzina $(\varPhi(f_i, g_j))_{(i,j)\in I\times J}$ jest bezwzględnie jednostajnie sumowalna. $\square$

Na koniec rozważymy przypadek, gdy I jest dowolnym nieskończonym zbiorem, niekoniecznie przeliczalnym. Niech X i I będą dowolnymi niepustymi zbiorami i niech E będzie ustaloną przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$. Tak jak poprzednio, oznaczmy przez $\mathcal{F}(I)$ rodzinę wszystkich niepustych skończonych podzbiorów I. Rozważmy rodzinę funkcji $f_i : X \longrightarrow E$, $i \in I$. Tak, jak poprzednio zdefiniujmy $f_A := \sum_{i\in A} f_i$, $A \in \mathcal{F}(I)$.

Definicja 6.8.6. Powiemy, że rodzina funkcji $(f_i)_{i\in I}$ jest *jednostajnie sumowalna na* X, jeżeli istnieje funkcja $f_I : X \longrightarrow E$ taka, że

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{S(\varepsilon)=S(\varepsilon,I)\in\mathcal{F}(I)}\ \forall_{A\in\mathcal{F}(I):S(\varepsilon)\subset A} : \|f_A(x) - f_I(x)\| \leqslant \varepsilon, \quad x \in X;$$

(por. Twierdzenie 6.8.2(i)). Funkcja f_I jest wyznaczona jednoznacznie (Ćwiczenie). Nazywamy ją *sumą* rodziny f i oznaczamy przez $\sum_{i\in I} f_i$

Następujące twierdzenie pozwala zredukować przypadek dowolnego I do przypadku, gdy I jest przeliczalny.

Twierdzenie 6.8.7. *Jeżeli rodzina* $(f_i)_{i\in I}$ *jest jednostajnie sumowalna na* X*, to* $\#\{i \in I : f_i \not\equiv 0\} \leqslant \aleph_0$.

Dowód. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i $i \in I \setminus S(\varepsilon)$ mamy:

$$\|f_i(x)\| = \|f_{\{i\}\cup S(\varepsilon)}(x) - f_{S(\varepsilon)}(x)\| \leqslant \|f_{\{i\}\cup S(\varepsilon)}(x) - f_I(x)\| + \|f_{S(\varepsilon)}(x) - f_I(x)\| \leqslant 2\varepsilon, \quad x \in X.$$

Innymi słowy: $\{i \in I : \exists_{x\in X} : \|f_i(x)\| > 2\varepsilon\} \subset S(\varepsilon)$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$. W takim razie

$$\{i \in I : f_i \not\equiv 0\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} S\Big(\frac{1}{n}\Big). \qquad \square$$

6.9. Funkcje analityczne I

Niech $\varOmega \subset \mathbb{K}$ będzie otwarty i niech E będzie przestrzenią Banacha nad $\mathbb{K}$.

Definicja 6.9.1. Powiemy, że funkcja $f : \varOmega \longrightarrow E$ jest *analityczna* na $\varOmega$ ($f \in \mathcal{C}^\omega(\varOmega, E)$), jeżeli dla dowolnego $a \in \varOmega$ istnieje szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, $a_n \in E$, $n \in \mathbb{N}_0$, o dodatnim promieniu zbieżności taki, że $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ dla z z pewnego otoczenia punktu a.

W przypadku, gdy $\varOmega \subset \mathbb{C}$ będziemy równoważnie mówić o *funkcji holomorficznej* i będziemy pisać $f \in \mathcal{O}(\varOmega, E)$.

Obserwacja 6.9.2. (a) $\mathcal{C}^\omega(\varOmega, E)$ jest przestrzenią wektorową.

(21) Odnotujmy, że $S(\varepsilon) \subset D(j)$ dla $j \in C(\varepsilon)$.

(b) Przypomnijmy, że każdy szereg potęgowy jest zbieżny niemal normalnie w swoim kole zbieżności (Twierdzenie 6.6.2). W szczególności, $\mathcal{C}^\omega(\Omega, E) \subset \mathcal{C}(\Omega, E)$.

(c) Jeżeli $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathbb{K})$, $g \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, E)$, to $fg \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, E)$. Istotnie, jeżeli $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z-a)^n$ oraz $g(z) = \sum_{n=0}^\infty b_n(z-a)^n$, $z \in K(a,r)$, to korzystając z iloczynu Cauchy'ego szeregów (Twierdzenie 6.2.4) mamy:

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^\infty \Big(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}\Big)(z-a)^n, \quad z \in K(a,r).$$

(d) Funkcja $\mathbb{C}_* \ni z \longmapsto \frac{1}{z}$ jest holomorficzna.
Istotnie, dla $a \neq 0$ i dla $|z-a| < |a|$ mamy

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a}\frac{1}{1 + \frac{z-a}{a}} = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^\infty \Big(-\frac{z-a}{a}\Big)^n.$$

(e) Jeżeli $f \in \mathcal{O}(\Omega, E)$, to $f|_{\Omega\cap\mathbb{R}} \in \mathcal{C}^\omega(\Omega \cap \mathbb{R}, E)$.

Twierdzenie 6.9.3 (Zasada identyczności dla funkcji analitycznych)**.** *Jeżeli $f, g \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, E)$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{K}$ jest* obszarem *(tzn. zbiorem otwartym i spójnym) i $f = g$ na pewnym niepustym zbiorze mającym punkt skupienia w Ω, to $f \equiv g$.*

Dowód. Zastępując f, g przez $f-g, 0$, sprowadzamy dowód do przypadku $g \equiv 0$. Wiemy, że istnieje punkt $a \in \Omega$ oraz ciąg $(z_s)_{s=1}^\infty \subset \Omega \setminus \{a\}$ taki, że $z_s \longrightarrow a$ i $f(z_s) = 0$, $s \in \mathbb{N}$. Wiemy, że $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z-a)^n$, $x \in K(a,r) \subset \Omega$. Oczywiście, $f(a) = a_0 = 0$. Gdyby $f \not\equiv 0$ w $K(a,r)$, to dla pewnego $p \in \mathbb{N}$ mielibyśmy $f(z) = \sum_{n=p}^\infty a_n(z-a)^n$, $z \in K(a,r)$, przy czym $a_p \neq 0$. Wynika stąd, że $f(z) = (z-a)^p \sum_{n=p}^\infty a_n(z-a)^{n-p} =: (z-a)^p h(z)$ i $h(a) = a_p \neq 0$. Funkcja h jako dana szeregiem potęgowym musi być ciągła w $K(a,r)$. Ponieważ $z_s \neq a$, wnioskujemy, że $h(z_s) = 0$, $s \gg 1$ — sprzeczność. Tak więc $f = 0$ w $K(a,r)$.

Niech $\Omega_0 := \{z_0 \in \Omega : f = 0$ w pewnym otoczeniu otwartym punktu $z_0\}$. Wiemy, że $\Omega_0 \neq \varnothing$. Wprost z definicji wynika, że Ω_0 jest otwarty. Pierwsza część dowodu pokazuje, że każdy punkt skupienia zbioru Ω_0 w Ω należy do Ω_0. Znaczy to, że Ω_0 jest domknięty w Ω. Ponieważ Ω jest spójny, musi być $\Omega_0 = \Omega$. □

Twierdzenie 6.9.4. *Niech $(a_n)_{n=0}^\infty \subset E$ i załóżmy, że promień zbieżności R szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ jest dodatni. Niech*

$$f(z) := \sum_{n=0}^\infty a_n(z-a)^n, \quad z \in K(a,R).$$

Wtedy $f \in \mathcal{O}(K(R), E)$.

Dowód. Ustalmy $b \in K(a,R)$. Niech $0 < r < R - |b-a|$ i niech $z \in K(b,r)$. Policzmy formalnie:

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^\infty a_n(z-b+b-a)^n = \sum_{n=0}^\infty a_n \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} a_n (z-b)^s(b-a)^{n-s}$$
$$= \sum_{s=0}^\infty \Big(\sum_{n=s}^\infty a_n \binom{n}{s} a_n (b-a)^{n-s}\Big)(z-b)^s.$$

Niech $I := \{(n,s) \in \mathbb{N}_0^2,\ n \geqslant s\}$ i niech $c_{n,s} := a_n\binom{n}{s}(z-b)^s(b-a)^{n-s}$, $(n,s) \in I$. Aby powyższy rachunek formalny był poprawny wystarczy (na podstawie twierdzenia o grupowaniu wyrazów w rodzinach sumowalnych), aby rodzina $(c_{n,s})_{(n,s)\in I}$ była sumowalna. Wiemy, że wystarczy znaleźć bijekcję $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow I$ taką, że $\sum_{k=0}^\infty |c_{\sigma(k)}| < +\infty$. Jako σ przyjmijmy następujące ustawienie zbioru I w ciąg: $(c_{0,0}, c_{1,0}, c_{0,1}, \dots, c_{n,0}, c_{n,1}, \dots, c_{n,n}, \dots)$. Wtedy

$$\sum_{k=0}^\infty |c_{\sigma(k)}| = \sum_{n=0}^\infty \sum_{s=0}^n \|a_n\|\binom{n}{s}|z-b|^s|b-a|^{n-s} = \sum_{n=0}^\infty \|a_n\|(|z-b| + |b-a|)^n < +\infty$$

(korzystamy tu z tego, że $|b-a|+|z-b|<R$). $\square$

Wniosek 6.9.5. (a) *Każdy wielomian $f:\mathbb{K}\longrightarrow E$ jest funkcją analityczną na $\mathbb{K}$.*
(b) $\exp,\sin,\cos,\sinh,\cosh\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Twierdzenie 6.9.6 (Twierdzenie o złożeniu funkcji analitycznych)**.** *Niech $\Omega,U\subset\mathbb{K}$ będą otwarte i niech $f\in\mathcal{C}^\omega(\Omega,E)$, $\varphi\in\mathcal{C}^\omega(U,\mathbb{K})$ będą takie, że $\varphi(U)\subset\Omega$. Wtedy $f\circ\varphi\in\mathcal{C}^\omega(U,E)$.*

Obserwacja 6.9.7. W przypadku $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ powyższe twierdzenie zostanie później udowodnione innymi metodami (Twierdzenie 6.11.4).

Dowód Twierdzenia 6.9.6. Ustalmy $t_0\in U$ i niech $a:=\varphi(t_0)$. Aby uprościć zapis, zauważmy, iż dokonując stosownych translacji, możemy założyć, że $t_0=0$, $a=0$ i $f(a)=0$ (Ćwiczenie). Niech $f(z)=\sum\limits_{n=1}^\infty a_nz^n$, $z\in K(r)\subset\Omega$, oraz $\varphi(t)=\sum\limits_{k=1}^\infty b_kt^k$, $t\in K(\tau)\subset U$. Możemy założyć, że $\sum\limits_{k=1}^\infty |b_k||t|^k<r$ dla $t\in K(\tau)$. W szczególności, $\sum\limits_{n=1}^\infty \|a_n\|\big(\sum\limits_{k=1}^\infty|b_k||t|^k\big)^n<+\infty$, $t\in K(\tau)$.

Cały problem polega na poprawności następującego rachunku formalnego dla $t\in K(\tau)$:

$$f(\varphi(t))=\sum_{n=1}^\infty a_n\Big(\sum_{k=1}^\infty b_kt^k\Big)^n=\sum_{n=1}^\infty a_n\sum_{k=1}^\infty\Big(\sum_{s\in\mathbb{N}^n:\,|s|=k}b_{s_1}\cdots b_{s_n}\Big)t^k=\sum_{k=1}^\infty\Big(\sum_{n=1}^k a_n\sum_{s\in\mathbb{N}^n:\,|s|=k}b_{s_1}\cdots b_{s_n}\Big)t^k.$$

Aby wykazać poprawność tego grupowania wyrazów wystarczy sprawdzić, że rodzina

$$\big(a_nb_{s_1}\cdots b_{s_n}t^k\big)_{k,n\in\mathbb{N},\ n\leqslant k,\ s\in\mathbb{N}^n:\,|s|=k}$$

jest sumowalna. Tak jest, bowiem (por. metoda dowodu Twierdzenia 6.9.4):

$$\sum_{k=1}^\infty\sum_{n=1}^k\sum_{s\in\mathbb{N}^n:\,|s|=k}\|a_nb_{s_1}\cdots b_{s_n}\||t|^k\leqslant\sum_{n=1}^\infty\|a_n\|\Big(\sum_{k=1}^\infty|b_k||t|^k\Big)^n<+\infty.\qquad\square$$

Wniosek 6.9.8. *Niech $f,g\in\mathcal{C}^\omega(\Omega,\mathbb{K})$, $M:=g^{-1}(0)$. Wtedy $\frac{f}{g}\in\mathcal{C}^\omega(\Omega\setminus M,\mathbb{K})$. W szczególności:*
- *funkcje wymierne są analityczne,*
- *funkcje* tg, ctg, tgh *są holomorficzne.*

Dowód. Korzystając z analityczności funkcji $z\longmapsto\frac1z$ i z Twierdzenia 6.9.6, wnioskujemy, że $\frac1g\in\mathcal{C}^\omega(\Omega\setminus M,\mathbb{K})$. Teraz wystarczy już tylko skorzystać z analityczności iloczynu funkcji analitycznych. $\square$

Twierdzenie 6.9.9 (Twierdzenie o funkcji odwrotnej do funkcji analitycznej)**.** *Niech $\Omega,U\subset\mathbb{K}$ będą otwarte i niech $f:\Omega\longrightarrow U$ będzie bijekcją taką, że $f\in\mathcal{C}^\omega(\Omega)$. Przypuśćmy, że dla pewnego $a\in\Omega$ mamy $f(z)=\sum\limits_{n=0}^\infty a_n(z-a)^n$, $z\in K(a,r)\subset\Omega$, przy czym $a_1\neq0$. Niech $a:=g(t_0)$. Wtedy funkcja $g:=f^{-1}$ jest analityczna w otoczeniu t_0.*

Cały czas pamiętajmy o bijekcji $\mathbb{R}\ni x\longmapsto x^3\in\mathbb{R}$, dla której odwzorowanie odwrotne nie jest analityczne.

Obserwacja 6.9.10. W przypadku $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ powyższe twierdzenie zostanie później udowodnione innymi metodami (Twierdzenie 6.11.5).

Dowód Twierdzenia 6.9.9. Bez szkody dla ogólności, po stosownych translacjach, możemy założyć, że $a=0=t_0$ (stąd $a_0=0$). Zastępując funkcję f funkcją $z\longmapsto f(\frac{z}{a_1})$, możemy założyć, że $a_1=1$. Zmieniając znak przy współczynnikach a_n, $n\geqslant2$, możemy założyć, że $f(z)=z-\sum\limits_{n=2}^\infty a_nz^n=:\sum\limits_{n=1}^\infty c_nz^n$.

Przypuśćmy, że $g(t)=\sum\limits_{n=1}^\infty b_nt^n$, $t\in K(\tau)$. Mamy $f(g(t))=t,\in K(\tau)$. A stąd:

$$t=\sum_{n=1}^\infty c_n\Big(\sum_{k=1}^\infty\sum_{s\in\mathbb{N}^n:\,|s|=k}b_{s_1}\cdots b_{s_n}\Big)t^k=\sum_{k=1}^\infty\Big(\sum_{n=1}^k\sum_{s\in\mathbb{N}^n:\,|s|=k}c_nb_{s_1}\cdots b_{s_n}\Big)t^k,$$

czyli $b_1 = 1$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{k} \sum\limits_{s\in\mathbb{N}^n\colon |s|=k} c_n b_{s_1} \cdots b_{s_n} = 0$ dla $k \geqslant 2$. Zapiszmy ostatnie równanie w innej postaci:

$$b_k = \sum_{n=2}^{k} \sum_{s\in\mathbb{N}^n\colon |s|=k} a_n b_{s_1} \cdots b_{s_n} =: P_k(a_2, \dots, a_k, b_1, \dots, b_{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots,$$

co daje rekurencyjny wzór na współczynniki b_k, $k \geqslant 2$. Zauważmy, że współczynniki wielomianu P_k są naturalne oraz, że $b_k = P_k(a_2, \dots, a_k, b_1, \dots, b_{k-1}) \geqslant 0$ dla $a_n \geqslant 0$, $n \geqslant 2$.

Umiemy więc wyznaczyć formalnie współczynniki szeregu funkcji g. Pozostaje sprawdzić, że szereg ten jest zbieżny w pewnym otoczeniu zera. Zastosujemy *metodę majoranty analitycznej.*

Ustalmy $C > 1$ takie, że $|a_n| \leqslant C^n$, $n \in \mathbb{N}$ (por. Twierdzenie 6.6.2) i niech $F(z) := z - \sum_{n=2}^{\infty} C^n z^n = z - \frac{C^2 z^2}{1-Cz}$, $|z| < 1/C$. Mamy $F(0) = 0$. Równanie $F(z) = t$, tzn. $(C^2 + C)z^2 - (1 + Ct)z + t = 0$ ma dla małych $|t|$ jednoznaczne rozwiązanie $G(t) = \frac{(1+Ct)-\sqrt{(1+Ct)^2-4t(C^2+C)}}{2(C^2+C)}$ takie, że $G(0) = 0$. Przypuśćmy na chwilę, że wiemy, że G jest analityczna, $G(t) = B_1 t + \sum\limits_{n=2}^{\infty} B_n t^n$, $|t| < \tau$. Powtarzając poprzednie formalne rozumowanie, mamy $B_1 = 1$ oraz

$$B_k = \sum_{n=2}^{k} \sum_{s\in\mathbb{N}^n\colon |s|=k} C^n B_{s_1} \cdots B_{s_n} = P_k(C^2, \dots, C^k, B_1, \dots, B_{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots,$$

przy czym $B_k \geqslant 0$ oraz $|b_k| \leqslant B_k$, $k \geqslant 2$. W konsekwencji, szereg $z - \sum\limits_{k=2}^{\infty} b_k t^k$ jest zbieżny dla $|t| < \tau$. Wracamy do problemu analityczności G. Zapiszmy $G(t) = \frac{(1+Ct)\left(1-\sqrt{1-\frac{4t(C^2+C)}{(1+Ct)^2}}\right)}{2(C^2+C)}$. Pamiętając o twierdzeniu o składaniu funkcji analitycznych, wnioskujemy, że problem leży w pokazaniu, że funkcja $u \longmapsto \sqrt{1+u}$ jest analityczna w otoczeniu $u = 0$. Przypadek $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ znamy (Przykład 5.6.11(d)).

Pokażemy, że $\sqrt{1+u} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} u^n$ dla $u \in K(1)$. Istotnie, wiemy, że $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\binom{\frac{1}{2}}{n}\right|} = 1$ (Przykład 2.4.3(c)). W szczególności, szereg potęgowy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} u^n$ jest zbieżny w kole $K(1)$.

Pozostaje wykazać, że $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k}\binom{\frac{1}{2}}{n-k} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } n \leqslant 1 \\ 0, & \text{jeżeli } n \geqslant 2 \end{cases}$. Wynika to natychmiast z *identyczności Chu–Vandermonde'a* (22)(23)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{*}$$

W naszym przypadku $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, a więc $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k}\binom{\frac{1}{2}}{n-k} = \binom{1}{n} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } n \leqslant 1 \\ 0, & \text{jeżeli } n \geqslant 2 \end{cases}$.

W przypadku, gdy $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ powyższa identyczność (*) jest elementarna (Ćwiczenie). W przypadku ogólnym niech

$$W(\alpha, \beta) := \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}\Big) - \binom{\alpha+\beta}{n}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Wiemy, że $W(\alpha, \beta) = 0$ dla $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{N}$ funkcja $W(\alpha, \cdot)$ jest wielomianem jednej zmiennej, który zeruje się na $\mathbb{N}$. W takim razie $W(\alpha, \beta) = 0$ dla $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}$. Dla dowolnego $\beta \in \mathbb{C}$ funkcja $W(\cdot, \beta)$ jest wielomianem jednej zmiennej, który zeruje się na $\mathbb{N}$. Stąd $W(\alpha, \beta) = 0$ dla $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. □

---

(22) Chu Shih–chieh (1260–1320).
(23) Alexandre–Théophile Vandermonde (1735–1796).

6.10. Różniczkowanie szeregu wyraz po wyrazie

Twierdzenie 6.10.1 (Twierdzenie o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie)**.** *Niech $P \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem ograniczonym nieredukującym się do punktu, $k \in \mathbb{N}$ i niech $f_n \in \mathcal{D}^k(P, E)$, $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że:*

- *szereg $g_k := \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest zbieżny jednostajnie na P,*
- *istnieją punkty $c_0, \dots, c_{k-1} \in P$ takie, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(j)}(c_j)$ jest zbieżny.*

Wtedy:

- *szereg $g_j := \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(j)}$ jest zbieżny jednostajnie na P, $j = 0, \dots, k-1$,*
- *$g_0 \in \mathcal{D}^k(P, E)$,*
- *$g_0^{(j)} \equiv g_j$, czyli $\big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\big)^{(j)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(j)}$, $j = 1, \dots, k$.*

Dowód. Wystarczy skorzystać z Twierdzenia 5.7.1. □

Korzystając z metody dowodu Twierdzenia 5.7.1 łatwo wykazać (Ćwiczenie) następujące

Twierdzenie 6.10.2 (Twierdzenie o różniczkowaniu rodziny sumowalnej wyraz po wyrazie)**.** *Niech $P \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczonym przedziałem nieredukującym się do punktu, $k \in \mathbb{N}$ i niech $f_i \in \mathcal{D}^k(P, E)$, $i \in I$. Załóżmy, że:*

- *szereg rodzina $(f_i^{(k)})_{i \in I}$ jest jednostajnie sumowalna na P i $g_k := \sum\limits_{i \in I} f_i^{(k)}$,*
- *istnieją punkty $c_0, \dots, c_{k-1} \in P$ takie, że rodzina $(f_i^{(j)}(c_j))_{i \in I}$ jest sumowalna.*

Wtedy:

- *rodzina $(f_i^{(j)})_{i \in I}$ jest jednostajnie sumowalna na P, $g_j := \sum\limits_{i \in I} f_i^{(j)}$, $j = 0, \dots, k-1$,*
- *$g_0 \in \mathcal{D}^k(P, E)$,*
- *$g_0^{(j)} \equiv g_j$, czyli $\big(\sum\limits_{i \in I} f_i\big)^{(j)} = \sum\limits_{i \in I} f_i^{(j)}$, $j = 1, \dots, k$.*

6.11. Funkcje analityczne II

Niech $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ będzie szeregiem potęgowym o współczynnikach z przestrzeni Banacha E nad $\mathbb{R}$ i niech R oznacza jego promień zbieżności (zob. podrozdział 6.6).

Twierdzenie 6.11.1. *Załóżmy, że $R > 0$ i niech $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-R, R) =: P$. Wtedy:*

(a) *dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, promień zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=k}^{\infty} k!\binom{n}{k} a_n x^{n-k}$ jest równy R,*

(b) *$f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} k!\binom{n}{k} a_n x^{n-k}, \quad x \in P$,*

(c) *$f \in \mathcal{C}^\infty(P, E)$,*

(d) *$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$, $k \in \mathbb{N}_0$,*

(e) *dla dowolnego $0 < r < R$ istnieją $C, \varrho > 0$ takie, że*

$$\frac{1}{k!} \sup_{|x| \leqslant r} \|f^{(k)}(x)\| \leqslant \frac{C}{\varrho^k}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Dowód. (a) Szereg $\sum\limits_{n=k}^{\infty} k!\binom{n}{k} a_n x^{n-k}$ powstaje przez k-krotne zróżniczkowanie wyraz po wyrazie. Wystarczy więc zbadać przypadek $k = 1$, czyli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$. Mamy

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{(n+1)\|a_{n+1}\|} = \limsup_{n \to \infty} \Big(\sqrt[n+1]{(n+1)\|a_{n+1}\|}\Big)^{(n+1)/n} = \tfrac{1}{R}.$$

(b) Z (a) wynika, że szereg $\sum\limits_{n=k}^{\infty} k!\binom{n}{k}a_n x^{n-k}$ jest zbieżny lokalnie normalnie w P. Teraz wystarczy zastosować twierdzenie o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie.

(c) i (d) wynika z (b).

(e) Zdefiniujmy

$$\varphi(t) := \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad |t| < 1.$$

Na podstawie dotychczasowego dowodu wiemy, że:

$$\frac{k!}{(1-t)^{k+1}} = \varphi^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} k!\binom{n}{k} t^{n-k}.$$

Ustalmy $0 < r < s < R$ i niech $M := \sup\{\|a_n\| s^n : n \in \mathbb{N}_0\}$. Wobec (b), dla $|x| \leqslant r$ mamy:

$$\begin{aligned}\|f^{(k)}(x)\| &= \Big\| \sum_{n=k}^{\infty} k!\binom{n}{k} a_n x^{n-k} \Big\| \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} k!\binom{n}{k} \frac{M}{s^n} r^{n-k} \\ &= \frac{M}{s^k} \sum_{n=k}^{\infty} k!\binom{n}{k}\Big(\frac{r}{s}\Big)^{n-k} = \frac{M}{s^k}\varphi^{(k)}\Big(\frac{r}{s}\Big) = \frac{M}{s^k}\frac{k!}{(1-\frac{r}{s})^{k+1}} = k!\frac{\frac{M}{1-\frac{r}{s}}}{(s-r)^k}.\end{aligned}$$ □

Wniosek 6.11.2. *Niech $\varOmega \in \operatorname{top}\mathbb{R}$.*

(a) $\mathcal{C}^{\omega}(\varOmega, E) \subset \mathcal{C}^{\infty}(\varOmega, E)$.

(b) $f \in \mathcal{C}^{\omega}(\varOmega, E) \Longrightarrow f' \in \mathcal{C}^{\omega}(\varOmega, E)$.

Twierdzenie 6.11.3. *Niech $\varOmega \in \operatorname{top}\mathbb{R}$ i niech $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\varOmega, E)$. Wtedy*

$$f \in \mathcal{C}^{\omega}(\varOmega, E) \Longleftrightarrow \forall_{K \subset\subset \varOmega}\ \exists_{C>0}\ \exists_{\varrho>0}\ \forall_{k \in \mathbb{N}_0} : \ \frac{1}{k!}\sup_{x\in K}\|f^{(k)}(x)\| \leqslant \frac{C}{\varrho^k}.$$

Dowód. ($\Longleftarrow$): Niech $a \in \varOmega$ i niech $[a-r, a+r] \subset \varOmega$. Niech C i ϱ będą takie, jak w warunku dla $K := [a-r, a+r]$. Bez trudu widzimy, że promień zbieżności szeregu Taylora $T_a f$ musi być co najmniej ϱ. Dalej, korzystając ze wzoru Taylora dla $\mathcal{D}^{n+1}$, dla $|x-a| < \min\{r, \varrho\}$ mamy:

$$\begin{aligned}\Big\| f(x) - \sum_{n=0}^{k}\frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n \Big\| &= \|R_k(f, a, x)\| \\ &\leqslant \frac{\sup_{|\xi-a|\leqslant r}\|f^{(k+1)}(\xi)\|}{(k+1)!}|x-a|^{k+1} \leqslant C\Big(\frac{|x-a|}{\varrho}\Big)^{k+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

($\Longrightarrow$): Rozumujemy lokalnie. Wystarczy wykorzystać Twierdzenie 6.11.1(e). □

Twierdzenie 6.11.3 pozwala w przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ w łatwy sposób udowodnić twierdzenia o składaniu i odwracaniu odwzorowań analitycznych (zob. Twierdzenia 6.9.6 i 6.9.9).

Twierdzenie 6.11.4 (Twierdzenie o składaniu funkcji analitycznych dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)**.** *Niech $P, Q \subset \mathbb{R}$ będą przedziałami otwartymi. Jeżeli $f \in \mathcal{C}^{\omega}(P, E)$, $\varphi \in \mathcal{C}^{\omega}(Q, \mathbb{R})$ oraz $\varphi(Q) \subset P$, to $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^{\omega}(Q)$.*

Dowód. Oczywiście $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(Q, F)$. Niech $K \subset\subset Q$. Ponieważ, φ i f są analityczne, zatem na podstawie Twierdzenia 6.11.3 istnieją stałe $C > 1$, $0 < \varrho < 1$ takie, że

$$\frac{1}{k!}\sup_{t\in K}|\varphi^{(k)}(t)| \leqslant \frac{C}{\varrho^k}, \quad \frac{1}{k!}\sup_{x\in\varphi(K)}\|f^{(k)}(x)\| \leqslant \frac{C}{\varrho^k}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Teraz skorzystamy z Twierdzenia 5.6.12

$$\begin{aligned}\frac{1}{k!}\sup_{t\in K}\|(f\circ\varphi)^{(k)}(t)\| &= \sup_{t\in K}\Big\| \sum_{\alpha\in\Pi_k}\frac{1}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!} f^{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)}(\varphi(t))\Big(\frac{\varphi'(t)}{1!}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(\frac{\varphi^{(k)}(t)}{k!}\Big)^{\alpha_k}\Big\| \\ &\leqslant \sum_{\alpha\in\Pi_k}\frac{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\frac{C}{\varrho^{\alpha_1+\dots+\alpha_k}}\Big(\frac{C}{\varrho}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(\frac{C}{\varrho^k}\Big)^{\alpha_k}\end{aligned}$$

$$= \frac{C}{\varrho^k} \sum_{\alpha\in\Pi_k} \frac{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\Big(\frac{C}{\varrho}\Big)^{\alpha_1+\dots+\alpha_k} \leqslant \frac{C}{\varrho^k}2^{k-1}\Big(\frac{C}{\varrho}\Big)^k = \frac{C/2}{(\frac{\varrho^2}{2C})^k},$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z następującego wzoru:

$$\sum_{\alpha\in\Pi_k} \frac{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!} = 2^{k-1}.$$

Dla dowodu tego wzoru, niech

$$f(x) := \frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-(x-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(1)(x-1)^n, \quad |x-1|<1,$$

$$\varphi(t) := \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)t^n, \quad |t|<1.$$

Wtedy

$$f(\varphi(t)) = \frac{1}{2-\frac{1}{1-t}} = \frac{1-t}{1-2t} = \sum_{n=0}^{\infty}(2t)^n - t\sum_{n=0}^{\infty}(2t)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(f\circ\varphi)^{(n)}(0)t^n, \quad |t|<\tfrac{1}{2}.$$

Teraz, korzystając ze wzoru na pochodną złożenia, dostajemy

$$2^{k-1} = \frac{1}{k!}(f\circ\varphi)^{(k)}(0) = \sum_{\alpha\in\Pi_k}\frac{1}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}f^{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)}(1)\Big(\frac{\varphi'(0)}{1!}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\Big)^{\alpha_k}$$

$$= \sum_{\alpha\in\Pi_k}\frac{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}. \qquad \square$$

Twierdzenie 6.11.5 (Twierdzenie o funkcji odwrotnej do funkcji analitycznej dla $\mathbb{K}=\mathbb{R}$)**.** *Niech $U, V \subset \mathbb{R}$ będą przedziałami otwartymi i niech $f : U \longrightarrow V$ będzie bijekcją klasy $\mathcal{C}^\omega(U)$. Wtedy jeżeli $f'(a)\neq 0$ dla pewnego $a\in U$, to funkcja $g := f^{-1}$ jest klasy $\mathcal{C}^\omega$ w pewnym otoczeniu punktu $b := f(a)$.*

Dowód. ([24]) Możemy założyć, że $f'(x)\neq 0$ dla $x\in U$. Skorzystamy z Twierdzenia 6.11.3. Ustalmy $K \subset\subset V$. Wiemy, że $g\in\mathcal{C}^\infty(V)$ (Twierdzenie 5.5.6). Na podstawie Obserwacji 6.9.2(d) oraz Twierdzenia 6.9.6 wnioskujemy, że $h := \frac{1}{f'} \in \mathcal{C}^\omega(U)$. Istnieją więc stałe C, $\varrho>0$ takie, że

$$\frac{1}{s!}\sup_{y\in K}|h^{(s)}(g(y))| \leqslant \frac{C}{\varrho^s}, \quad s\in\mathbb{N}_0. \tag{†}$$

Teraz udowodnimy indukcyjnie, że

$$\frac{1}{k!}\sup_{y\in K}|g^{(k)}(y)| \leqslant \frac{C_k}{\varrho^{k-1}}, \quad k\in\mathbb{N}_0. \tag{‡}$$

gdzie

$$C_k := (2C)^k(-1)^{k-1}\binom{\frac{1}{2}}{k} = (2C)^k(-1)^{k-1}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!} > 0.$$

Zauważmy, że $\lim\limits_{k\to+\infty}\sqrt[k]{C_k} = 2C$ (Ćwiczenie), a więc (‡) zakończy dowód.

Ponieważ, $g' = h\circ g$, przypadek $k=1$ wynika natychmiast z (†) (z $s=0$). Teraz $k \rightsquigarrow k+1$. Korzystamy z Twierdzenia 5.6.12:

$$\frac{1}{(k+1)!}\sup_{y\in K}|g^{(k+1)}(y)| = \frac{1}{(k+1)!}\sup_{y\in K}|(h\circ g)^{(k)}(y)|$$

$$= \frac{1}{k+1}\sup_{y\in K}\Big|\sum_{\alpha\in\Pi_k}\frac{1}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}h^{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)}(g(y))\Big(\frac{g'(y)}{1!}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(\frac{g^{(k)}(y)}{k!}\Big)^{\alpha_k}\Big|$$

$$\leqslant \frac{1}{k+1}\sum_{\alpha\in\Pi_k}\frac{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\frac{C}{\varrho^{\alpha_1+\dots+\alpha_k}}\Big(\frac{C_1}{\varrho^{1-1}}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(\frac{C_k}{\varrho^{k-1}}\Big)^{\alpha_k}$$

([24]) Zob. S. G. Krantz, H. R. Parks, *A primer of real analytic functions*, Birkhäuser, 2002.

$$= \frac{C}{\varrho^k}\frac{1}{k+1}\sum_{\alpha\in\Pi_k}\frac{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\Big((2C)^1(-1)^{1-1}\binom{\frac12}{1}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big((2C)^k(-1)^{k-1}\binom{\frac12}{k}\Big)^{\alpha_k}$$
$$= \frac{(2C)^{k+1}}{\varrho^k}\frac{(-1)^k}{2(k+1)}\sum_{\alpha\in\Pi_k}\frac{(-1)^{\alpha_1+\dots+\alpha_k}(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\binom{\frac12}{1}^{\alpha_1}\cdots\binom{\frac12}{k}^{\alpha_k}$$
$$\overset{(*)}{=} \frac{(2C)^{k+1}}{\varrho^k}\frac{(-1)^k}{2(k+1)}2(k+1)\binom{\frac12}{k+1} = \frac{C_{k+1}}{\varrho^k},$$

gdzie (*) wynika ze wzoru

$$\sum_{\alpha\in\Pi_k}\frac{(-1)^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\binom{\frac12}{1}^{\alpha_1}\cdots\binom{\frac12}{k}^{\alpha_k} = 2(k+1)\binom{\frac12}{k+1}.$$

Powyższy wzór udowodnimy korzystając ponownie z Twierdzenia 5.6.12 dla funkcji

$$f(x) := \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \quad x\in(-1,1),$$
$$\varphi(t) := 1-\sqrt{1-2t} = -\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac12}{n}(-2t)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n, \quad t\in(-\tfrac12,\tfrac12). \quad (^{25})$$

Niech $h := f\circ\varphi$. Mamy

$$h(t) = f(\varphi(t)) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} = \varphi'(t),$$

a stąd

$$-(k+1)!\binom{\frac12}{k+1}(-2)^{k+1} = \varphi^{(k+1)}(0) = h^{(k)}(0)$$
$$= \sum_{\alpha\in\Pi_k}\frac{k!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}f^{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)}(0)\Big(\frac{\varphi'(0)}{1!}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\Big)^{\alpha_k}$$
$$= k!\sum_{\alpha\in\Pi_k}\frac{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\Big(-\binom{\frac12}{1}(-2)^1\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(-\binom{\frac12}{k}(-2)^k\Big)^{\alpha_k}$$
$$= (-2)^k k!\sum_{\alpha\in\Pi_k}\frac{(-1)^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\binom{\frac12}{1}^{\alpha_1}\cdots\binom{\frac12}{k}^{\alpha_k}. \qquad \square$$

Wniosek 6.11.6. $\log_a\in\mathcal{C}^\omega(\mathbb{R}_{>0})$ *($a>0$, $a\neq1$),* $\arcsin\in\mathcal{C}^\omega((-1,1))$*,* $\arccos\in\mathcal{C}^\omega((-1,1))$*,* $\operatorname{arctg}\in\mathcal{C}^\omega(\mathbb{R})$*,* $\operatorname{arcctg}\in\mathcal{C}^\omega(\mathbb{R})$*.*

6.12. Szereg Taylora

Definicja 6.12.1. Niech $P\subset\mathbb{R}$ będzie przedziałem otwartym, $a\in P$. Niech E będzie przestrzenią Banacha nad $\mathbb{R}$ i niech $f\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{D}^n(P,E;a)$. Wtedy definiujemy *szereg Taylora funkcji f w punkcie a* jako szereg potęgowy postaci

$$(T_af)(x) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n.$$

Obserwacja 6.12.2. (a) (Ćwiczenie*) Istnieje funkcja $f:(-1,1)\longrightarrow\mathbb{R}$ taka, że:

- dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$ istnieje otwarte otoczenie zera U_n takie, że $f|_{U_n}\in\mathcal{C}^n(U_n)$,
- nie istnieje otwarte otoczenie zera U takie, że $f|_U\in\mathcal{C}^\infty(U)$.

(b) Promień zbieżności szeregu Taylora nie musi być dodatni (zob. Twierdzenie Borela (26) 6.12.3), ani też, jeżeli jest dodatni, to wcale nie musi zachodzić równość $T_af=f$ w jakimś otoczeniu punktu a.

Klasyczny przykład to: $f(x):=0$ dla $x\leqslant0$ i $f(x):=\exp(-1/x)$ dla $x>0$, $a:=0$. Wtedy $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ i $T_0f=0$ (por. Obserwacja 5.5.2(g)).

---

(25) korzystamy tu z rozwinięcia $(1+t)^\alpha=\sum_{n=0}^\infty\binom{\alpha}{n}t^n$, $t\in(-\frac12,\frac12)$, $\alpha\in\mathbb{R}$ (Przykład 5.6.11(d)).

(26) Émile Borel (1871–1956).

(c) Jeżeli $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $|x| < R$, jak w Twierdzeniu 6.11.1, to $T_0 f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. W szczególności, jeżeli $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, E)$ ($\Omega \in \operatorname{top} \mathbb{R}$), to dla dowolnego punktu $a \in \Omega$ mamy $T_a f(x) = f(x)$ dla x z pewnego otoczenia punktu a.

Twierdzenie 6.12.3 (Borel)**.** *Dla dowolnego ciągu $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset E$ istnieje funkcja $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, E)$ taka, że $T_0 f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, czyli $\frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$.*

Dowód. Zasadniczym etapem dowodu będzie pokazanie, że dla dowolnego $N \in \mathbb{N}_0$ istnieje funkcja $g_N \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, E)$ taka, że $g_N = 0$ w pewnym otoczeniu zera oraz

$$\sum_{n=0}^{N} \sup_{x \in \mathbb{R}} \|(a_{N+1} x^{N+1} - g_N)^{(n)}(x)\| \leqslant \frac{1}{2^N}. \tag{†}$$

Przypuśćmy, że (†) zachodzi. Wtedy definiujemy

$$f(x) := a_0 + \sum_{N=0}^{\infty} (a_{N+1} x^{N+1} - g_N(x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Warunek (†) gwarantuje, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ szereg $\sum_{N=k}^{\infty} (a_{N+1} x^{N+1} - g_N)^{(k)}$ jest normalnie zbieżny w $\mathbb{R}$. Stąd, wobec Twierdzenia 6.10.1, funkcja f jest poprawnie zdefiniowana, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, E)$ oraz

$$f^{(n)}(0) = \sum_{N=0}^{\infty} (a_{N+1} x^{N+1} - g_N)^{(n)}(0) = \sum_{N=0}^{\infty} (a_{N+1} x^{N+1})^{(n)}(0) = n! a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

co zakończy dowód.

Przystępujemy do realizacji (†). Niech $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$, $\varphi(x) = 0$ dla $|x| \leqslant 1/2$, $\varphi(x) = 1$ dla $|x| \geqslant 1$. Niech $C_n := \sup\{|\varphi^{(n)}(x)| : x \in \mathbb{R}\}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Zauważmy, że $C_0 = 1$ oraz $C_n < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$. Połóżmy

$$h_\varepsilon(x) := \varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) x^{N+1}, \quad x \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0.$$

Wtedy dla $0 < \varepsilon \leqslant 1$ mamy

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{N} \sup_{x \in \mathbb{R}} |(x^{N+1} - h_\varepsilon)^{(n)}(x)| = \sum_{n=0}^{N} \sup_{|x| \leqslant \varepsilon} \Big| \Big(x^{N+1} \Big(1 - \varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\Big)^{(n)} \Big| \\
&= \sum_{n=0}^{N} \sup_{|x| \leqslant \varepsilon} \Big| \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} (x^{N+1})^{(s)} \Big(1 - \varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)^{(n-s)} \Big| \\
&= \sum_{n=0}^{N} \sup_{|x| \leqslant \varepsilon} \Big| - \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n}{s} \binom{N+1}{s} s! x^{N+1-s} \varepsilon^{s-n} \varphi^{(n-s)}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) + \binom{N+1}{n} n! x^{N+1-n} \Big(1 - \varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big) \Big| \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{N} \Big(\sum_{s=0}^{n-1} \binom{n}{s} \binom{N+1}{s} s! \varepsilon^{N+1-s} \varepsilon^{s-n} C_{n-s} + \binom{N+1}{n} n! \varepsilon^{N+1-n} \Big) \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^{N+1-n} \Big(\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \binom{N+1}{s} s! C_{n-s} \Big) \leqslant \varepsilon \sum_{n=0}^{N} \Big(\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \binom{N+1}{s} s! C_{n-s} \Big) = \varepsilon \operatorname{const}(N).
\end{aligned}$$

Teraz jako g_N wystarczy wziąć $a_{N+1} h_\varepsilon$ ze stosownie małym ε. □

ROZDZIAŁ 7

Całka

7.1. Całka Riemanna

Ustalamy przedział $P := [a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$. Niech $|P| := b - a$.

Definicja 7.1.1. *Podziałem* przedziału P nazywamy dowolny ciąg punktów $\pi = (x_0, \dots, x_m)$, gdzie $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ ($m \in \mathbb{N}$). *Średnicą podziału* $\pi = (x_0, \dots, x_m)$ nazywamy liczbę $\operatorname{diam} \pi := \max\{x_j - x_{j-1} : j = 1, \dots, m\}$.

Ciąg $(\pi_k)_{k=1}^{\infty}$ podziałów przedziału P nazywamy *normalnym*, jeżeli $\operatorname{diam} \pi_k \longrightarrow 0$.

Niech $\pi = (x_0, \dots, x_m)$, $\pi' = (x'_0, \dots, x'_n)$ będą podziałami P. Powiemy, że π' *jest wpisany w* π lub też, że π' *jest zagęszczeniem* π, jeżeli $\{x_0, \dots, x_m\} \subset \{x'_0, \dots, x'_n\}$. W tej sytuacji piszemy $\pi' \preccurlyeq \pi$.

Obserwacja 7.1.2. (a) Relacja $\preccurlyeq$ jest przechodnia.

(b) Dla dowolnych podziałów π_1, π_2 przedziału P istnieje podział π taki, że $\pi \preccurlyeq \pi_j$, $j = 1, 2$; π jest *wspólnym zagęszczeniem podziałów* π_1 *i* π_2.

Definicja 7.1.3. Niech $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją ograniczoną. Dla dowolnego przedziału $Q := [p, q] \subset P$ zdefiniujmy $m(f, Q) := \inf f(Q)$, $M(f, Q) := \sup f(Q)$.

Dla dowolnego podziału $\pi = (x_0, \dots, x_m)$ przedziału P połóżmy:

$$L(f, \pi) := \sum_{j=1}^{m} m(f, [x_{j-1}, x_j])(x_j - x_{j-1}), \quad U(f, \pi) := \sum_{j=1}^{m} M(f, [x_{j-1}, x_j])(x_j - x_{j-1}).$$

Czasami, dla uproszczenia zapisu, będziemy pisać $m_j(f) := m(f, [x_{j-1}, x_j])$, $M_j(f) := M(f, [x_{j-1}, x_j])$, $\varDelta x_j := x_j - x_{j-1}$, $j = 1, \dots, m$. Liczbę $L(f, \pi)$ nazywamy *sumą aproksymacyjną dolną dla funkcji* f *przy podziale* π. Analogicznie, $U(f, \pi)$ nazywamy *sumą aproksymacyjną górną*. Sumy te nazywamy o *sumami Darboux*. Zauważmy, że $m(f, P)(b - a) \leqslant L(f, \pi) \leqslant U(f, \pi) \leqslant M(f, P)(b - a)$. Niech

$$\int_{*P} f = \int_{*a}^{b} f := \sup_{\pi} L(f, \pi), \qquad \int_{P}^{*} f = \int_{a}^{*b} f := \inf_{\pi} U(f, \pi),$$

gdzie supremum i infimum bierzemy po wszystkich podziałach P. Liczbę $\int_{*P} f$ nazywamy *całką dolną z funkcji* f. Analogicznie, liczbę $\int_P^*$ nazywamy *całką górną*. Powiemy, że funkcja f jest *całkowalna w sensie Riemanna na przedziale* P ($f \in \mathcal{R}(P, \mathbb{R}) = \mathcal{R}(P)$), jeżeli $\int_{*P} f = \int_P^* f$. Wtedy wspólną wartość tych całek oznaczamy przez $\int_P f \big(= \int_a^b f\big)$ i nazywamy *całką Riemanna z funkcji* f *po przedziale* P.

Dla funkcji ograniczonych $f = u + iv : P \longrightarrow \mathbb{C}$ mówimy, że f jest *całkowalna w sensie Riemanna* ($f \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$), jeżeli $u, v \in \mathcal{R}(P)$. Wtedy przyjmujemy $\int_P f = \int_a^b f := \int_P u + i \int_P v$.

Obserwacja 7.1.4. Zauważmy, że $M(f, Q) - m(f, Q) = \sup\limits_{x', x'' \in Q} (f(x') - f(x'')) = \sup\limits_{x', x'' \in Q} |f(x') - f(x'')|$. W szczególności,

$$U(f, \pi) - L(f, \pi) = \sum_{j=1}^{m} \Big(\sup_{x', x'' \in [x_{j-1}, x_j]} |f(x') - f(x'')| \Big) \varDelta x_j.$$

Przykład 7.1.5. (a) Każda funkcja stała $c \in \mathbb{C}$ jest całkowalna w sensie Riemanna i $\int_P c = c|P|$.

(b) Niech $f := \chi_{P \cap \mathbb{Q}, P}$ (1) będzie funkcją Dirichleta. Wtedy $L(f, \pi) = 0$ oraz $U(f, \pi) = |P|$ dla dowolnego podziału π. Tak więc $\int_{*P} f = 0$ oraz $\int_P^* f = |P|$, czyli $f \notin \mathcal{R}(P)$.

Obserwacja 7.1.6 (Własności całki Riemanna I)**.** Niech $f, g : P \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi, \psi : P \longrightarrow \mathbb{C}$ będą ograniczone i niech π, π_1, π_2 będą podziałami przedziału P.

---

(1) Przypomnijmy, że $\chi_{A,P}$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru $A \subset P$.

(a) Dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$ mamy $L(f+c,\pi) = L(f,\pi) + c|P|$, $U(f+c,\pi) = U(f,\pi) + c|P|$. W konsekwencji,

$$\int_{*P} (f+c) = \Big(\int_{*P} f\Big) + c|P|, \quad \int_P^* (f+c) = \Big(\int_P^* f\Big) + c|P|.$$

W szczególności, dla dowolnego $c \in \mathbb{C}$,

$$\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \iff \varphi + c \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \text{ oraz } \int_P (\varphi + c) = \int_P \varphi + \int_P c.$$

(b) Jeżeli $f \leqslant g$, to $L(f,\pi) \leqslant L(g,\pi)$, $U(f,\pi) \leqslant U(g,\pi)$. Stąd $\int_{*P} f \leqslant \int_{*P} g$ i $\int_P^* f \leqslant \int_P *$. Jeżeli ponadto $f, g \in \mathcal{R}(P)$, to $\int_P f \leqslant \int_P g$ *(monotoniczność całki)*.

(c) $L(-f,\pi) = -U(f,\pi)$. W szczególności,

- $\int_{*P}(-f) = -\int_P^* f$,
- $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \iff -\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$ oraz $\int_P(-\varphi) = -\int_P \varphi$.
- $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \iff \overline{\varphi} \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$ oraz $\int_P \overline{\varphi} = \overline{\int_P \varphi}$.

(d) Jeżeli $\pi_1 \preccurlyeq \pi_2$, to $L(f,\pi_1) \geqslant L(f,\pi_2)$, $U(f,\pi_1) \leqslant U(f,\pi_2)$. W szczególności,

- $L(f,\pi_1) \leqslant U(f,\pi_2)$ dla dowolnych π_1, π_2 (wystarczy wykorzystać poprzednie nierówności dla π i π_j, gdzie π jest wspólnym zagęszczeniem podziałów π_1 i π_2),
- $\int_{*P} f \leqslant \int_P^* f$.

Istotnie, niech $\pi_2 = (x_0,\dots,x_m)$. Wystarczy rozważyć przypadek, gdy $\pi_1 = (x_0,\dots,x_{k-1},x'_k,x_k,\dots,x_m)$. Wtedy

$$L(f,\pi_2) = \sum_{j=1}^{k-1} m_j(f)\Delta x_j + m_k(f)\Delta x_k + \sum_{j=k+1}^{m} m_j(f)\Delta x_j$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{k-1} m_j(f)\Delta x_j + m(f,[x_{k-1},x'_k])(x'_k - x_{k-1}) + m(f,[x'_k,x_k])(x_k - x'_k) + \sum_{j=k+1}^{m} m_j(f)\Delta x_j = L(f,\pi_1).$$

Analogicznie postępujemy dla sum górnych.

(e) $f \in \mathcal{R}(P) \iff \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_\pi : U(f,\pi) - L(f,\pi) \leqslant \varepsilon$. Istotnie, jeżeli $f \in \mathcal{R}(P)$, to dla $\varepsilon > 0$ niech π_1, π_2 będą podziałami takimi, że

$$U(f,\pi_2) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \int_P f \leqslant L(f,\pi_1) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Teraz wystarczy jako π wziąć wspólne zagęszczenie π_1 i π_2 i skorzystać z (d).

Jeżeli spełniony jest warunek po prawej stronie, to ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech π będzie podziałem takim jak w warunku. Wtedy

$$\int_P^* f - \int_{*P} f \leqslant U(f,\pi) - L(f,\pi) \leqslant \varepsilon,$$

co, wobec dowolności ε, daje całkowalność.

(f) Dla każdego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ mamy:

$$L(f,\pi_k) \longrightarrow \int_{*P} f, \quad U(f,\pi_k) \longrightarrow \int_P^* f.$$

Ograniczymy się do sum górnych. Można założyć, że $f \geqslant 0$ (zastępując f przez $f + c$). Weźmy $\varepsilon > 0$ i niech $\pi = (x'_0,\dots,x'_m)$ będzie podziałem takim, że $U(f,\pi) - \int_a^{*b} f \leqslant \varepsilon$. Niech $\pi_k = (x_{k,0},\dots,x_{k,m_k})$, $k \geqslant 1$. Wtedy

$$U(f,\pi_k) = \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,m_k\}:\ \exists_{i\in\{1,\dots,m\}}:\\ [x_{k,j-1},x_{k,j}]\subset[x'_{i-1},x'_i]}} M(f,[x_{k,j-1},x_{k,j}])(x_{k,j} - x_{k,j-1})$$
$$+ \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,m_k\}:\ \forall_{i\in\{1,\dots,m\}}:\\ [x_{k,j-1},x_{k,j}]\not\subset[x'_{i-1},x'_i]}} M(f,[x_{k,j-1},x_{k,j}])(x_{k,j} - x_{k,j-1}) \leqslant U(f,\pi) + M(f,P)\eta_k, \text{ gdzie}$$
$$\eta_k := \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,m_k\}:\ \exists_{i\in\{1,\dots,m-1\}}:\\ x'_i\in(x_{k,j-1},x_{k,j})}} (x_{k,j} - x_{k,j-1}) \leqslant m \operatorname{diam}\pi_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ostatecznie
$$\int_P^* f \leqslant \liminf_{k\to+\infty} U(f,\pi_k) \leqslant \limsup_{k\to+\infty} U(f,\pi_k) \leqslant \int_P^* f + \varepsilon,$$
co, wobec dowolności $\varepsilon > 0$, kończy dowód.

Definicja 7.1.7. Niech $\pi = (x_0,\dots,x_m)$ będzie podziałem P i niech $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_m)$, $\xi_j \in [x_{j-1},x_j]$, $j = 1,\dots,m$. Dla dowolnej funkcji $\varphi : P \longrightarrow \mathbb{C}$ sumę
$$M(f,\pi,\xi) := \sum_{j=1}^m \varphi(\xi_j)\mathit{\Delta} x_j$$
nazywamy *sumą aproksymacyjną pośrednią dla funkcji φ przy podziale π i punktach pośrednich ξ*. Czasami mówimy o *sumie Cauchy'ego–Riemanna.*

Obserwacja 7.1.8. (a) $M(\alpha\varphi + \beta\psi,\pi,\xi) = \alpha M(\varphi,\pi,\xi) + \beta M(\psi,\pi,\xi)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$.
(b) $|M(\varphi,\pi,\xi)| \leqslant M(|\varphi|,\pi,\xi)$.
(c) Dla funkcji ograniczonej $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ mamy: $L(f,\pi) \leqslant M(f,\pi,\xi) \leqslant U(f,\pi)$.

Twierdzenie 7.1.9. *Dla funkcji ograniczonej $\varphi = u+iv : P \longrightarrow \mathbb{C}$ następujące warunki są równoważne:*
(i) *$\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$;*
(ii) *istnieje $c \in \mathbb{C}$ takie, że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^\infty$ (tzn. ξ_k jest zbiorem punktów pośrednich dla π_k) mamy $M(\varphi,\pi_k,\xi_k) \longrightarrow c$;*

równoważnie: dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^\infty$ istnieje $c \in \mathbb{C}$ takie, że $M(\varphi,\pi_k,\xi_k) \longrightarrow c$;
(iii) *istnieje $c \in \mathbb{C}$ takie, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnego podziału π o średnicy $\leqslant \delta$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich ξ mamy $|M(\varphi,\pi,\xi) - c| \leqslant \varepsilon$;*
(iv) *istnieje $c \in \mathbb{C}$ oraz normalny ciąg podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ takie, że dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^\infty$, mamy $M(\varphi,\pi_k,\xi_k) \longrightarrow c$;*

równoważnie: istnieje normalny ciąg podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ takie, że dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^\infty$, istnieje $c \in \mathbb{C}$ takie, że $M(\varphi,\pi_k,\xi_k) \longrightarrow c$.

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (ii) wynika z Obserwacji 7.1.8(c) i 7.1.6(f): $M(\varphi,\pi_k,\xi_k) = M(u,\pi_k,\xi_k) + iM(v,\pi_k,\xi_k) \longrightarrow \int_P u + i\int_P v = \int_P \varphi$.

Równoważność (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) jest elementarna (Ćwiczenie).

Implikacja (ii) $\Longrightarrow$ (iv) jest trywialna.

Dla dowodu implikacji (iv) $\Longrightarrow$ (i) wystarczy zauważyć, że istnieją ciągi punktów pośrednich $(\xi_k')_{k=1}^\infty$, $(\xi_k'')_{k=1}^\infty$ takie, że
$$M(u,\pi_k,\xi_k') - L(u,\pi_k) \leqslant \tfrac{1}{k}, \qquad U(u,\pi_k) - M(u,\pi_k,\xi_k'') \leqslant \tfrac{1}{k}, \quad k \geqslant 1.$$
Wtedy, na podstawie Obserwacji 7.1.6(f),
$$M(u,\pi_k,\xi_k') = \operatorname{Re}(M(\varphi,\pi_k,\xi_k')) \longrightarrow \operatorname{Re} c = \int_{*P} u, \quad M(u,\pi_k,\xi_k'') = \operatorname{Re}(M(\varphi,\pi_k,\xi_k'')) \longrightarrow \operatorname{Re} c = \int_P^* u,$$
a zatem $\int_{*P} u = \int_P^* u$, czyli $u \in \mathcal{R}(P)$. Podobnie rozumujemy dla v. □

Obserwacja 7.1.10. Sumy aproksymacyjne pośrednie można zdefiniować dla dowolnego odwzorowania $\varphi : P \longrightarrow E$, gdzie E jest przestrzenią Banacha. Pozwala to przenieść pojęcie całki Riemanna: odwzorowanie $\varphi : P \longrightarrow F$ nazywamy *całkowalnym w sensie Riemanna* ($\varphi \in \mathcal{R}(P,E)$), jeżeli istnieje $c \in E$ takie, że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich mamy $M(\varphi,\pi_k,\xi_k) \longrightarrow c$. Element c nazywamy wtedy *całką Riemanna odwzorowania φ po P* i oznaczamy $\int_P \varphi$. Twierdzenie 7.1.9 gwarantuje zgodność definicji dla $E = \mathbb{C}$.

Pojawia się tu pewna subtelność: nowa definicja całki obejmuje formalnie funkcje nieograniczone, a Twierdzenie 7.1.9 dotyczy tylko funkcji ograniczonych. Dla usunięcia tego problemu wystarczy zauważyć, że jeżeli funkcja $\varphi : P \longrightarrow E$ jest całkowalna w nowym sensie, to musi być ograniczona. Istotnie, przypuśćmy, że $\sup_P \|\varphi\| = +\infty$ i niech $P \ni a_\nu \longrightarrow a_0 \in P$ będzie ciągiem takim, że $\|\varphi(a_\nu)\| \longrightarrow +\infty$. Weźmy normalny ciąg podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$, $\pi_k = (x_{k,0},\dots,x_{k,m_k})$, taki, że $a_0 \in (x_{k,s_k-1},x_{k,s_k})$. Ustalmy k. Wybierzmy w sposób dowolny punkty pośrednie $\xi_{k,j}$ $j \neq s_k$. Ponieważ $\sup_{(x_{k,s_k-1},x_{k,s_k})} \|\varphi\| = +\infty$, to zawsze znajdziemy punkt ξ_{k,s_k} taki, że $\|M(\varphi,\pi_k,\xi_k)\| \geqslant k$. Mamy więc $\|M(\varphi,\pi_k,\xi_k)\| \longrightarrow +\infty$, czyli φ nie może być całkowalna w nowym sensie.

Ćwiczenie* 7.1.11. Proszę na bieżąco sprawdzać, które z poznawanych własności funkcji klasy $\mathcal{R}(P,\mathbb{C})$ przenoszą się na $\mathcal{R}(P,E)$.

Obserwacja 7.1.12 (Własności całki Riemanna II). (a) Niech $f: P \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją monotoniczną. Wtedy $f \in \mathcal{R}(P)$.

Istotnie, możemy założyć, że f jest rosnąca. Wtedy $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$, $x \in P$, a zatem f jest ograniczona. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy podział $\pi_n = (x_{n,0},\dots,x_{n,n})$, $x_{n,j} := a + \frac{j}{n}(b-a)$, $j = 0,1,\dots,n$. Mamy

$$U(f,\pi_n) - L(f,\pi_n) = \sum_{j=1}^{n}(f(x_{n,j}) - f(x_{n,j-1}))\frac{b-a}{n} = (f(b)-f(a))\frac{b-a}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

i korzystamy z Obserwacji 7.1.6(e).

(b) $\mathcal{R}(P,\mathbb{K})$ jest $\mathbb{K}$-przestrzenią wektorową, a operator $\mathcal{R}(P,\mathbb{K}) \ni \varphi \longmapsto \int_P \varphi \in \mathbb{K}$ jest $\mathbb{K}$-liniowy.

(c) Jeżeli $\psi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$, $\varphi : P \longrightarrow \mathbb{C}$ jest ograniczona oraz $|\varphi(x')-\varphi(x'')| \leqslant |\psi(x')-\psi(x'')|$, $x', x'' \in P$, to $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$. Istotnie, korzystając z Obserwacji 7.1.4 mamy

$$\begin{aligned}
U(\operatorname{Re}\varphi,\pi) - L(\operatorname{Re}\varphi,\pi) &= \sum_{j=1}^{m}\big(\sup_{x',x''\in[x_{j-1},x_j]} |\operatorname{Re}\varphi(x') - \operatorname{Re}\varphi(x'')|\big)\varDelta x_j \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{m}\big(\sup_{x',x''\in[x_{j-1},x_j]} |\varphi(x') - \varphi(x'')|\big)\varDelta x_j \leqslant \sum_{j=1}^{m}\big(\sup_{x',x''\in[x_{j-1},x_j]} |\psi(x') - \psi(x'')|\big)\varDelta x_j \\
&\leqslant \big(U(\operatorname{Re}\psi,\pi) - L(\operatorname{Re}\psi,\pi)\big) + \big(U(\operatorname{Im}\psi,\pi) - L(\operatorname{Im}\psi,\pi)\big).
\end{aligned}$$

Teraz możemy skorzystać z Obserwacji 7.1.6(e). Podobnie postępujemy dla $\operatorname{Im}\varphi$.

(d) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$, to $|\varphi| \in \mathcal{R}(P)$ oraz $\big|\int_P \varphi\big| \leqslant \int_P |\varphi|$.

Istotnie, całkowalność $|\varphi|$ wynika z (c). Jeżeli $\varphi : P \longrightarrow \mathbb{R}$, to nierówność wynika natychmiast z monotoniczności całki. W przypadku zespolonym niech $\alpha \in \mathbb{T}$ będzie takie, że $\alpha\int_P\varphi = |\int_P\varphi|$. Wtedy

$$\Big|\int_P \varphi\Big| = \alpha\int_P \varphi = \int_P (\alpha\varphi) = \int_P \operatorname{Re}(\alpha\varphi) \leqslant \int_P |\varphi|.$$

(e) Jeżeli φ, $\psi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$, to $\varphi\psi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$.

Istotnie, niech $|\varphi|, |\psi| \leqslant C$. Wtedy:

$$|\varphi(x')\psi(x') - \varphi(x'')\psi(x'')| \leqslant C(|\varphi(x') - \varphi(x'')| + |\psi(x') - \psi(x'')|), \quad x', x'' \in P.$$

Teraz możemy użyć rozumowania takiego, jak w (c).

(f) Operator $\mathcal{R}(P,\mathbb{K}) \times \mathcal{R}(P,\mathbb{K}) \ni (\varphi,\psi) \longmapsto \int_P \varphi\overline{\psi} \in \mathbb{K}$ jest semi-iloczynem skalarnym. W konsekwencji (zob. Twierdzenie 5.11.22), zachodzi nierówność Schwarza dla całek Riemanna:

$$\Big|\int_P \varphi\overline{\psi}\Big| \leqslant \sqrt{\int_P |\varphi|^2}\sqrt{\int_P |\psi|^2}, \quad \varphi,\psi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C}).$$

(g) Funkcja $\mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \ni \varphi \overset{\|\,\|_{\mathcal{R}}}{\longmapsto} \sqrt{\int_a^b |\varphi|^2}$ jest seminormą (Twierdzenie 5.11.23).

(h) $\mathcal{C}(P,\mathbb{C}) \subset \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$.

Istotnie, możemy założyć, że $\varphi : P \longrightarrow \mathbb{R}$. Dla $\varepsilon > 0$, wobec jednostajnej ciągłości funkcji φ na P, istnieje $\delta > 0$ takie, że $|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leqslant \varepsilon$ o ile $|x' - x''| \leqslant \delta$. Niech π będzie podziałem P o średnicy $\leqslant \delta$. Wtedy $U(\varphi,\pi) - L(\varphi,\pi) \leqslant \varepsilon|P|$.

(i) Jeżeli $0 \leqslant f \in \mathcal{C}(P)$ i $\int_P f = 0$, to $f \equiv 0$.

(j) $\|\,\|_{\mathcal{R}}$ jest normą na przestrzeni $\mathcal{C}(P,\mathbb{C})$.

(k) Niech $a < c < b$. Wtedy $\varphi \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{C}) \iff \varphi|_{[a,c]} \in \mathcal{R}([a,c],\mathbb{C})$, $\varphi|_{[c,b]} \in \mathcal{R}([c,b],\mathbb{C})$. Ponadto,

$$\int_a^b \varphi = \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi.$$

Istotnie, jeżeli $\varphi|_{[a,c]} \in \mathcal{R}([a,c],\mathbb{C})$, $\varphi|_{[c,b]} \in \mathcal{R}([c,b],\mathbb{C})$, to niech $(\pi'_k)_{k=1}^{\infty}$ (odp. $(\pi''_k)_{k=1}^{\infty}$) będzie normalnym ciągiem podziałów $[a,c]$ (odp. $[c,b]$) takim, że przy dowolnym wyborze punktów pośrednich $(\xi'_k)_{k=1}^{\infty}$ (odp. $(\xi''_k)_{k=1}^{\infty}$) mamy $M(\varphi,\pi'_k,\xi'_k) \longrightarrow \int_a^c \varphi$ (odp. $M(\varphi,\pi''_k,\xi''_k) \longrightarrow \int_c^b \varphi$. Zestawiając podziały π'_k i π''_k, $k \in \mathbb{N}$, dostajemy normalny ciąg podziałów $(\pi_k)_{k=1}^{\infty}$ przedziału $[a,b]$ taki, że dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ mamy: $M(\varphi,\pi_k,\xi_k) \longrightarrow \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi$. Oznacza to, że $\varphi \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{C})$ oraz $\int_a^b \varphi = \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi$.

Dla dowodu implikacji przeciwnej, wystarczy rozważyć przypadek, gdy $\varphi = f \in \mathcal{R}([a,b])$. Dla $\varepsilon > 0$ niech π będzie podziałem $[a,b]$ takim, że $U(f,\pi) - L(f,\pi) \leqslant \varepsilon$. Zauważmy, że zawsze możemy założyć, że $c \in \pi$. Istotnie, jeżeli $\widetilde{\pi}$ jest podziałem powstałym przed dołożenie c, to na podstawie Obserwacji 7.1.6(d), $U(f,\widetilde{\pi}) - L(f,\widetilde{\pi}) \leqslant U(f,\pi) - L(f,\pi)$.

Jeżeli $c \in \pi$, to π rozpada się na podział π' przedziału $[a,c]$ i podział $[\pi'']$ przedziału $[c,b]$. Stąd $\varepsilon \geqslant U(f,\pi) - L(f,\pi) = \big(U(f,\pi') - L(f,\pi')\big) + \big(U(f,\pi'') - L(f,\pi'')\big)$, co dowodzi całkowalności φ na obu przedziałach.

(l) Przestrzeń $\mathcal{C}(P,\mathbb{C}), \|\ \|_{\mathcal{R}})$ nie jest zupełna.

Istotnie, niech $f_n : [0,1] \longrightarrow [0,1]$,

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}), & \text{jeżeli } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1, & \text{jeżeli } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}, \quad f := \chi_{(1/2,1]}.$$

Oczywiście $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}(P)$. Łatwo sprawdzić, że $\|f_n - f\|_{\mathcal{R}} \longrightarrow 0$ (Ćwiczenie). W szczególności, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $(\mathcal{C}(P,\mathbb{C}), \|\ \|_{\mathcal{R}})$. Przypuśćmy, że $\|f_n - g\|_{\mathcal{R}} \longrightarrow 0$ dla pewnej funkcji $g \in \mathcal{C}(P,\mathbb{C})$. Wtedy $\int_P |f-g|^2 = 0$. Stąd $g = 0$ na $[0,\frac{1}{2})$ i $g = 1$ na $(\frac{1}{2},1]$; sprzeczność.

(m) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$, to dla dowolnego $[p,q] \subset P$ mamy $\varphi|_{[p,q]} \in \mathcal{R}([p,q],\mathbb{C})$.

(n) (Twierdzenie o wartości średniej.) Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{C}(P)$ istnieje $\xi \in P$ taki, że

$$f(\xi) = \frac{1}{|P|}\int_P f.$$

Istotnie, $\min f(P) \leqslant \frac{1}{|P|}\int_P f \leqslant \max f(P)$ i teraz wystarczy skorzystać z zasady Darboux.

(o) Jeżeli $\mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \ni \varphi_n \longrightarrow \varphi$ jednostajnie na P, to $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$ i $\int_P \varphi_n \longrightarrow \int_P \varphi$.

Istotnie, możemy założyć, że $\varphi_n = f_n : P \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, oraz $\varphi = f : P \longrightarrow \mathbb{R}$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech n_0 będzie takie, że

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant \varepsilon + |f_{n_0}(x') - f_{n_0}(x'')|, \quad x', x'' \in P.$$

Niech π będzie podziałem P takim, że $U(f_{n_0},\pi) - L(f_{n_0},\pi) \leqslant \varepsilon$. Wtedy $U(f,\pi) - L(f,\pi) \leqslant \varepsilon(b-a) + \varepsilon$. Wynika stąd całkowalność funkcji f. Zbieżność całek wynika bezpośrednio z nierówności

$$\Big|\int_P \varphi_n - \int_P \varphi\Big| \leqslant \int_P |\varphi_n - \varphi| \leqslant |P|(\sup_P |\varphi_n - \varphi|).$$

(p) Niech $\varphi_n \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}_0$. Załóżmy, że szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi_n$ jest zbieżny jednostajnie. Wtedy suma szeregu funkcyjnego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi_n$ jest funkcją całkowalną oraz

$$\int_P \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_P \varphi_n.$$

(q) Niech $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_1, q_2, \dots\}$ i niech $f_n := \chi_{\{q_1,\dots,q_n\},[0,1]}$, $f := \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1],[0,1]}$ (funkcja Dirichleta). Wtedy $\int_0^1 f_n = 0$, $f_n \longrightarrow f$ punktowo, ale $f \notin \mathcal{R}([0,1])$.

(r) Niech $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 x, & \text{jeżeli } x \in [0,\frac{1}{n}) \\ -n^2 x + 2n, & \text{jeżeli } x \in [\frac{1}{n},\frac{2}{n}) \\ 0, & \text{jeżeli } x \in [\frac{2}{n},1] \end{cases}, \quad n \geqslant 2.$$

Wtedy $f_n \in \mathcal{C}([0,1])$, $f_n \longrightarrow 0$ punktowo, ale $\int_0^1 f_n = 1$, $\int_0^1 f = 0$.

Definicja 7.1.13. Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma *miarę Jordana zero* ($|A| = 0$), jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje skończona rodzina przedziałów $P_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, m$, taka że $A \subset \bigcup_{j=1}^{m} P_j$ i $\sum_{j=1}^{m}(b_j - a_j) \leqslant \varepsilon$.

Obserwacja 7.1.14. (a) Zawsze możemy założyć, że $P_1, \dots, P_m$ są parami rozłączne.
(b) Jeżeli $|A| = 0$, to A jest ograniczony.
(c) Jeżeli A jest skończony, to $|A| = 0$.
(d) Jeżeli $|A| = 0$ i $B \subset A$, to $|B| = 0$.
(e) Jeżeli $|A_1| = \dots = |A_m| = 0$, to $|A_1 \cup \dots \cup A_m| = 0$.
(f) Jeżeli $\mathbb{R} \ni a_n \longrightarrow a_0 \in \mathbb{R}$, to zbiór $\{a_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ ma miarę Jordana zero.
(g) Jeżeli $|A| = 0$, to $|\overline{A}| = 0$.

Przykład 7.1.15. Zbiór Cantora $C \subset [0, 1]$ ma miarę Jordana zero (zob. Przykład 3.2.4).

Istotnie, wiemy, że $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$, gdzie $C_n = \bigcup_{j=1}^{2^n} C_{n,j}$, gdzie $C_{n,j}$, $j = 1, \dots, 2^n$, są przedziałami domkniętymi, parami rozłącznymi, każdy o długości $\frac{1}{3^n}$. Oznacza to, że suma długości przedziałów wchodzących w skład C_n jest równa $(\frac{2}{3})^n$.

Obserwacja 7.1.16 (Własności całki Riemanna III)**.** (a) Niech $\varphi : P \longrightarrow \mathbb{C}$ będzie ograniczona i niech

$$N_P(\varphi) := \{a \in P : \varphi \text{ nie jest ciągła w punkcie } a\}$$

ma miarę Jordana zero. Wtedy $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$.

Istotnie, możemy założyć, że $f = \varphi : P \longrightarrow \mathbb{R}$. Niech $|f| \leqslant C$ i ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $[a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, m$, będą przedziałami parami rozłącznymi takimi, że $N_P(f) \subset \bigcup_{j=1}^{m}(a_j, b_j)$ oraz $\sum_{j=1}^{m}(b_j - a_j) \leqslant \varepsilon$. Niech $K := P \setminus \bigcup_{j=1}^{m}(a_j, b_j)$. Zbiór K jest zwarty i f jest ciągła na K. Zatem jest jednostajnie ciągła. Niech $\delta > 0$ będzie takie, że $|f(x') - f(x'')| \leqslant \varepsilon$ dla $x', x'' \in K$, $|x' - x''| \leqslant \delta$. Rozważmy podział $\pi = (x_0, \dots, x_r)$ przedziału P taki, że $\operatorname{diam} \pi \leqslant \delta$ oraz $\{a_1, b_1, \dots, a_m, b_m\} \cap P \subset \{x_0, \dots, x_r\}$. Wtedy

$$\begin{aligned} U(f, \pi) - L(f, \pi) &= \sum_{\substack{j \in \{1,\dots,r\}: \\ [x_{j-1}, x_j] \subset K}} (M_j(f) - m_j(f))\Delta x_j + \sum_{\substack{j \in \{1,\dots,r\}: \\ (x_{j-1}, x_j) \subset P \setminus K}} (M_j(f) - m_j(f))\Delta x_j \\ &\leqslant \sum_{\substack{j \in \{1,\dots,r\}: \\ [x_{j-1}, x_j] \subset K}} \varepsilon \Delta x_j + \sum_{\substack{j \in \{1,\dots,r\}: \\ (x_{j-1}, x_j) \subset P \setminus K}} 2C\Delta x_j \leqslant \varepsilon(|P| + 2C). \end{aligned}$$

(b) Niech $\varphi, \psi : P \longrightarrow \mathbb{C}$ będą ograniczone. Jeżeli zbiór $D_P(\varphi, \psi) := \{a \in P : \varphi(a) \neq \psi(a)\}$ ma miarę Jordana zero, to $\varphi \in \mathcal{R}(P) \iff \psi \in \mathcal{R}(P)$. Ponadto, $\int_P \varphi = \int_P \psi$.

Istotnie, możemy założyć, że $f = \varphi, g = \psi : P \longrightarrow \mathbb{R}$. Przypuśćmy, że $|f|, |g| \leqslant C$ oraz $g \in \mathcal{R}(P)$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i niech $[a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, m$, będą przedziałami parami rozłącznymi takimi, że $D_P(f, g) \subset \bigcup_{j=1}^{m}(a_j, b_j)$ oraz $\sum_{j=1}^{m}(b_j - a_j) \leqslant \varepsilon$. Niech $K := P \setminus \bigcup_{j=1}^{m}(a_j, b_j)$. Rozważmy podział $\pi = (x_0, \dots, x_r)$ przedziału P taki, że $\{a_1, b_1, \dots, a_m, b_m\} \cap P \subset \{x_0, \dots, x_r\}$. Wtedy

$$\begin{aligned} U(f, \pi) - L(f, \pi) &= \sum_{\substack{j \in \{1,\dots,r\}: \\ [x_{j-1}, x_j] \subset K}} (M_j(f) - m_j(f))\Delta x_j + \sum_{\substack{j \in \{1,\dots,r\}: \\ (x_{j-1}, x_j) \subset P \setminus K}} (M_j(f) - m_j(f))\Delta x_j \\ &\leqslant U(g, \pi) - L(g, \pi) + 2C\varepsilon, \end{aligned}$$

skąd łatwo wynika, że $f \in \mathcal{R}(P)$. Ponadto,

$$\Big| \int_P f - \int_P g \Big| \leqslant \sum_{\substack{j \in \{1,\dots,r\}: \\ [x_{j-1}, x_j] \subset P \setminus K}} \int_{[x_{j-1}, x_j]} |f - g| \leqslant 2C\varepsilon,$$

co dowodzi równości obu całek.

(c) Relacja $\varphi \sim \psi :\iff D_P(\varphi,\psi)$ ma miarę Jordana zero, jest relacją równoważnościową w $\mathcal{R}(P,\mathbb{C})$; całka Riemanna jest dobrze określonym operatorem liniowym $\mathcal{R}(P,\mathbb{C})/\sim \longrightarrow \mathbb{C}$.

(d) Jeżeli $0 \leqslant f \in \mathcal{R}(P)$ i $\int_P f = 0$, to zbiór $Z_f := \{x \in P : f(x) > 0\}$ jest przeliczalną sumą zbiorów miary Jordana zero.

Wystarczy pokazać, że dla dowolnego $c > 0$ zbiór $A := \{x \in P : f(x) \geqslant c\}$ ma miarę Jordana zero. Weźmy $\varepsilon > 0$ i podział $\pi = (x_0, \dots, x_m)$ taki, że $U(f,\pi) \leqslant \varepsilon$. Wtedy

$$\varepsilon \geqslant U(f,\pi) \geqslant c \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,m\}:\\ A\cap[x_{j-1},x_j]\neq\varnothing}} (x_j - x_{j-1}).$$

Wynika stąd, że A można pokryć skończoną liczbą przedziałów o łącznej długości $\leqslant \varepsilon/c$.

(e) Zbiór Z_f w (d) może nie mieć miary Jordana zero. Dla przykładu, niech $P \cap \mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots\}$ i niech $f : P \longrightarrow [0,1]$, $f(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{j}, & \text{jeżeli } x = r_j \end{cases}$. Oczywiście, zbiór $Z_f = P \cap \mathbb{Q}$ nie ma objętości zero, ale $\int_P f = 0$. Istotnie, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ rozważmy podział $\pi = (x_0, \dots, x_m)$ $(m \geqslant k)$ taki, że $\sum\limits_{j\in I}(x_j - x_{j-1}) \leqslant \frac{1}{k}$, gdzie $I := \{j \in \{1,\dots,m\} : [x_{j-1},x_j] \cap \{r_1,\dots,r_k\} \neq \varnothing\}$. Wtedy

$$U(f,\pi) = \sum_{j\in I} M_j(f)\varDelta x_j + \sum_{j\notin I} M_j(f)\varDelta x_j \leqslant \sum_{j\in I} \varDelta x_j + \sum_{j\notin I} \frac{1}{k+1}\varDelta x_j \leqslant \frac{1}{k} + \frac{|P|}{k+1}.$$

Obserwacja 7.1.17. (a) W przyszłości poznamy następujące ważne twierdzenie: $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \iff$ *$N_P(\varphi)$ ma miarę Lebesgue'a zero, tzn. dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje co najwyżej przeliczalna rodzina przedziałów $P_j = [a_j, b_j]$, $j \in I$, taka że $N_P(\varphi) \subset \bigcup\limits_{j\in I} P_j$ i $\sum\limits_{j\in I}(b_j - a_j) \leqslant \varepsilon$.*

(b) Oczywiście, każdy zbiór miary Jordana zero ma miarę Lebesgue'a zero.

(c) Zauważmy, że jeżeli $A_k \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem o mierze Lebesgue'a zero, $k \in \mathbb{N}$, to zbiór $A := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ ma miarę Lebesgue'a zero.

Istotnie, niech $\varepsilon > 0$ i niech $P_{k,j} = [a_{k,j}, b_{k,j}]$, $j \in I(k)$, będzie co najwyżej przeliczalną rodziną przedziałów takich, że $A_k \subset \bigcup\limits_{j\in I(k)} P_{k,j}$ oraz $\sum\limits_{j\in I(k)} (b_{k,j} - a_{k,j}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^k}$. Wtedy $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j\in I(k)} P_{k,j}$ oraz $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{j\in I(k)} (b_{k,j} - a_{k,j}) \leqslant \varepsilon$.

7.2. Pierwotne

W tym podrozdziale $P = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$.

Definicja 7.2.1. Powiemy, że funkcja $F : P \longrightarrow \mathbb{R}$ jest *pierwotną* lub *całką nieoznaczoną* funkcji $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ jeżeli:

- F jest ciągła,
- istnieje co najwyżej przeliczalny zbiór $S \subset P$ taki, że $F'(x)$ istnieje oraz $F'(x) = f(x)$ dla dowolnego $x \in P \setminus S$.

Piszemy wtedy $F(x) = \int f(x)dx + C$, lub też $F(x) = \int f(x)dx$ pamiętając, że do F zawsze można dodać stałą. Będziemy pisać $S = S_F$, choć oczywiście zbiór S nie jest wyznaczony jednoznacznie.

Przykład 7.2.2. Funkcja $F(x) := \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$, jest pierwotną funkcji $f(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{jeżeli } x \neq 0 \end{cases}$ $(S_F = \{0\})$.

Obserwacja 7.2.3. (a) Jeżeli F_j jest pierwotną funkcji f_j, $j = 1,2$, to $\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$ jest pierwotną funkcji $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ $(S_{\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2} \subset S_{F_1} \cup S_{F_2})$.

(b) Jeżeli F_1, F_2 są pierwotnymi funkcji f, to $F_1 - F_2 \equiv \text{const}$ (por. Wniosek 5.4.3).

(c) Równość $\int f(x)dx = \int g(x)dx$, $x \in P$, będziemy zawsze rozumieć z dokładnością do stałej.

(d) Jeżeli $f, g : P \longrightarrow \mathbb{R}$ różnią się na zbiorze co najwyżej przeliczalnym i F jest pierwotną f, to F jest również pierwotną g.

Twierdzenie 7.2.4. *Niech F będzie pierwotną funkcji f. Załóżmy, że funkcja f jest ciągła w pewnym punkcie $c \in P$. Wtedy $F'(c)$ istnieje oraz $F'(c) = f(c)$. W szczególności, jeżeli $f \in \mathcal{C}(P)$, to $F \in \mathcal{D}(P)$ oraz $F'(x) = f(x)$, $x \in P$.*

Dowód. Niech $S := S_F$. Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych (Wniosek 5.4.4) mamy

$$\Big|\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)\Big| \leqslant \frac{1}{|h|}\big(\sup\{|F'(\xi) - f(c)| : \xi \in [c, c+h] \setminus S\}\big)|h| \\ \leqslant \sup\{|f(\xi) - f(c)| : \xi \in [c, c+h]\} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0. \quad \square$$

Obserwacja 7.2.5 (Pierwotne funkcji elementarnych)**.** Uwaga: W każdym przedziale, z którego składa się zbiór po prawej stronie wzoru, do wzoru na pierwotną można dodać dowolną stałą.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \neq 0,\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}; \qquad \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\};$$
$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|, \quad x \neq 0; \qquad \int e^x dx = e^x, \quad x \in \mathbb{R};$$
$$\int \sin x dx = -\cos x, \quad x \in \mathbb{R}; \qquad \int \cos x dx = \sin x, \quad x \in \mathbb{R};$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}; \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\};$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x, \quad x \in (-1,1); \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenie 7.2.6 (Wzór na całkowanie przez części I)**.** *Jeżeli $f, g \in \mathcal{C}^1(P)$, to*

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx, \quad x \in P,$$

w tym sensie, że $\int f'(x)g(x)dx$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\int f(x)g'(x)dx$ istnieje i ponadto zachodzi powyższa równość (z dokładnością do stałej).

Dowód. Przypuśćmy, że $H'(x) = f(x)g'(x)$, $x \in P$ (korzystamy z Twierdzenia 7.2.4). Wtedy $(fg - H)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f(x)g'(x) = f'(x)g(x)$, $x \in P$. Podobnie, jeżeli $\int f'(x)g(x)$ istnieje. $\square$

Przykład 7.2.7. (a) $\int x\cos x dx = \int x(\sin x)' dx = x\sin x - \int x' \sin x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x$.

Uwaga: Jeżeli źle zaczniemy stosować wzór na całkowanie przez części, to sytuacja, zamiast się uprościć, może się skomplikować, np. $\int x \cos x dx = \int (\frac{x^2}{2})' \cos x dx = \frac{x^2}{2}\cos x + \int \frac{x^2}{2} \sin x dx$.

(b) $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x$.

(c) $\int \ln x dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x(\ln x - 1)$.

(d) $\int x^\alpha \ln x dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\frac{1}{x}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\big(\ln x - \frac{1}{\alpha+1}\big)$, $\alpha \neq -1$.

(e) $I := \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - (-e^x\cos x + \int e^x \cos x dx) = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$. Stąd $I = e^x(\sin x + \cos x) - I$, a więc $I = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x)$. Przykład ten ilustruje ważną technikę obliczania całek nieoznaczonych, w której problem obliczenia całki nieoznaczonej $I = \int f(x)dx$ sprowadza się do ułożenia pewnego równania funkcyjnego spełnianego przez tę całkę.

(f) $\int e^x \sin x dx =$ĆWICZENIE.

(g) Niech $I_n := \int \sin^n x dx$, $x \in \mathbb{R}$. Dla $n = 2$ mamy: $I_2 = \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int(1 - \cos 2x)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$. Wzór rekurencyjny $I_n \rightsquigarrow I_{n-2}$:

$$I_n = \int \sin^{n-1} x(-\cos x)' dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

Wynika stąd, że $I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

Twierdzenie 7.2.8 (Wzór na całkowanie przez podstawienie I)**.** *Niech $f \in \mathcal{C}(P)$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(Q)$, $\varphi(Q) \subset P$. Wtedy*

$$\Big(\int f(t)dt\Big)\Big|_{t=\varphi(x)} = \int f(\varphi(x)\varphi'(x)dx, \quad x \in Q,$$

w tym sensie, że:
- *jeżeli $\int f(t)dt$ istnieje, to $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ istnieje i zachodzi powyższa równość;*
- *jeżeli $\varphi : Q \longrightarrow P$ jest bijekcją, $\varphi'(x) \neq 0$, $x \in Q$, oraz $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ istnieje, to $\int f(t)dt$ istnieje i zachodzi powyższa równość.*

Dowód. Niech $F'(t) = f(t)$, $t \in P$ (korzystamy z Twierdzenia 7.2.4). Wtedy $(F\circ\varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x)$, $x \in Q$.

Niech $H'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$, $x \in Q$. Wtedy $(H\circ\varphi^{-1})'(t) = H'(\varphi^{-1}(t))(\varphi^{-1})'(t) = H'(\varphi^{-1}(t))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} = f(t)\varphi'(\varphi^{-1}(t))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} = f(t)$. $\square$

Przykład 7.2.9. (a) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \underset{\substack{t=\sqrt{x}\\ dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}}{=} \int 2e^t dt = 2e^{\sqrt{x}}$.

(b) $\int e^{\sin x}\cos x dx \underset{\substack{t=\sin x\\ dt=\cos x\ dx}}{=} \int e^t\ dt = e^t = e^{\sin x}$.

(c) $\int x^2\sqrt{1+x^3}dx \underset{\substack{t=1+x^3\\ dt=3x^2\ dx}}{=} \frac{1}{3}\int \sqrt{t}\ dt = \frac{2}{9}t^{3/2} = \frac{2}{9}(\sqrt{1+x^3})^3$.

Przykład 7.2.10 (Całka z pochodnej logarytmicznej)**.** Niech $\varphi : P \longrightarrow \mathbb{R}_*$ będzie funkcją różniczkowalną. Wtedy $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = (\int \frac{1}{t}dt)|_{t=\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)|$, $x \in P$.

Dla przykładu: $\int \operatorname{tg} x dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx = -\ln|\cos x|$, $\int \operatorname{ctg} x dx =$Ćwiczenie.

Obserwacja 7.2.11. Istnieje wiele klas funkcji f, dla których są znane efektywne metody obliczania całki nieoznaczonej $\int f(x)dx$. Jest tak np. gdy f jest funkcją wymierną. Jest jednak wiele *całek nieelementarnych*, np. $\int \frac{e^x}{x}dx$. Przypomnijmy sobie, że całka $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2e^{\sqrt{x}}$ jest elementarna.

Inne całki nieelementarne to np.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx, \quad \int e^{-x^2}dx, \quad \int \frac{1}{\ln x}dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\ dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}dx.$$

7.3. Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego

W tym podrozdziale $P = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$.

Twierdzenie 7.3.1. *Niech $f \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$, $a \in P$. Wtedy funkcja*

$$F : P \longrightarrow \mathbb{C}, \quad F(x) := \int_a^x f, \quad x \in P,$$

spełnia warunek Lipschitza. W szczególności, $F \in \mathcal{C}(P, \mathbb{C})$.

Przyjmujemy, że $\int_a^x f := -\int_x^a f$ dla $x < a$ oraz $\int_a^a f = 0$.

Dowód. Odnotujmy, że F jest poprawnie określona. Niech $|f| \leqslant C$ i niech $x', x'' \in P$, $x' < x''$. Wtedy

$$|F(x') - F(x'')| = \Big|\int_a^{x'} f - \int_a^{x''} f\Big| = \Big|\int_{x'}^{x''} f\Big| \leqslant C(x'' - x'). \qquad \square$$

Twierdzenie 7.3.2. *Dla $f \in \mathcal{C}(P)$ niech*

$$F(x) := \int_a^x f, \quad x \in P.$$

Wtedy F jest pierwotną funkcji f.

Dowód. Ustalmy $x_0 \in P$ oraz $h \neq 0$ takie, że $x_0 + h \in P$. Wtedy, na podstawie twierdzenia o średniej całkowej mamy

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f}{h} = f(x_0 + \theta(h)h),$$

gdzie $\theta(h) \in [0,1]$. Wobec ciągłości funkcji f w punkcie x_0 mamy $\lim_{h\to 0} f(x_0+\theta(h)h) = f(x_0)$. $\square$

Twierdzenie 7.3.3 (Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego I)**.** *Niech $f \in \mathcal{C}(P)$ i niech F będzie pierwotną funkcji f. Wtedy*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) =: F|_a^b.$$

Dowód. Niech $G(x) := \int_a^x f$, $x \in P$. Na mocy poprzedniej propozycji G jest pierwotną funkcji f, a zatem istnieje stała $c \in \mathbb{R}$ taka, że $F(x) = G(x) + c$, $x \in P$. W szczególności, $F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f$. $\square$

Przykład 7.3.4 (Zastosowania)**.** (a) $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x|_1^2 = \ln 2$. Z drugiej strony $M(\frac{1}{x}, \pi_n, \xi_n) \longrightarrow \int_1^2 \frac{dx}{x}$, gdzie $\pi_n := (1, 1+\frac{1}{n}, 1+\frac{2}{n}, \dots, 1+\frac{n}{n})$, $\xi_n := (1+\frac{1}{n}, \dots, 1+\frac{n}{n})$. W taki razie:

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{n+j} \longrightarrow \ln 2.$$

(b) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x|_0^1 = \frac{\pi}{4}$. Z drugiej strony: $M(\frac{1}{1+x^2}, \pi_n, \xi_n) \longrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, gdzie $\pi_n := (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n})$, $\xi_n := (\frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n})$. Stąd:

$$\sum_{j=1}^n \frac{n}{n^2+j^2} \longrightarrow \frac{\pi}{4}.$$

(c) (Zob. Przykład 5.6.11(d)) Niech $f(x) := \ln(1+x)$, $x > -1$. Wtedy $f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, przy czym szereg jest zbieżny lokalnie normalnie w $(-1,1)$. Korzystając z Twierdzenia 7.3.2 oraz z Obserwacji 7.1.12(p), dostajemy

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n\Big) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, \quad |x| < 1.$$

(d) Korzystając z tych samych metod dostajemy dla $|x| < 1$:

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Definicja 7.3.5. Powiemy, że funkcja $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ jest:
- *schodkowa* ($f \in \mathcal{S}(P)$), jeżeli istnieje podział $\pi = (x_0, \dots, x_m)$ przedziału P taki, że funkcja $f|_{(x_{j-1}, x_j)} \equiv \text{const} =: c_j$, $j = 1, \dots, m$;
- *prosta* ($f \in \mathcal{P}(P)$), jeżeli dla dowolnego $x \in P$ istnieją skończone granice jednostronne $f(x+)$ i $f(x-)$ (przy czym, jak zwykle, na końcach przedziału jedną z granic pomijamy).
- *kawałkami klasy $\mathcal{C}^k$* ($f \in \mathcal{C}'^k(P)$), gdzie $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$), jeżeli istnieje podział $\pi = (x_0, \dots, x_m)$ przedziału P taki, że $f|_{(x_{j-1}, x_j)}$ przedłuża się do pewnej funkcji klasy $\mathcal{C}^k([x_{j-1}, x_j])$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Kładziemy $\mathcal{C}' := \mathcal{C}'^0$.

Obserwacja 7.3.6. (a) Jeżeli $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to $f \in \mathcal{C}'^k([a,b])$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podział $\pi = (x_0, \dots, x_m)$ odcinka $[a,b]$ taki, że $f|_{[x_{j-1}, x_j]} \in \mathcal{C}^k([x_{j-1}, x_j])$, $1 \leqslant j \leqslant m$.

(b) Jeżeli $f \in \mathcal{C}'^1(P)$, to $f' \in \mathcal{C}'(P)$. Istotnie, jeżeli podział $\pi = (x_0, \dots, x_m)$ jest taki, jak w Definicji 7.3.5, to f' jest poprawnie określona w zbiorze $P \setminus \{x_0, \dots, x_m\}$ oraz $f|_{(x_{j-1}, x_j)}$ przedłuża się do funkcji ciągłej na $[x_{j-1}, x_j]$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Wartości f' w punktach $x_0, \dots, x_m$ możemy ustalić dowolnie.

(c) $\mathcal{C}(P) \subsetneq \mathcal{C}'(P) \subsetneq \mathcal{B}(P)$.

(d) Każda funkcja monotoniczna jest prosta.

(e) $\mathcal{S}(P) \subsetneq \mathcal{C}'(P) \subsetneq \mathcal{P}(P)$.

(f) $\mathcal{S}(P)$, $\mathcal{C}'^k(P)$ i $\mathcal{P}(P)$ są $\mathbb{R}$-przestrzeniami wektorowymi.

(g) Jeżeli $f \in \mathcal{C}(P)$, $g \in \mathcal{P}(P)$, to $fg \in \mathcal{P}(P)$.

Twierdzenie 7.3.7. *Niech $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *$f \in \mathcal{P}(P)$;*

(ii) *istnieje ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(P)$ taki, że $f_n \longrightarrow f$ jednostajnie na P.*

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Wystarczy pokazać, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja $g \in \mathcal{S}(P)$ taka, że $|f(t) - g(t)| \leqslant \varepsilon$, $t \in P$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dla dowolnego $c \in P$ istnieje liczba $\delta = \delta(c) > 0$ taka, że $|f(t) - f(u)| \leqslant \varepsilon$ dla $t, u \in (c - \delta, c) \cap P$ lub $t, u \in (c, c + \delta) \cap P$ (Ćwiczenie). Wobec zwartości przedziału P istnieją punkty $c_1, \dots, c_r \in P$, $a = c_1 < \dots < c_r = b$ takie że $P \subset \bigcup_{i=1}^{r} (c_i - \delta(c_i), c_i + \delta(c_i))$. Połóżmy dla uproszczenia $\delta_i := \delta(c_i)$, $i = 1, \dots, r$. Niech $\pi = (x_0, \dots, x_m)$, będzie takim podziałem P, że $\{x_0, \dots, x_m\} = \{c_i, c_i - \delta_i, c_i + \delta_i : i = 1, \dots, r\} \cap P$. Zdefiniujmy $g : P \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$g(t) := \begin{cases} f(\frac{x_{j-1}+x_j}{2}), & \text{jeżeli } t \in (x_{j-1}, x_j),\ j = 1, \dots, m \\ f(x_j), & \text{jeżeli } t = x_j,\ j = 0, \dots, m \end{cases}.$$

Oczywiście $g \in \mathcal{S}(P)$. Jeżeli $x_{j-1} \in (c_i - \delta_i, c_i + \delta_i)$, to $(x_{j-1}, x_j) \subset (c_i - \delta_i, c_i) \cap P$ lub $(x_{j-1}, x_j) \subset (c_i, c_i + \delta_i) \cap P$. Stąd $|f(t) - f(\frac{x_{j-1}+x_j}{2})| \leqslant \varepsilon$, $t \in (x_{j-1}, x_j)$. W konsekwencji, $|f(t) - g(t)| \leqslant \varepsilon$, $t \in P$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Niech teraz $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$, gdzie $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(P)$ i zbieżność jest jednostajna. Niech $c \in [a, b)$ i rozważymy granicę prawostronną (granicę lewostronną pozostawiamy jako Ćwiczenie). Niech $g_n : [c, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_n(x) := \begin{cases} f_n(c+), & \text{jeżeli } x = c \\ f_n(x), & \text{jeżeli } x \in (c, b] \end{cases}$. Funkcja g_n jest ciągła w punkcie c. Ponieważ ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego, zatem ciąg $(f_n(c+))_{n=1}^{\infty}$ spełnia zwykły warunek Cauchy'ego (Ćwiczenie). Zdefiniujmy $g : [c, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} f_n(c+), & \text{jeżeli } x = c \\ f(x), & \text{jeżeli } x \in (c, b] \end{cases}$. Wtedy $g_n \longrightarrow g$ jednostajnie na $[c, b]$. Stąd na podstawie twierdzenia o zachowaniu ciągłości przy przejściu do granicy jednostajnej (por. Twierdzenie 4.4.1), mamy $\lim_{x\to c} g(x) = g(c)$, co oznacza w szczególności, że $f'(c+)$ istnieje (i równa się $\lim_{n\to+\infty} f_n(c+)$). □

Wniosek 7.3.8. $\mathcal{P}(P) \subset \mathcal{B}(P)$.

Twierdzenie 7.3.9. (a) *Każda funkcja z $\mathcal{S}(P)$ ma pierwotną.*

(b) *Każda funkcja z $\mathcal{P}(P)$ ma pierwotną.*

Przykład 7.3.10. Funkcja $F(x) := \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$, jest pierwotną funkcji $f(x) := \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{jeżeli } x \neq 0 \end{cases}$, ale $\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$. Zatem f ma pierwotną, ale $f \notin \mathcal{P}(P)$.

Dowód Twierdzenia 7.3.9. (a) Niech $f \in \mathcal{S}(P)$ i niech $\pi = (x_0, \dots, x_m)$, $c_1, \dots, c_m$ będą jak w definicji przestrzeni $\mathcal{S}(P)$. Mamy $f = f_1 + \dots + f_m$ na $P \setminus \{x_0 \dots, x_m\}$, gdzie $f_j := c_j \chi_{(x_{j-1}, x_j), P}$. Wystarczy teraz zauważyć, że każda funkcja f_j ma pierwotną. Istotnie, wystarczy wziąć $F_j(x) := c_j \begin{cases} x_{j-1}, & \text{jeżeli } x \in [a, x_{j-1}] \\ x, & \text{jeżeli } x \in (x_{j-1}, x_j) \\ x_j, & \text{jeżeli } x \in [x_j, b] \end{cases}$.

(b) Niech $f \in \mathcal{P}(P)$. Na podstawie Twierdzenia 7.3.7 istnieje ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(P)$ taki, że $f_n \longrightarrow f$ jednostajnie na P. Na podstawie (a) każda z funkcji f_n ma pierwotną F_n. Możemy założyć, że $F_n(a) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Niech S_{F_n} będzie zbiorem osobliwym dla F_n. Wtedy zbiór $S := \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{F_n}$ jest co najwyżej przeliczalny. Pokażemy, że $F_n \longrightarrow F$ jednostajnie na P oraz, że $F'(x) = f(x)$ dla $x \in P \setminus S$. Dowód będzie analogiczny do dowodu twierdzenia o różniczkowaniu ciągu wyraz po wyrazie (Twierdzenie 5.7.1).

Dla dowodu jednostajnej zbieżności ciągu $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ pokażemy, że spełnia on jednostajny warunek Cauchy'ego. Niech $f_{m,n} := f_m - f_n$, $F_{m,n} := F_m - F_n$, $m > n$. Wiemy, że $F'_{m,n} = f_{m,n}$ na $P \setminus S$ oraz $\sup\{|f_{m,n}(\xi)| : \xi \in P\} \underset{n>m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Na podstawie Wniosku 5.4.4, dla $x \in P$ mamy

$$\begin{aligned}|F_{m,n}(x)| = |(F_{m,n}(x) - F_{m,n}(a)| &\leqslant (\sup\{|F'_{m,n}(\xi)| : \xi \in [a,x] \setminus S\})|x-a| \\ &\leqslant (\sup\{|f_{m,n}(\xi)| : \xi \in P\})(b-a) \underset{n>m\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Niech $F := \lim\limits_{n\to+\infty} F_n$. Dla dowodu tego, że F jest pierwotną f ustalmy $c \in (a,b) \setminus S$. Chcemy pokazać, że $F'(c) = f(c)$. Niech $\varphi_n, \varphi : P - c \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_n(h) := \begin{cases} \frac{F_n(c+h)-F_n(c)}{h} - f_n(c), & \text{jeżeli } h \neq 0 \\ 0, & \text{jeżeli } h = 0 \end{cases}$, $\varphi(h) := \begin{cases} \frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c), & \text{jeżeli } h \neq 0 \\ 0, & \text{jeżeli } h = 0 \end{cases}$. Zauważmy, że φ_n jest ciągła w punkcie 0 oraz $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ punktowo na $P - c$. Jeżeli pokażemy, że ta zbieżność jest jednostajna, to na podstawie twierdzenia o zachowaniu ciągłości przy przejściu do granicy jednostajnej wnioskujemy, że φ jest ciągła w punkcie 0, a to oznacza, że $F'(c) = f(c)$. Liczymy

$$\begin{aligned}|\varphi_m(h) - \varphi_n(h)| &= \frac{1}{|h|}\Big|F_{m,n}(c+h) - F_{m,n}(h) - F'_{m,n}(c)h\Big| \\ &\leqslant \sup\{|F'_{m,n}(\xi) - F'_{m,n}(c)| : \xi \in [c, c+h] \setminus S\} \leqslant 2\sup\{|f_{m,n}(\xi)| : \xi \in P\} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad \square\end{aligned}$$

Twierdzenie 7.3.11 (Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego II). (a) *Jeżeli $f \in \mathcal{S}(P)$, to $f \in \mathcal{R}(P)$ oraz $\int_P f = F(b) - F(a)$, gdzie F jest dowolną pierwotną f.*

(b) *Jeżeli $f \in \mathcal{P}(P)$, to $f \in \mathcal{R}(P)$ oraz $\int_P f = F(b) - F(a)$, gdzie F jest dowolną pierwotną f. W szczególności, wynik jest prawdziwy dla $f \in \mathcal{C}(P)$ (co daje Twierdzenie 7.3.3).*

Obserwacja 7.3.12. Dla funkcji $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ mającej pierwotną F definiuje się *całkę Cauchy'ego* $\int_P f(x)dx := F(b) - F(a)$. Twierdzenie 7.3.11(b) mówi, że dla $f \in \mathcal{P}(P)$ całka Cauchy'ego pokrywa się z całką Riemanna — zob. Obserwacja 7.6.2(f).

Dowód Twierdzenia 7.3.11. Zauważmy, że liczba $F(b) - F(a)$ nie zależy od wyboru pierwotnej funkcji f.

(a) Niech x_j, c_j, f_j, F_j, $j = 1, \dots, m$, będą jak w dowodzie Twierdzenia 7.3.9(a). Wystarczy udowodnić wynik dla każdej funkcji f_j z osobna. Całkowalność funkcji f_j jest oczywista. Ponadto, $\int_P f_j = c_j(x_j - x_{j-1})$. Z drugiej strony, $F_j(b) - F_j(a) = c_j x_j - c_j x_{j-1} = c_j(x_j - x_{j-1}) = \int_P f$.

(b) Na podstawie Twierdzenia 7.3.7 istnieje ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(P)$ taki, że $f_n \longrightarrow f$ jednostajnie na P. Na podstawie (a) $f_n \in \mathcal{R}(P)$ oraz $\int_P f_n = F_n(b) - F_n(a)$, gdzie F_n jest pierwotną f_n. Możemy założyć, że $F_n(a) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Z własności całki Riemanna wiemy, że wtedy $f \in \mathcal{R}(P)$ oraz $\int_P f_n \longrightarrow \int_P f$.

Z dowodu Twierdzenia 7.3.11 wiemy, że $F_n \longrightarrow F$ jednostajnie na P oraz, że F jest pierwotną f. W takim razie $\int_P f = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_P f_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(F_n(b) - F_n(a)) = F(b) - F(a)$. $\square$

Twierdzenie 7.3.13 (Wzór na całkowanie przez części II). *Niech $u, v \in \mathcal{P}(P)$ i niech U (odp. V) będzie pierwotną dla u (odp. v). Wtedy*

$$\int_a^b U(x)v(x)dx = (UV)|_a^b - \int_a^b u(x)V(x)dx.$$

W szczególności, jeżeli $u = f'$, $v = g'$, gdzie $f, g \in \mathcal{C}^1(P)$, to dostajemy klasyczny wzór na całkowanie przez części (Twierdzenie 7.2.6)

$$\int_a^b f'g = (fg)|_a^b - \int_a^b fg'.$$

Dowód. Na wstępie zauważmy, że $Uv, uV, UV \in \mathcal{P}(P)$ (ponieważ U i V są ciągłe), a zatem obie całki istnieją. Mamy $(UV)' = U'V + UV' = uV + Uv$ na $P \setminus (S_U \cup S_V)$. Stąd

$$\int_a^b u(x)V(x)dx + \int_a^b U(x)v(x)dx = \int_a^b (u(x)V(x) + U(x)v(x))dx = (UV)|_a^b. \qquad \square$$

Twierdzenie 7.3.14 (Wzór na całkowanie przez podstawienie II)**.** *Niech $f \in \mathcal{C}(P)$, $u \in \mathcal{P}(Q)$, gdzie $Q = [p, q] \subset \mathbb{R}$, $p < q$. Niech U będzie pierwotną funkcji u. Załóżmy, że $U(Q) \subset P$. Wtedy*

$$\int_{U(p)}^{U(q)} f(x)dx = \int_p^q f(U(t))u(t)dt.$$

W szczególności, jeżeli $u = \varphi'$, gdzie $\varphi \in \mathcal{C}^1(Q)$, $\varphi(Q) \subset P$, to dostajemy klasyczny wzór na całkowanie przez podstawienie (Twierdzenie 7.2.8)

$$\int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f = \int_p^q (f \circ \varphi) \cdot \varphi'.$$

Dowód. Zauważmy, że $(f \circ U)u \in \mathcal{P}(Q)$ (ponieważ $f \circ U$ jest ciągła), a zatem całka po prawej stronie jest dobrze określona. Niech F będzie pierwotną funkcji f. Przypomnijmy, że $F \in \mathcal{D}(P)$ (Twierdzenie 7.2.4). Mamy $(F \circ U)'(t) = F'(U(t))U'(t) = f(U(t))u(t)$, $t \in Q \setminus S_U$. Stąd

$$\int_p^q f(U(t))u(t)dt = (F \circ U)|_p^q = \int_{U(p)}^{U(q)} f(x)dx. \qquad \square$$

7.4. Długość krzywej

Definicja 7.4.1. *Długością krzywej* $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$ w przestrzeni metrycznej (X, ϱ) nazywamy liczbę $L(\gamma) \in [0, +\infty]$ daną wzorem: $L(\gamma) := \sup_\pi\{S(\gamma, \pi)\}$, gdzie $S(\gamma, \pi) := \sum_{j=1}^{m} \varrho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j))$, a supremum jest brane po wszystkich podziałach $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ przedziału $[a, b]$. Zauważmy, że jeżeli $\pi' \preccurlyeq \pi$, to $S(\gamma, \pi') \geqslant S(\gamma, \pi)$. Krzywą γ nazywamy *prostowalną*, gdy $L(\gamma) < +\infty$.

Obserwacja 7.4.2. (a) $L(\gamma)$ nie zależy od parametryzacji γ (i dlatego możemy zawsze ograniczyć się do krzywych $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$) $\binom{2}{}$,

(b) $L(\ominus\gamma) = L(\gamma)$, tzn. długość krzywej nie zależy od orientacji $\binom{3}{}$,

(c) $L(\gamma_1 \oplus \gamma_2) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$ $\binom{4}{}$.

Lemat 7.4.3. *Dla każdego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ przedziału $[0, 1]$ mamy:*

$$S(\gamma, \pi_k) \longrightarrow L(\gamma).$$

Dowód. (Por. Obserwacja 7.1.6(f).) Weźmy $\ell < L(\gamma)$ i niech $\pi' = (t'_0, \dots, t'_{m_0})$ będzie podziałem przedziału $[a, b]$ takim, że $S(\gamma, \pi') > \ell$. Dla $0 < \delta < \operatorname{diam} \pi'$ weźmy dowolny podział $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ odcinka $[a, b]$ o średnicy $\leqslant \delta$. Punkty $t_0, \dots, t_m$ dzielimy na m_0-grup, zaliczając do i-tej grupy te punkty t_j, dla których $t'_{i-1} \leqslant t_j < t'_i$, $i = 1, \dots, m_0 - 1$, a do grupy m_0 — pozostałą „końcówkę" punktów. Punkty i-tej grupy numerujemy kolejno $t_{n_i}, \dots, t_{n_{i+1}-1}$, gdzie $n_1 = 0$, $n_{m_0+1} = m + 1$. Wobec nierówności trójkąta mamy:

$$\begin{aligned} L \geqslant S(\gamma, \pi) &= \sum_{i=1}^{m_0} \sum_{j=n_i}^{n_{i+1}-1} \varrho(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{m_0} \Big(\varrho(\gamma(t'_i, \gamma(t'_{i-1})) - \varrho(\gamma(t'_{i-1}), \gamma(t_{n_i})) - \varrho(\gamma(t_{n_{i+1}-1}), \gamma(t'_i))\Big) \\ &\geqslant S(\gamma, \pi') - 2m_0\omega_\gamma(\delta) > \ell - 2m_0\omega_\gamma(\delta). \end{aligned}$$

Zauważmy, że z jednostajniej ciągłości odwzorowania γ wynika, że $\omega_\gamma(\delta) \longrightarrow 0$ przy $\delta \longrightarrow 0$. W konsekwencji, dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ mamy

$$L \geqslant \limsup_{k \to +\infty} S(\gamma, \pi_k) \geqslant \liminf_{k \to +\infty} S(\gamma, \pi_k) \geqslant \ell,$$

co przy $\ell \nearrow L$ daje tezę. $\square$

$\binom{2}{}$ Przypomnijmy, że zmiana parametryzacji krzywej $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$ polega na zastąpieniu jej przez krzywą $\gamma \circ \sigma : [c, d] \longrightarrow X$, gdzie $\sigma : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ jest pewną bijekcją rosnącą.

$\binom{3}{}$ Przypomnijmy, że dla krzywej $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$ kładziemy: $(\ominus\gamma)(t) := \gamma(1 - t)$.

$\binom{4}{}$ Przypomnijmy, że dla krzywych $\gamma_j : [0, 1] \longrightarrow X$, $j = 1, 2$, takich, że $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ definiujemy: $(\gamma_1 \oplus \gamma_2)(t) := \gamma_1(2t)$ dla $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$ i $(\gamma_1 \oplus \gamma_2)(t) := \gamma_2(2t - 1)$ dla $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1$.

W dalszym ciągu będziemy zainteresowani krzywymi $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ i sytuacją, gdy na $\mathbb{R}^n$ rozważamy odległość euklidesową.

Definicja 7.4.4. *Droga* to krzywa $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ taka, że $\gamma_j \in \mathcal{C}'([a,b])$, $j = 1, \dots, n$ (zob. Definicja 7.3.5).

Twierdzenie 7.4.5. *Dowolna droga $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jest prostowalna (względem odległości euklidesowej) oraz*

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \Big(\sum_{j=1}^n (\gamma_j'(t))^2\Big)^{1/2} dt.$$

Zauważmy, że całka po prawej stronie istnieje (funkcja podcałkowa jest kawałkami ciągła — Obserwacja 7.3.6(b)).

Dowód. Możemy założyć, że γ jest klasy $\mathcal{C}^1$. Dla podziału $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ niech $\xi := (t_0, \dots, t_{m-1})$. Wtedy, korzystając z twierdzenia o przyrostach skończonych, dostajemy:

$$|S(\gamma, \pi) - M(\|\gamma'\|, \pi, \xi)| = \Big|\sum_{j=1}^m \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| - \sum_{j=1}^m \|\gamma'(t_{j-1})\|(t_j - t_{j-1})\Big|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^m \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) - \gamma'(t_{j-1})(t_j - t_{j-1})\| \leqslant \sum_{j=1}^m \big(\sup\{\|\gamma'(\eta) - \gamma'(t_{j-1})\| : \eta \in [t_{j-1}, t_j]\}\big)(t_j - t_{j-1})$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^m \omega_{\gamma'}(\operatorname{diam}\pi)(t_j - t_{j-1}) = \omega_{\gamma'}(\operatorname{diam}\pi).$$

Pozostaje wykorzystać Lemat 7.4.3, Twierdzenie 7.1.9 i skorzystać z jednostajnej ciągłości odwzorowania γ'. $\square$

Wniosek 7.4.6. *Niech $\gamma_s : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{N}_0$, będą krzywymi klasy $\mathcal{C}^1$ oraz $\gamma_s' \longrightarrow \gamma_0'$ jednostajnie. Wtedy $L(\gamma_s) \longrightarrow L(\gamma_0)$.*

Dowód. Na postawie Twierdzenia 7.4.5: $|L(\gamma_s) - L(\gamma_0)| \leqslant \int_0^1 \big|\|\gamma_s'\| - \|\gamma_0'\|\big| dt \leqslant \int_0^1 \|\gamma_s' - \gamma_0'\| dt \longrightarrow 0.$ $\square$

Obserwacja 7.4.7. Zauważmy, że jeżeli $\gamma_s \longrightarrow \gamma_0$ jednostajnie, to nie musi być $L(\gamma_s) \longrightarrow L(\gamma_0)$.

Niech $\gamma_0 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_0(t) := (t, 0)$. Niech $\delta_n \searrow 0$. Przybliżamy krzywą γ_0 przy pomocy łamanych $\gamma_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ wyznaczonych przez punkty $(0,0)$, $(\frac{1}{2n}, \delta_n)$, $(\frac{1}{n}, 0)$, $(\frac{3}{2n}, \delta_n)$, $(\frac{2}{n}, 0), \dots, (1 - \frac{1}{2n}, \delta_n)$, $(1,0)$. Oczywiście, $\gamma_n \longrightarrow \gamma$ jednostajnie. Z drugiej strony $L(\gamma_n) = 2n\sqrt{(\frac{1}{2n})^2 + \delta_n^2} = \sqrt{1 + (2n\delta_n)^2}$. Dobierając stosownie $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ możemy łatwo dostać $L(\gamma_n) \longrightarrow +\infty$.

7.5. Przykłady zastosowania całek

Przykład 7.5.1. W przykładach poniżej pewne pojęcia (np. pole powierzchni) będą rozumiane w sposób intuicyjny — precyzyjne definicje zostaną podane w przyszłości w ramach Analizy Matematycznej 3 i 4.

(1) Niech $A = \{(x,y) : x \in [a,b],\ g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$, gdzie $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ oraz $g \leqslant f$. Wtedy *pole* $|A|$ zbioru A wyraża się wzorem $|A| = \int_a^b (f - g)$.

Intuicja: $|A| \approx \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) - g(\xi_i))(x_i - x_{i-1})$, gdzie $(x_0, \dots, x_n)$ jest podziałem odcinka $[a,b]$, zaś $\xi_i \in [x_{i-i}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$.

(2) Niech $A = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) : \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,\ 0 \leqslant r \leqslant R(\varphi)\}$, gdzie $\beta - \alpha \leqslant 2\pi$, $R \in \mathcal{R}([\alpha,\beta])$, $R : [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Wtedy $|A| = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta R^2(\varphi)\, d\varphi$.

Intuicja: $|A| \approx \sum_{i=1}^n \pi R^2(\xi_i)\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{2\pi}$, gdzie $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ jest podziałem odcinka $[\alpha,\beta]$, zaś $\xi_i \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]$, $i = 1, \dots, n$.

(3) Niech $B = \{(x, r\cos\varphi, r\sin\varphi) : x \in [a,b],\ \varphi \in [0, 2\pi],\ 0 \leqslant r \leqslant R(x)\}$, gdzie $R \in \mathcal{R}([a,b])$, $R : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Wtedy *objętość* $|B|$ bryły B wyraża się wzorem

$$|B| = \pi\int_a^b R^2(x)\, dx.$$

Intuicja: $|B| \approx \sum\limits_{i=1}^{n} \pi R^2(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, gdzie $(x_0, \dots, x_n)$ jest podziałem odcinka $[a, b]$, zaś $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$.

(4) Niech $S = \{(x, R(x)\cos\varphi, R(x)\sin\varphi) : x \in [a, b],\ \varphi \in [0, 2\pi]\}$, gdzie $R \in \mathcal{C}^1([a, b])$, $R : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Wtedy *pole powierzchni* $|S|$ powierzchni S wyraża się wzorem

$$|S| = 2\pi \int_a^b R(x)\sqrt{1 + (R'(x))^2}\, dx.$$

Intuicja:

$$\begin{aligned}|S| &\approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi R(\xi_i)\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (R(x_i) - R(x_{i-1}))^2}\\ &= \sum_{i=1}^{n} 2\pi R(\xi_i)\sqrt{1 + \Big(\frac{R(x_i) - R(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\Big)^2}(x_i - x_{i-1}) \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi R(\xi_i)\sqrt{1 + (R'(\xi_i))^2}(x_i - x_{i-1}).\end{aligned}$$

(5) Warto pamiętać o następującym przykładzie. Niech

$$\begin{aligned}B_c &= \{(x, r\cos\varphi, r\sin\varphi) : x \in [1, c],\ \varphi \in [0, 2\pi],\ r \leqslant \tfrac{1}{x}\},\\ S_c &= \{(x, \tfrac{1}{x}\cos\varphi, \tfrac{1}{x}\sin\varphi) : x \in [1, c],\ \varphi \in [0, 2\pi]\}.\end{aligned}$$

Wtedy

$$|B_c| = \pi \int_1^c \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^c = \pi\Big(1 - \frac{1}{c}\Big), \quad |S_c| = 2\pi \int_1^c \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx \geqslant 2\pi \int_1^c \frac{1}{x} dx = 2\pi \ln c.$$

Stąd $\lim_{c\to+\infty} |B_c| = \lim\limits_{c\to+\infty} \pi(1 - \frac{1}{c}) = \pi$, ale $\lim\limits_{c\to+\infty} |S_c| \geqslant \lim_{c\to+\infty} 2\pi \ln c = +\infty$.

W przyszłości (Analiza Matematyczna 4) spojrzymy na powyższe wzory z wyższego punktu widzenia. W tej chwili przedstawimy tylko pewną ogólną ideę.

Niech $U \subset \mathbb{R}^m$ będzie zbiorem otwartym i niech $f = (f_1, \dots, f_n) : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $m \leqslant n$, będzie odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^1$ ze względu na każdą zmienną osobno, tzn. dla dowolnych $j \in \{1, \dots, n\}$, $k \in \{1, \dots, m\}$ i $c = (c_1, \dots, c_m) \in U$, odwzorowanie $x_k \overset{\varphi_{j,k,c}}{\longmapsto} f_j(c_1, \dots, c_{k-1}, x_k, c_{k+1}, \dots, c_m)$ jest klasy $\mathcal{C}^1$ w otoczeniu punktu c_k. Niech $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(c) := \varphi'_{j,k,c}(c_k)$ oznacza *k-tą pochodną cząstkową funkcji f_j w punkcie c*. Zdefiniujmy

$$J_m f(x) := \Big(\sum_{1 \leqslant j_1 < \dots < j_m \leqslant n} \Big(\det\Big[\frac{\partial f_{j_i}}{\partial x_k}(x)\Big]_{i,k=1,\dots,m}\Big)^2\Big)^{1/2}, \quad x \in U. \tag{*}$$

Twierdzenie* 7.5.2. *Przy powyższych oznaczeniach, dla „regularnych” zbiorów $A \subset U$ takich, że $f|_A$ jest injektywne,* m-wymiarowa miara Hausdorffa *zbioru $f(A)$ wyraża się wzorem*

$$\mathcal{H}^m(f(A)) = \int_A J_m f(x) dx,$$

gdzie całka po prawej stronie to wielowymiarowa całka Riemanna.

Obserwacja 7.5.3. (a) $m = 1$, $f = (f_1, \dots, f_n) : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $A = [a, b] \subset U$,

$$J_1 f(x) = \Big(\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} (f_j'(x))^2\Big)^{1/2} = \|f'(x)\|, \quad x \in U.$$

Wzór (*) to wzór na długość krzywej $f|_{[a,b]}$.

(b) $m = n = 2$, $f(x, t) := (x, \varphi(x) + t(\psi(x) - \varphi(x)))$, $(x, t) \in U \subset \mathbb{R}^2$, $A = [a, b] \times [0, 1] \subset U$, gdzie $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1$, $\varphi(x) < \psi(x)$, $x \in [a, b]$. Wtedy

$$J_2 f(x, t) = \Big|\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi'(x) + t(\psi'(x) - \varphi'(x)) & \psi(x) - \varphi(x)\end{bmatrix}\Big| = |\psi(x) - \varphi(x)|.$$

Pole zbioru $f(A)$ wyraża się wzorem [5]

$$\mathcal{H}^2(f(A)) = \int_A (\psi(x) - \varphi(x))dxdt = \int_{[a,b]} \Big(\int_{[0,1]} (\psi(x) - \varphi(x))dt \Big) dx \overset{(*)}{=} \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))dx,$$

gdzie (*) wynika ze wzoru na iterację całek Riemanna: Jeżeli $C \subset \mathbb{R}^k$, $D \subset \mathbb{R}^\ell$ są zbiorami regularnymi i $F : C \times D \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą ograniczoną, to $\int_{C\times D} F(x,y)d(x,y) = \int_C \big(\int_D F(x,y)dy \big) dx$.

(c) $m = n = 2$, $f(t,\varphi) = (tR(\varphi)\cos\varphi, tR(\varphi)\sin\varphi)$, $(t,\varphi) \in U \subset \mathbb{R}^2$, $A = (0,1] \times [\alpha,\beta) \subset U$, $\beta - \alpha \leqslant 2\pi$, gdzie $R \in \mathcal{C}^1([\alpha,\beta), \mathbb{R}_{>0})$. Wtedy

$$J_2 f(t,\varphi) = \Big| \det \begin{bmatrix} R(\varphi)\cos\varphi & tR'(\varphi)\cos\varphi - tR(\varphi)\sin\varphi \\ R(\varphi)\sin\varphi & tR'(\varphi)\sin\varphi + tR(\varphi)\cos\varphi \end{bmatrix} \Big| = |t| R^2(\varphi).$$

Pole zbioru $f(A)$ wyraża się wzorem

$$\mathcal{H}^2(f(A)) = \int_A tR^2(\varphi)dtd\varphi = \tfrac{1}{2} \int_\alpha^\beta R^2(\varphi)d\varphi.$$

(d) $m = n = 3$, $f(x,t,\varphi) = (x, tR(x)\cos\varphi, tR(x)\sin\varphi)$, $(x,t,\varphi) \in U \subset \mathbb{R}^3$, $A := [a,b] \times (0,1] \times [0,2\pi) \subset U$, gdzie $R \in \mathcal{C}^1$ oraz $R > 0$ na A. Wtedy

$$J_3 f(x,t,\varphi) = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ tR'(x)\cos\varphi & R(x)\cos\varphi & -tR(x)\sin\varphi \\ tR'(x)\sin\varphi & R(x)\sin\varphi & tR(x)\cos\varphi \end{bmatrix} \right| = |t| R^2(x).$$

Objętość zbioru $f(A)$ wyraża się wzorem

$$\mathcal{H}^3(f(A)) = \int_A tR^2(x)dxdtd\varphi = \pi \int_a^b R^2(x)dx.$$

(e) $m = 2$, $n = 3$, $f(x,\varphi) = (x, R(x)\cos\varphi, R(x)\sin\varphi)$, $(x,\varphi) \in U \subset \mathbb{R}^2$, $A := [a,b] \times [0,2\pi) \subset U$, gdzie $R \in \mathcal{C}^1$ oraz $R > 0$ na A. Wtedy

$$\begin{aligned} J_2 f(x,\varphi) &= \Big(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ R'(x)\cos\varphi & -R(x)\sin\varphi \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ R'(x)\sin\varphi & R(x)\cos\varphi \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} R'(x)\cos\varphi & -R(x)\sin\varphi \\ R'(x)\sin\varphi & R(x)\cos\varphi \end{vmatrix}^2 \Big)^{1/2} \\ &= \big(R^2(x) + R^2(x)(R'(x))^2 \big)^{1/2} = |R(x)| \sqrt{1 + (R'(x))^2}. \end{aligned}$$

Pole powierzchni zbioru $f(A)$ wyraża się wzorem

$$\mathcal{H}^2(f(A)) = \int_A R(x)\sqrt{1 + (R'(x))^2} dxd\varphi = 2\pi \int_a^b R(x)\sqrt{1 + (R'(x))^2} dx.$$

7.6. Całka niewłaściwa

Definicja 7.6.1. Niech $\varphi : [a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$, gdzie $-\infty < a < b \leqslant \infty$, będzie taka, że $\varphi|_{[a,\beta]} \in \mathcal{R}([a,\beta], \mathbb{C})$ dla dowolnego $a < \beta < b$. Zdefiniujmy $F_\varphi(\beta) := \int_a^\beta \varphi$. Mówimy, że *całka niewłaściwa* $\int_a^b \varphi$ jest *zbieżna*, jeżeli granica $\int_a^b \varphi := \lim\limits_{\beta \to b-} F_\varphi(\beta)$ istnieje i jest skończona. Piszemy wtedy $\varphi \in \mathcal{R}([a,b), \mathbb{C})$. Jak zwykle, jeżeli $\varphi([a,b)) \subset \mathbb{R}$, to piszemy $\varphi \in \mathcal{R}([a,b))$. Jeżeli dodatkowo $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, to zamiast $f \in \mathcal{R}([a,b))$ będziemy również pisać $\int_a^b f < +\infty$.

Jeżeli $|\varphi| \in \mathcal{R}([a,b))$, to mówimy, że *całka niewłaściwa* $\int_a^b \varphi$ jest *bezwzględnie zbieżna*.

Analogiczne pojęcie całki niewłaściwej możemy zdefiniować dla funkcji $\varphi : (a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, gdzie $-\infty \leqslant a < b < \infty$. Piszemy wtedy $\varphi \in \mathcal{R}((a,b], \mathbb{C})$.

Jeżeli $\varphi : (a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$, gdzie $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, jest funkcją taką, że $\varphi|_{[\alpha,\beta]} \in \mathcal{R}([\alpha,\beta], \mathbb{C})$ dla dowolnego przedziału $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$, to mówimy, że *całka niewłaściwa* $\int_a^b \varphi$ *jest zbieżna*, jeżeli istnieje $c \in (a,b)$ takie, że $\varphi|_{(a,c]} \in \mathcal{R}((a,c], \mathbb{C})$ oraz $\varphi|_{[c,b)} \in \mathcal{R}([c,b), \mathbb{C})$. Piszemy wtedy $\varphi \in \mathcal{R}((a,b), \mathbb{C})$ i definiujemy

$$\int_a^b \varphi := \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi. \tag{*}$$

---

[5] We wszystkich przykładach sprawdzenie injektywności odwzorowania $f|_A$ pozostawiamy jako Ćwiczenie.

Obserwacja 7.6.2. (a) Definicja (*) nie zależy od wyboru punktu pośredniego $c \in (a,b)$.

(b) Dalsze rozważania będą prowadzone dla przedziału $[a,b)$. Przypadki $(a,b]$ i (a,b) pozostawiamy jako Ćwiczenie.

(c) $\varphi \in \mathcal{R}([a,b),\mathbb{C}) \iff \operatorname{Re}\varphi, \operatorname{Im}\varphi \in \mathcal{R}([a,b))$. Ponadto, $\int_a^b \varphi = \int_a^b \operatorname{Re}\varphi + i\int_a^b \operatorname{Im}\varphi$.

(d) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{R}([a,b])$, gdzie $-\infty < a < b < \infty$, to $\varphi|_{[a,b)} \in \mathcal{R}([a,b),\mathbb{C})$ i $\int_a^b \varphi|_{[a,b)} = \int_a^b \varphi$.

Istotnie, niech $|\varphi| \leqslant C$. Wtedy dla $\beta \in (a,b)$ mamy

$$\Big|F_\varphi(\beta) - \int_a^b \varphi\Big| = \Big|\int_\beta^b \varphi\Big| \leqslant \int_\beta^b |\varphi| \leqslant (b-\beta)C \underset{\beta\to b-}{\longrightarrow} 0.$$

(e) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{R}([a,b))$, gdzie $-\infty < a < b < \infty$, oraz istnieje skończona granica $g := \lim\limits_{x\to b-}\varphi(x)$, to po położeniu $\varphi(b) := g$ mamy $\varphi \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{C})$

Istotnie, możemy założyć, $f = \varphi : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$ i niech $\beta \in (a,b)$ będzie taka, że $b-\beta < 1$ oraz $|f(x) - g| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$ dla $\beta \leqslant x < b$. Ponieważ $f \in \mathcal{R}([a,\beta])$, zatem istnieje podział $\pi' = (t_0,\dots,t_m)$ przedziału $[a,\beta]$ taki, że $U(f,\pi') - L(f,\pi') \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Niech $\pi := (t_0,\dots,t_m,b)$. Jest to podział przedziału $[a,b]$ oraz

$$U(f,\pi) - L(f,\pi) = U(f,\pi') - L(f,\pi') + (M(f,[\beta,b]) - m(f,[\beta,b]))(b-\beta) \leqslant \varepsilon.$$

(f) Jeżeli funkcja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $b < +\infty$, ma pierwotną F oraz $f \in \mathcal{P}([a,b))$, to $f \in \mathcal{R}([a,b))$ oraz $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. Oznacza to, że w tym przypadku całka Cauchy'ego pokrywa się z niewłaściwą całką Riemanna.

Dla przykładu: $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(F(x) = \sqrt{x})$.

Istotnie, wobec Twierdzenia 7.3.11(b), $\lim\limits_{\beta\to b-}\int_a^\beta f = \lim\limits_{\beta\to b-}(F(\beta) - F(a)) = F(b) - F(a)$.

Przykład 7.6.3. (a) Dla $0 < \gamma < 1$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\gamma}dx = \lim_{\alpha\to 0+}\int_\alpha^1 \frac{1}{x^\gamma}dx = \lim_{\alpha\to 0+}\frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}\Big|_\alpha^1 = \frac{1}{1-\gamma}.$$

(b) Dla $\gamma > 1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\gamma}dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_1^\beta \frac{1}{x^\gamma}dx = \lim_{\beta\to+\infty}\frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}\Big|_1^\beta = \frac{1}{\gamma-1}.$$

(c)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\beta\to+\infty}\int_0^\beta \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{\alpha\to-\infty}\int_\alpha^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\beta\to+\infty}\operatorname{arctg} x\big|_0^\beta + \lim_{\alpha\to-\infty}\operatorname{arctg} x\big|_\alpha^0 = \pi.$$

Twierdzenie 7.6.4. *Jeżeli $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ i $f|_{[a,\beta]} \in \mathcal{R}([a,\beta])$ dla dowolnego $a < \beta < b$, to*

$$\int_a^b f < +\infty \iff \exists_{(\beta_n)_{n=0}^\infty \subset [a,b)} : a = \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_n \nearrow b : \sum_{n=1}^\infty \int_{\beta_{n-1}}^{\beta_n} f < +\infty.$$

Dowód. W naszym przypadku funkcja F_f jest rosnąca oraz $F_f(\beta_n) = \sum\limits_{k=1}^n \int_{\beta_{k-1}}^{\beta_k} f$. □

Twierdzenie 7.6.5 (Warunek Cauchy'ego zbieżności całek niewłaściwych). *Niech $\varphi : [a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$ będzie taka, $\varphi|_{[a,\beta]} \in \mathcal{R}([a,\beta],\mathbb{C})$ dla dowolnego $a < \beta < b$. Wtedy całka niewłaściwa $\int_a^b \varphi$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $c \in (a,b)$ takie, że dla dowolnych $c < \beta_1 < \beta_2 < b$ mamy $|\int_{\beta_1}^{\beta_2}\varphi| < \varepsilon$.*

Dowód. ($\Longrightarrow$): $\int_{\beta_1}^{\beta_2}\varphi = F_\varphi(\beta_2) - F_\varphi(\beta_1)$.

($\Longleftarrow$): Niech $a \leqslant \beta_n < b$, $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n \longrightarrow b$. Wtedy nasz warunek gwarantuje, że ciąg liczbowy $(F_\varphi(\beta_n))_{n=1}^\infty$ spełnia warunek Cauchy'ego. Jest więc zbieżny do granicy skończonej. □

Twierdzenie 7.6.6 (Kryterium porównawcze). *Niech $\varphi : [a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$, $g : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ będą takie, że:*

- *$\varphi|_{[a,\beta]}, g|_{[a,\beta]} \in \mathcal{R}([a,\beta],\mathbb{C})$ dla dowolnego $\beta \in (a,b)$,*
- *$|\varphi(x)| \leqslant g(x)$, $x \in [a,b)$,*
- *$g \in \mathcal{R}([a,b))$.*

Wtedy $\varphi \in \mathcal{R}([a,b))$ *oraz* $|\int_a^b \varphi| \leqslant \int_a^b g$.

W szczególności, jeżeli $|\varphi| \in \mathcal{R}([a,b))$*, to* $\varphi \in \mathcal{R}([a,b))$ *oraz* $|\int_a^b \varphi| \leqslant \int_a^b |\varphi|$.

Przykład 7.6.7. (a) Całka $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{1+x^2}$ jest bezwzględnie zbieżna.

(b) Całka $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x}$ jest zbieżna.

Istotnie, ponieważ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ osobliwość jest tylko w $+\infty$ i wystarczy zbadać zbieżność całki $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x}$. Całkując przez części mamy $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x} = \frac{-\cos x}{x}\big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2} = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2}$ i wystarczy zauważyć, że ostatnia całka jest bezwzględnie zbieżna.

(c) Całka $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x}$ nie jest zbieżna bezwzględnie.

Istotnie,

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x| dx}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x| dx}{x} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin x| dx = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} = +\infty.$$

Twierdzenie 7.6.8 (Kryterium całkowe zbieżności szeregów). *Niech* $f : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ *będzie funkcją malejącą,* $S_n := \sum\limits_{k=0}^{n} f(k)$*,* $I_n := \int_0^n f$*,* $n \in \mathbb{N}_0$*. Wtedy:*

(a) $S_n - I_n \longrightarrow g \in [0, f(0)]$.

(b) $\int_0^\infty f < +\infty \iff \sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n) < +\infty$.

Dowód. (a) Zauważmy, że $f(k) \leqslant \int_{k-1}^k f \leqslant f(k-1)$, $k \in \mathbb{N}$. Stąd $S_n - f(0) \leqslant I_n \leqslant S_n - f(n)$, a więc $f(n) \leqslant S_n - I_n \leqslant f(0)$. Wystarczy jeszcze pokazać, że ciąg $(S_n - I_n)_{n=0}^{\infty}$ jest malejący:

$$S_n - I_n - (S_{n+1} - I_{n+1}) = -f(n+1) + \int_n^{n+1} f \geqslant 0.$$

(b) wynika z (a). □

Przykład 7.6.9. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 1$. W takim razie szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha > 1$.

7.7. Funkcje dane całką

Twierdzenie 7.7.1 (Twierdzenie o funkcjach danych całką). *Niech* $\Omega \in \operatorname{top} \mathbb{R}$*, niech* $P = [a,b] \subset\subset \mathbb{R}$ *i niech* $f : \Omega \times P \longrightarrow \mathbb{R}$ *będzie odwzorowaniem takim, że dla pewnego* $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ *mamy:*

- $f(\cdot,t) \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ *dla dowolnego* $t \in P$,
- *odwzorowanie* $\Omega \times P \ni (x,t) \longmapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t) \in \mathbb{R}$*, gdzie* $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t) := (f(\cdot,t))^{(j)}(x)$*, jest ciągłe dla* $j \leqslant k$. (6)

Wtedy odwzorowanie $\Omega \ni x \overset{\varphi}{\longmapsto} \int_a^b f(x,t)dt$ *jest klasy* $\mathcal{C}^k(\Omega)$ *oraz* $\varphi^{(j)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)dt$*,* $x \in \Omega$*,* $j \leqslant k$ (7).

Dowód. Wystarczy rozważyć przypadki $k = 0$ i $k = 1$ (a następnie iterować rozumowanie).

$k = 0$: Ustalmy $a \in \Omega$, $r > 0$ takie, że $[a-r, a+r] \subset \Omega$ i $\varepsilon > 0$. Odwzorowanie f jest jednostajnie ciągłe na $[a-r,a+r] \times P$. Zatem istnieje $0 < \delta < r$ taka, że $|f(x,t) - f(a,t)| \leqslant \varepsilon$ dla $(x,t) \in (a-\delta, a+\delta) \times P$. Otrzymujemy stąd:

$$|\varphi(x) - \varphi(a)| \leqslant \int_a^b |f(x,t) - f(a,t)| dt \leqslant \varepsilon(b-a), \quad x \in (a-\delta, a+\delta).$$

$k = 1$: Wystarczy wykazać, że $\varphi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$, $x \in \Omega$ (ciągłość φ' zapewnia przypadek $k = 0$). Ustalmy $a \in \Omega$, $r > 0$ takie, że $[a-r, a+r] \subset \Omega$ i $\varepsilon > 0$. Odwzorowanie $\frac{\partial f}{\partial x}$ jest jednostajnie ciągłe na

(6) Dla $k = 0$ warunek ten oznacza po prostu ciągłość f.
(7) Tzn. możemy różniczkować pod znakiem całki.

$[a-r, a+r] \times P$. Zatem istnieje $0 < \delta < r$ taka, że $|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)| \leqslant \varepsilon$ dla $(x,t) \in (a-\delta, a+\delta) \times P$. Stąd, na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, otrzymujemy:

$$\Big|\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)dt\Big| \leqslant \int_a^b \Big|\frac{f(a+h,t)-f(a,t)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\Big|dt \leqslant \varepsilon(b-a),\ 0 < |h| < \delta. \quad \square$$

Twierdzenie 7.7.2 (Twierdzenie o funkcjach danych całką niewłaściwą). *Niech $\Omega \in \operatorname{top}\mathbb{R}$, niech $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ i niech $f : \Omega \times [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem takim, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mamy:*
- *$f(\cdot,t) \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ dla dowolnego $t \in [a,b)$,*
- *odwzorowanie $\Omega \times [a,b) \ni (x,t) \longmapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j} \in \mathbb{R}$ jest ciągłe dla $j \leqslant k$,*
- *dla dowolnego $j \leqslant k$ istnieje odwzorowanie $g_j \in \mathcal{R}([a,b))$ takie, że $|\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)| \leqslant g_j(t)$ dla $(x,t) \in \Omega \times [a,b)$.*

Wtedy odwzorowanie $\Omega \ni x \overset{\varphi}{\longmapsto} \int_a^b f(x,t)dt$ jest klasy $\mathcal{C}^k(\Omega)$ oraz $\varphi^{(j)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)dt$, $x \in \Omega$, $j \leqslant k$ ([8]).

Odnotujmy, że analogiczny wynik zachodzi, gdy przedział $[a,b)$ zastąpimy przedziałem $(a,b]$ ($-\infty \leqslant a < b < +\infty$) lub też przedziałem (a,b) ($-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$).

Dowód. Ustalmy ciąg $a < \beta_\nu < b$, $\beta_\nu \nearrow b$ i niech $\varphi_\nu(x) := \int_a^{\beta_\nu} f(x,t)dt$, $x \in \Omega$. Na podstawie poprzedniego twierdzenia wnioskujemy, że $\varphi_\nu \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ oraz $\varphi_\nu^{(j)}(x) = \int_a^{\beta_\nu} \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)dt$, $x \in \Omega$, $j \leqslant k$. Zauważmy, że $\varphi_\nu \longrightarrow \varphi$ jednostajnie na Ω. Istotnie, $|\varphi_\nu(x) - \varphi(x)| \leqslant \int_{\beta_\nu}^b g_0(t)dt \longrightarrow 0$. Wynika stąd, że φ jest ciągła. Analogicznie, dla dowolnego $j \leqslant k$ ciąg $(\varphi_\nu^{(j)})_{\nu=1}^\infty$ jest zbieżny jednostajnie. Teraz wystarczy już tylko wykorzystać twierdzenie o różniczkowaniu ciągu wyraz po wyrazie. $\square$

Przykład 7.7.3 (Funkcja Γ Eulera). Niech $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$, $x > 0$. Wtedy:
- $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_{>0})$,
- $\Gamma(1) = 1$, $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$, $x > 0$.

W szczególności, $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Dowód. Niech $f(x,t) := t^{x-1}e^{-t}$, $x,t > 0$. Wtedy $\Gamma(x) = \int_0^1 f(x,t)dt + \int_1^\infty f(x,t)dt$, $x > 0$. Zauważmy, że $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}$. Wobec poprzedniego twierdzenia, dla dowodu, że Γ jest klasy $\mathcal{C}^\infty$ wystarczy pokazać, że dla dowolnego przedziału $[\alpha,\beta] \subset (0,+\infty)$ i dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_0$ istnieją funkcje $g_k \in \mathcal{R}((0,1])$, $h_k \in \mathcal{R}([1,+\infty))$ takie, że:
- $|t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}| \leqslant g_k(t)$, $x \in [\alpha,\beta]$, $t \in (0,1]$,
- $|t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}| \leqslant h_k(t)$, $x \in [\alpha,\beta]$, $t \in [1,\infty)$.

Zdefiniujmy:
- $g_k(t) := t^{\alpha-1}|\ln t|^k e^{-t}$, $0 < t \leqslant 1$,
- $h_k(t) := N!t^{\beta-1+k-N}$, gdzie $N > \beta + k$.

Dla $0 < \varepsilon < \alpha$ mamy $\int_0^1 g_k(t)dt \leqslant \operatorname{const}(\varepsilon)\int_0^1 t^{\alpha-1-\varepsilon}dt = \frac{\operatorname{const}(\varepsilon)}{\alpha-\varepsilon}$. Całkowalność h_k jest oczywista. Ponadto,

$$t^{\beta-1}(\ln t)^k e^{-t} \leqslant t^{\beta-1+k}\frac{1}{\sum\limits_{s=0}^\infty \frac{t^s}{s!}} \leqslant N!t^{\beta-1+k-N}.$$

Jest widoczne, że $\Gamma(1) = 1$. Ponadto, dla $x > 0$ mamy:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}dt = -t^x e^{-t}\Big|_0^{+\infty} + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x). \qquad \square$$

7.8. Całki krzywoliniowe

Będziemy kontynuować rozważania z § 7.4. Na wstępie przypomnijmy Twierdzenie 7.4.5.

([8]) Zauważmy, że nasze założenia gwarantują zbieżność wszystkich występujących w tezie całek niewłaściwych.

Twierdzenie 7.8.1. *Dowolna droga $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jest prostowalna* ([9]) *oraz*

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt. \quad ([10])$$

Niech $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie krzywą i niech $f : \gamma^* \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją ograniczoną ([11]). Dla podziału $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ przedziału $[a,b]$ i dla punktów pośrednich $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ niech

$$M(f, \gamma, \pi, \xi) := \sum_{j=1}^m f(\gamma(\xi_j)) \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|.$$

Powiemy, że funkcja f jest *całkowalna wzdłuż krzywej* γ ($f \in \mathcal{R}(\gamma)$), jeżeli istnieje $c \in \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ przedziału $[a,b]$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^\infty$ mamy $M(f, \gamma, \pi_k, \xi_k) \longrightarrow c$. Liczbę c nazywamy *całką krzywoliniową niezorientowaną z funkcji f po krzywej γ* i oznaczamy $c = \int_\gamma f dl$.

Obserwacja 7.8.2. (a) Całkowalność i całka są niezależne od parametryzacji krzywej.

Istotnie, wystarczy tylko zauważyć, że jeżeli $\tau : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ jest ściśle rosnącą bijekcją, to jest to odwzorowanie jednostajnie ciągłe, a w szczególności obraz normalnego ciągu podziałów jest normalnym ciągiem podziałów.

(b) γ jest prostowalna wtedy i tylko wtedy, gdy $1 \in \mathcal{R}(\gamma)$. Ponadto $L(\gamma) = \int_\gamma 1 dl$.

(c) $f \in \mathcal{R}(\gamma) \iff f \in \mathcal{R}(\ominus\gamma)$. Ponadto, $\int_{\ominus\gamma} f dl = \int_\gamma f dl$ ([12]).

(d) Jeżeli $\gamma_j : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$, są krzywymi takimi, że $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ oraz $f : \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją taka, że $f|_{\gamma_j^*} \in \mathcal{R}(\gamma_j)$, $j = 1, 2$, to $f \in \mathcal{R}(\gamma_1 \oplus \gamma_2)$ oraz

$$\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} f dl = \int_{\gamma_1} f dl + \int_{\gamma_2} f dl.$$

Istotnie, wystarczy rozważyć normalny ciąg podziałów będący „sumą” normalnych ciągów podziałów dla poszczególnych krzywych i udowodnić, że w definicji całki krzywoliniowej niezorientowanej możemy brać tylko takie normalne ciągi podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$, dla których $\widetilde{t} \in \pi_k$, $k \geqslant 1$, gdzie $\widetilde{t}$ jest ustalonym punktem z (a,b).

Rozważmy bowiem dowolny podział $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ i ciąg punktów pośrednich $\xi = (\xi_1, \dots \xi_m)$. Przypuśćmy, że $\widetilde{t} \in (t_{s-1}, t_s)$. Niech $\pi' := (t_0, \dots, t_{s-1}, \widetilde{t}, t_s, \dots, t_m)$ i niech ξ' będzie uzupełnionym ciągiem punktów pośrednich (zachowujemy wszystkie dotychczasowe punkty pośrednie). Wtedy (por. dowód Lematu 7.4.3) mamy:

$$\begin{aligned}|M(f, \gamma, \pi, \xi) - M(f, \gamma, \pi', \xi')| &= \big| f(\xi_s) \|\gamma(t_s) - \gamma(t_{s-1})\| - f(\xi'_s) \|\gamma(\widetilde{t}) - \gamma(t_{s-1})\| - f(\xi'_{s+1}) \|\gamma(t_s) - \gamma(\widetilde{t})\| \big| \\ &\leqslant 3\big(\sup_{\gamma^*} |f|\big) \omega_\gamma(\operatorname{diam} \pi);\end{aligned}$$

dalej rozumujemy standardowo.

(e) Operator $\mathcal{R}(\gamma) \ni f \longmapsto \int_\gamma f dl \in \mathbb{R}$ jest liniowy.

Twierdzenie 7.8.3. *Niech $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie drogą. Wtedy mamy $\mathcal{C}(\gamma^*) \subset \mathcal{R}(\gamma)$ oraz*

$$\int_\gamma f dl = \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt, \quad f \in \mathcal{C}(\gamma^*). \quad ([13])$$

([9]) Względem odległości euklidesowej.

([10]) Tu i dalej $\| \ \|$ oznacza normę Euklidesową w $\mathbb{R}^n$.

([11]) Przypomnijmy, że $\gamma^* := \gamma([a,b])$ jest obrazem geometrycznym krzywej γ.

([12]) Uzasadnia to nazwę „całka niezorientowana”.

([13]) Zauważmy, że całka po prawej stronie istnieje. Twierdzenie daje praktyczny sposób obliczania całek niezorientowanych.

Dowód. Możemy założyć, że γ jest klasy $\mathcal{C}^1$. Ustalmy podział $\pi = (t_0,\dots,t_m)$ oraz punkty pośrednie $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_m)$. Wtedy na postawie twierdzenia o przyrostach skończonych mamy:

$$|M(f,\gamma,\pi,\xi) - M((f\circ\gamma)\|\gamma'\|,\pi,\xi)| \leqslant \sum_{j=1}^{m} |f(\gamma(\xi_j))|\|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})-\gamma'(\xi_j)(t_j-t_{j-1})\|$$

$$\leqslant (\max_{\gamma^*}|f|)\sum_{j=1}^{m}\big(\sup\{\|\gamma'(\eta)-\gamma'(\xi_j)\| : \eta\in[t_{j-1},t_j]\}\big)(t_j-t_{j-1}) \leqslant \big(\max_{\gamma^*}|f|\big)\omega_{\gamma'}(\operatorname{diam}\pi);$$

dalej standardowo. □

Niech teraz $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie dowolną krzywą i niech $V = (V_1,\dots,V_n) : \gamma^* \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym odwzorowaniem (*polem wektorowym*) ograniczonym. Dla podziału $\pi = (t_0,\dots,t_m)$ przedziału $[a,b]$ i dla punktów pośrednich $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_m)$ niech

$$M(V,\gamma,\pi,\xi) := \sum_{j=1}^{m}\langle V(\gamma(\xi_j)),\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})\rangle. \quad (^{14})$$

Powiemy, że pole V jest *całkowalne wzdłuż krzywej* γ, jeżeli istnieje $c\in\mathbb{R}$ takie, że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^{\infty}$ przedziału $[a,b]$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ mamy $M(V,\gamma,\pi_k,\xi_k) \longrightarrow c$. Liczbę c nazywamy *całką krzywoliniową zorientowaną z pola V po krzywej γ* i oznaczamy $c = \int_\gamma V dx = \int_\gamma V_1 dx_1 + \dots + V_n dx_n$.

Obserwacja 7.8.4 (Ćwiczenie). (a) Całkowalność i całka są niezależne od parametryzacji krzywej.

(b) Pole V jest całkowalne na γ wtedy i tylko wtedy, gdy jest całkowalne na $\ominus\gamma$. Ponadto,

$$\int_{\ominus\gamma} V dx = -\int_\gamma V dx \quad (^{15})$$

.

(c) Jeżeli $\gamma_j : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $j=1,2$, są krzywymi takimi, że $\gamma_1(1)=\gamma_2(0)$ oraz $V : \gamma_1^*\cup\gamma_2^* \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem takim, że V jest całkowalne osobno na γ_1 i γ_2, to V jest całkowalne na $\gamma_1\oplus\gamma_2$ oraz

$$\int_{\gamma_1\oplus\gamma_2} V dx = \int_{\gamma_1} V dx + \int_{\gamma_2} V dx.$$

(d) Całka zorientowana po krzywej γ jest operatorem liniowym.

Twierdzenie 7.8.5. *Niech $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie drogą. Wtedy każde pole ciągłe V jest całkowalne na γ oraz*

$$\int_\gamma V dx = \int_0^1 \langle V(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle dt. \quad (^{16})$$

Dowód. Możemy założyć, że γ jest klasy $\mathcal{C}^1$. Ustalmy podział $\pi = (t_0,\dots,t_m)$ oraz punkty pośrednie $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_m)$. Wtedy wobec nierówności Schwarza mamy

$$|M(V,\gamma,\pi,\xi) - M(\langle V\circ\gamma,\gamma'\rangle,\pi,\xi)| \leqslant \sum_{j=1}^{m}\Big|\Big\langle V(\gamma(\xi_j)),\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})-\gamma'(\xi_j)(t_j-t_{j-1})\Big\rangle\Big|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{m}\|V(\gamma(\xi_j))\|\|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})-\gamma'(\xi_j)(t_j-t_{j-1})\| \leqslant \big(\max_{\gamma^*}\|V\|\big)\omega_{\gamma'}(\operatorname{diam}\pi);$$

dalej standardowo. □

(^{14}) $\langle\ ,\ \rangle$ oznacza standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$, $\langle x,y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$.

(^{15}) Uzasadnia to nazwę „całka zorientowana”.

(^{16}) Zauważmy, że całka po prawej stronie istnieje. Twierdzenie daje praktyczny sposób obliczania całek zorientowanych.

ROZDZIAŁ 8

Szeregi Fouriera

8.1. Twierdzenie Riemanna-Lebesgue'a

Do tematyki związanej z szeregami Fouriera powrócimy w wykładzie z Analizy Matematycznej 4.
Niech

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R}) &:= \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathcal{R}([-\pi,\pi]),\ \forall_{x\in\mathbb{R}} : f(x+2\pi) = f(x)\},\\ \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}) &:= \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : \forall_{x\in\mathbb{R}} : f(x+2\pi) = f(x)\}.\end{aligned}$$

Definicja 8.1.1. Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$ definiujemy jej *współczynniki szeregu Fouriera* (1):

$$a_n = a_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \quad b_n = b_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Szeregiem Fouriera funkcji f nazywamy szereg funkcyjny:

$$S(x) = S(f;x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Jego *sumy częściowe* oznaczamy przez:

$$S_k(x) = S_k(f;x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}(a_n\cos nx + b_n\sin nx), \quad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Obserwacja 8.1.2. (a) Jeżeli szereg $S(f;x_0)$ jest zbieżny, to zbieżny jest też szereg $S(f;x_0+2k\pi)$ oraz $S(f;x_0+2k\pi) = S(f;x_0)$, $k \in \mathbb{Z}$. W tym sensie funkcja $S(f;\cdot)$ jest okresowa o okresie 2π.

(b) Jeżeli funkcja f jest parzysta, to $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy szereg Fouriera funkcji f ma postać $S(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$ i jest nazywany *szeregiem kosinusów*.

Istotnie,

$$b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt \overset{u=-t}{=} \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f(-u)\sin(-nu)\,(-du) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin nu\,du = -b_n.$$

(c) Jeżeli funkcja f jest nieparzysta, to $a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Wtedy szereg Fouriera funkcji f ma postać $S(f;x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx$ i jest nazywany *szeregiem sinusów* — ĆWICZENIE.

(d) $a_n(1) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $a_0(1) = 2$. Stąd $S_k(1;x) = 1$, $k \in \mathbb{N}_0$, oraz $S(1;x) = 1$.

(e) Niech

$$\varphi_0 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_{2n-1}(x) := \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_{2n}(x) := \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Wtedy układ $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ jest *ortonormalny*, tzn.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_j(t)\varphi_k(t)\,dt = \delta_{j,k}, \quad j,k \in \mathbb{N}_0 \text{ — Ćwiczenie.}$$

(1) Jean Fourier (1768–1830).

Twierdzenie 8.1.3 (Riemanna–Lebesgue'a). *Niech $P \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem i niech $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taka, że $f|_{[a,b]} \in \mathcal{R}([a,b])$ dla dowolnego $[a,b] \subset P$ oraz $|f| \in \mathcal{R}(P)$* (2). *Wtedy*

$$\lim_{|\alpha|\to+\infty} \int_P f(t)\cos\alpha t\,dt = \lim_{|\alpha|\to+\infty} \int_P f(t)\sin\alpha t\,dt = 0.$$

W szczególności, dla $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$ mamy $a_n(f) \longrightarrow 0$, $b_n(f) \longrightarrow 0$ przy $n \longrightarrow +\infty$.

W rzeczywistości Twierdzenie 8.1.3 jest prawdziwe dla obszerniejszej klasy funkcji.

Dowód. Dowód przeprowadzimy dla $\cos\alpha t$. Przypadek $\sin\alpha t$ pozostawiamy jako Ćwiczenie.

Krok 1^o. Jeżeli $f = \chi_{[p,q],P}$, to

$$\int_P f(t)\cos\alpha t\,dt = \int_p^q \cos\alpha t\,dt = \frac{1}{\alpha}\sin\alpha t\Big|_p^q = \frac{1}{\alpha}(\sin\alpha q - \sin\alpha p) \underset{|\alpha|\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Krok 2^o. Dla dowolnego przedziału $[a,b] \subset P$ oraz dla dowolnego jego podziału $\pi = (x_0,\dots,x_m)$, jeżeli

$$f = \sum_{j=1}^m c_j\chi_{[x_{j-1},x_j],P},$$

gdzie $c_1,\dots,c_m \in \mathbb{R}$, to twierdzenie zachodzi.

Krok 3^o. Jeżeli $(f_s)_{s=1}^\infty \subset \mathcal{R}(P)$, $\int_P |f_s(t)-f(t)|dt \longrightarrow 0$ oraz twierdzenie zachodzi dla każdej z funkcji f_s, to zachodzi dla f.

Istotnie, niech $\varepsilon > 0$ i niech $s \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $\int_P |f_s(t)-f(t)|dt \leqslant \varepsilon/2$. Niech $|\int_P f_s(t)\cos\alpha t\,dt| \leqslant \varepsilon/2$ dla $|\alpha| \geqslant C$. Wtedy dla $|\alpha| \geqslant C$ mamy

$$\Big|\int_P f(t)\cos\alpha t\,dt\Big| \leqslant \Big|\int_P f_s(t)\cos\alpha t\,dt\Big| + \int_P |f_s(t)-f(t)||\cos\alpha t|dt \leqslant \varepsilon.$$

Krok 4^o. Dla dowolnego przedziału $[a,b] \subset P$ twierdzenie zachodzi dla funkcji $f\chi_{[a,b],P}$.

Istotnie, wystarczy pokazać, że istnieje ciąg $(f_s)_{s=1}^\infty$ funkcji „schodkowych" takich, jak w Kroku 2^o, dla którego $\int_P |f_s(t) - f(t)\chi_{[a,b],P}(t)|dt \longrightarrow 0$. Niech $\varepsilon > 0$ i niech $\pi = (x_0,\dots,x_m)$ będzie podziałem przedziału $[a,b]$, takim że $U(f,\pi) - L(f,\pi) \leqslant \varepsilon$. Zdefiniujmy $c_j := M(f,[x_{j-1},x_j])$, $j = 1,\dots,m$, $g := \sum\limits_{j=1}^m c_j\chi_{[x_{j-1},x_j],P}$. Wtedy

$$\int_P |g(t) - f(t)\chi_{[a,b],P}(t)|dt = \int_a^b (g(t)-f(t))dt = \int_a^b g(t)dt - \int_a^b f(t)dt \leqslant U(f,\pi) - L(f,\pi) \leqslant \varepsilon.$$

Krok 5^o. Niech $[a_s,b_s] \nearrow P$. Wobec Kroków 3^o i 4^o, do zakończenia dowodu wystarczy zauważyć, że $\int_P |f - f\chi_{[a_s,b_s],P}| = \int_P |f| - \int_{a_s}^{b_s} |f| \longrightarrow 0$. □

8.2. Kryterium Diniego

Zdefiniujmy pomocniczą funkcję:

$$\varPhi_k(x) := \frac{\sin\frac{(2k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}, \quad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Obserwacja 8.2.1 (Ćwiczenie). (a) $\varPhi_k(-x) = \varPhi_k(x)$.

(b) $\varPhi_k(x + 2\pi) = \varPhi_k(x)$.

(c) $\frac{1}{2}\varPhi_k(x) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^k \cos nx$.

Lemat 8.2.2. *Dla $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$ mamy:*

$$S_k(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\varPhi_k(t)dt, \quad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}_0.$$

W szczególności, $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varPhi_k(t)dt = 1$, $k \in \mathbb{N}_0$.

---

(2) Wobec kryterium porównawczego (Twierdzenie 7.6.6) wiemy, że $f \in \mathcal{R}(P)$. Zauważmy, że jeżeli $P = [a,b]$, to powyższe założenia są równoważne temu, że $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

Dowód. Liczymy:

$$\begin{aligned}S_k(f;x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\tfrac{1}{2}+\sum_{n=1}^{k}(\cos nt\cos nx+\sin nt\sin nx)\Big)dt\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\tfrac{1}{2}+\sum_{n=1}^{k}\cos n(t-x)\Big)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1}{2}\varPhi_k(t-x)dt\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)\frac{1}{2}\varPhi_k(t)dt \overset{(*)}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\tfrac{1}{2}\varPhi_k(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\varPhi_k(t)dt,\end{aligned}$$

gdzie $(*)$ wynika z tego, że funkcja podcałkowa ma okres 2π. $\square$

Twierdzenie 8.2.3. *Dla $f\in\mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$ i dla dowolnego $0<\delta<\pi$ mamy:*

$$\lim_{k\to+\infty} S_k(f;x) = \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\varPhi_k(t)dt,\quad x\in\mathbb{R}$$

(w tym sensie, że obie granice jednocześnie istnieją i są równe). W szczególności, prawdziwa jest następująca zasada lokalizacji*:*

O zbieżności i wartości $S(f;x_0)$ szeregu Fouriera funkcji f w punkcie x_0 decydują wyłącznie wartości funkcji f w dowolnie małym otoczeniu punktu x_0.

Dowód. Ustalmy x. Funkcja

$$[\delta,\pi]\ni t\longmapsto\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}$$

jest całkowalna. Zatem, na podstawie twierdzenia Riemanna–Lebesgue'a, mamy:

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\ \sin\frac{(2k+1)t}{2}dt=0.$$

Teraz wystarczy skorzystać z Lematu 8.2.2. $\square$

Twierdzenie 8.2.4 (Kryterium Diniego). *Niech $f\in\mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$ i $x_0,A\in\mathbb{R}$ będą takie, że funkcja*

$$(0,\pi]\ni t\overset{\psi}{\longmapsto}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2A}{t}$$

jest bezwzględnie całkowalna. Wtedy $S(f;x_0)=\lim_{k\to+\infty}S_k(f;x_0)=A$.

Dowód. Na podstawie Lematu 8.2.2 mamy:

$$S_k(f;x_0)-A=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}-A\Big)\varPhi_k(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(\psi(t)\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\Big)\sin\frac{(2k+1)t}{2}\,dt.$$

Ponieważ funkcja $(0,\pi]\ni t\longmapsto\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$ przedłuża się do funkcji ciągłej na $[0,\pi]$, zatem funkcja $(0,\pi]\ni t\longmapsto\psi(t)\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$ jest bezwzględnie całkowalna (kryterium porównawcze) i możemy skorzystać z twierdzenia Riemanna–Lebesgue'a. $\square$

Obserwacja 8.2.5 (Przykłady użycia kryterium Diniego). (a) Jeżeli funkcja

$$(0,\pi]\ni t\overset{\psi}{\longmapsto}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)}{t}$$

jest bezwzględnie całkowalna, to $S_k(f;x_0)\longrightarrow f(x_0)$.

(b) W szczególności, jeżeli istnieje skończona granica

$$\lim_{t\to0+}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)}{t},$$

to $S(f;x_0)=f(x_0)$.

(c) W szczególności, jeżeli granice jednostronne $f(x_0\pm):=\lim_{t\to0\pm}f(x_0+t)$ istnieją i są skończone, $2f(x_0)=f(x_0+)+f(x_0-)$ oraz istnieją skończone granice $\lim_{t\to0+}\frac{f(x_0\pm t)-f(x_0\pm)}{t}$, to $S(f;x_0)=f(x_0)$.

(d) W szczególności, jeżeli $f'(x_0)$ istnieje, to $S(f;x_0)=f(x_0)$.

(e) Jeżeli granice jednostronne $f(x_0\pm)$ istnieją i są skończone, $2f(x_0) = f(x_0+) + f(x_0-)$ oraz

$$|f(x_0 \pm t) - f(x_0\pm)| \leqslant Ct^\alpha, \quad 0 \leqslant t \leqslant \delta,$$

dla pewnych $C, \alpha, \delta > 0$, to funkcja ψ (z $A := f(x_0)$) jest bezwzględnie całkowalna, a zatem $S(f; x_0) = f(x_0)$.

Przykład 8.2.6. Niech $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją okresową o okresie 2π taką, że

$$h(x) = \begin{cases} -x-\pi, & \text{jeżeli } -\pi \leqslant x < 0 \\ 0, & \text{jeżeli } x = 0 \\ -x+\pi, & \text{jeżeli } 0 < x \leqslant \pi \end{cases}.$$

Wtedy

$$h(x) = S(h; x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ponadto, szereg jest zbieżny niemal jednostajnie na przedziale $(0, 2\pi)$ (3).

Istotnie, funkcja h jest nieparzysta, więc $a_n(h) = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ponadto

$$b_n(h) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - t)\sin nt\, dt = -\frac{2}{n}\cos nt\Big|_0^\pi + \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}t\cos nt\Big|_0^\pi - \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\sin nt\Big|_0^\pi = \frac{2}{n}\Big(\frac{t}{\pi} - 1\Big)\cos nt\Big|_0^\pi = \frac{2}{n}.$$

Zauważmy, że funkcja h spełnia w każdym punkcie warunek z kryterium Diniego bo jest różniczkowalna w $[-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ (dla $x_0 = 0$ zbieżność jest trywialna). Zbieżność niemal jednostajna wynika z kryterium Dirichleta jednostajnej zbieżności. Istotnie, na podstawie Przykładu 6.2.2(a) wiemy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ jest zbieżny niemal jednostajnie na $\mathbb{T} \setminus \{1\}$. W szczególności, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \operatorname{Im}\big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{ix})^n}{n}\big)$ jest zbieżny niemal jednostajnie na $[-\pi, 0) \cup (0, \pi]$.

8.3. Twierdzenie Fejéra

Twierdzenie 8.3.1 (Twierdzenie Fejéra (4)). *Dla $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ zdefiniujmy:*

$$\sigma_k(f; x) := \frac{S_0(f; x) + \dots + S_{k-1}(f; x)}{k}, \quad x \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, \dots.$$

Wtedy $\sigma_k(f; \cdot) \longrightarrow f$ jednostajnie na $\mathbb{R}$.

Dowód. Korzystając z Lematu 8.2.2 i wzoru

$$\sum_{j=0}^{k-1} \sin(2j+1)\alpha = \frac{\sin^2 k\alpha}{\sin\alpha} \quad (\text{Ćwiczenie}),$$

dostajemy

$$\begin{aligned} \sigma_k(f; x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \cdot \frac{1}{k\sin\frac{t}{2}} \sum_{j=0}^{k-1} \sin(2j+1)\frac{t}{2}dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \cdot \frac{\sin^2 k\frac{t}{2}}{k\sin^2\frac{t}{2}}\, dt, \quad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Niech

$$\Psi_k(x) := \frac{\sin^2 k\frac{x}{2}}{k\sin^2\frac{x}{2}}, \quad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy, że $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Psi_k(t)dt = 1$, $k \in \mathbb{N}$. Niech $C > 0$ będzie takie, że $|f(x)| \leqslant C$, $x \in \mathbb{R}$. Dla $0 < \delta < \pi$ liczymy:

$$|\sigma_k(f; x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big|\frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{2}\Big|\Psi_k(t)dt$$

---

(3) Tzn. jest zbieżny jednostajnie na dowolnym zbiorze zwartym $K \subset (0, 2\pi)$.

(4) Lipót Fejér (1880–1959).

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \omega_f(\delta)\Psi_k(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi 2C\Psi_k(t)dt \leqslant \omega_f(\delta) + \frac{2C}{k\sin^2\frac{\delta}{2}}, \quad x\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{N}. \quad \square$$

Definicja 8.3.2. *Wielomianem trygonometrycznym* nazywamy dowolną funkcję postaci

$$\mathbb{R}\ni x\longmapsto \alpha_0+\sum_{n=1}^k(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx).$$

Jako natychmiastowy wniosek z twierdzenia Fejéra dostajemy następujący wynik.

Wniosek 8.3.3. *Dla dowolnej funkcji $f\in\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ istnieje ciąg wielomianów trygonometrycznych $(w_k)_{k=1}^\infty$ taki, że $w_k\longrightarrow f$ jednostajnie na $\mathbb{R}$.*

Twierdzenie 8.3.4 (Twierdzenie aproksymacyjne Weierstrassa). *Dla dowolnej funkcji $f\in\mathcal{C}([a,b])$ istnieje ciąg wielomianów $(P_k)_{k=1}^\infty$ taki, że $P_k\longrightarrow f$ jednostajnie na $[a,b]$.*

Dowód. Istotnie, problem sprowadza się do udowodnienia, że każda funkcja $f\in\mathcal{C}([0,\pi])$ daje się jednostajnie aproksymować wielomianami (Ćwiczenie). Ustalmy f. Funkcję tę możemy oczywiście przedłużyć do funkcji ciągłej na $\mathbb{R}$ i okresowej o okresie 2π. Na podstawie Wniosku 8.3.3, dla dowolnego $\varepsilon>0$ istnieje wielomian trygonometryczny w taki, że $|w(x)-f(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$, $x\in\mathbb{R}$. W takim razie problem sprowadza się do aproksymacji na $[0,\pi]$ wielomianów trygonometrycznych zwykłymi wielomianami. Wobec postaci wielomianu trygonometrycznego, wystarczy umieć aproksymować funkcje $x\longmapsto\cos nx$ i $x\longmapsto\sin nx$, $n\in\mathbb{N}$. To zaś wynika bezpośrednio z faktu, że funkcje te są rozwijalne w szeregi potęgowe zbieżne na $\mathbb{R}$. $\square$

8.4. Szeregi Fouriera — abstrakcyjny punkt widzenia

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią z semi-iloczynem skalarnym $\langle\ ,\ \rangle$ (zob. § 5.11.3). Od tej chwili zakładamy, że $\dim\mathcal{H}=\infty$. Przypuśćmy, że $(\varphi_n)_{n=0}^\infty\subset\mathcal{H}$ jest *układem ortonormalnym* w $\mathcal{H}$, tzn. $\langle\varphi_j,\varphi_k\rangle=\delta_{j,k}$, $j,k=0,1,2,\dots$.

Obserwacja 8.4.1. Niech $\mathcal{H}=\mathcal{R}([-\pi,\pi])$. Wtedy układ trygonometryczny

$$\varphi_0:=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \varphi_{2n-1}(x):=\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\quad \varphi_{2n}(x):=\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\quad n=1,2,\dots.$$

jest ortonormalny, tzn. $\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_j(t)\varphi_k(t)\,dt=\delta_{j,k}$, $j,k\in\mathbb{N}_0$.

Obserwacja 8.4.2. (a) Jeżeli $f=\lambda_0\varphi_0+\dots+\lambda_k\varphi_k$, to $\lambda_j=\langle f,\varphi_j\rangle$, $j=0,\dots,k$, oraz $\|f\|^2=|\lambda_0|^2+\dots+|\lambda_k|^2$.

(b) Układ $(\varphi_j)_{j=0}^\infty$ jest liniowo niezależny.

(c) (*Ortonormalizacja*) Niech $(\psi_j)_{j=0}^\infty$ będzie dowolnym układem liniowo niezależnym. Wtedy istnieje taki układ ortonormalny $(\varphi_j)_{j=0}^\infty$, że dla dowolnego $k=0,1,2,\dots$ mamy

$$\mathbb{K}\psi_0+\dots+\mathbb{K}\psi_k=\mathbb{K}\varphi_0+\dots+\mathbb{K}\varphi_k. \tag{$*$}$$

Istotnie, definiujemy $\varphi_0:=\psi_0/\|\psi_0\|$ i jeżeli już $\varphi_0,\dots,\varphi_\ell$ są zdefiniowane i spełniają $(*)$ dla $k=0,\dots,\ell$, to kładziemy $\varphi_{\ell+1}:=\vartheta_{\ell+1}/\|\vartheta_{\ell+1}\|$, gdzie $\vartheta_{\ell+1}:=\psi_{\ell+1}-\sum\limits_{j=0}^{\ell}\langle\psi_{\ell+1},\varphi_j\rangle\varphi_j$. Sprawdzamy, że $\varphi_0,\dots,\varphi_{\ell+1}$ spełniają wszystkie wymagane warunki:

$$\langle\vartheta_{\ell+1},\varphi_k\rangle=\langle\psi_{\ell+1},\varphi_k\rangle-\sum_{j=0}^{\ell}\langle\psi_{\ell+1},\varphi_j\rangle\langle\varphi_j,\varphi_k\rangle=0,\quad k=1,\dots,\ell.$$

Niech $V_k:=\mathbb{K}\varphi_0+\dots+\mathbb{K}\varphi_k$. Oczywiście $V_k\subset V_{k+1}$ oraz $\dim_{\mathbb{K}}V_k=k+1$, $k=0,1,2,\dots$. Zdefiniujmy $S_k:\mathcal{H}\longrightarrow V_k$, $S_k(f):=\langle f,\varphi_0\rangle\varphi_0+\dots+\langle f,\varphi_k\rangle\varphi_k$, $k=0,1,2,\dots$. Wiemy, że $\|S_k(f)\|^2=\sum\limits_{j=0}^{k}|\langle f,\varphi_j\rangle|^2$.

Obserwacja 8.4.3. (a) S_k jest operacją $\mathbb{K}$–liniową.

(b) $S_k=\mathrm{id}$ na V_k.

(c) $\langle f-S_k(f),g\rangle=0$, $g\in V_k$.

Istotnie, $\langle f-S_k(f),\varphi_j\rangle=\langle f,\varphi_j\rangle-\langle S_k(f),\varphi_j\rangle=\langle f,\varphi_j\rangle-\langle f,\varphi_j\rangle=0$, $j=0,\dots,k$.

(d) $\|f - S_k(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|S_k(f)\|^2$, $f \in \mathcal{H}$, $k = 0, 1, 2, \dots$.
Istotnie, $\|f\|^2 = \|S_k(f) + (f - S_k(f))\|^2 = \|S_k(f)\|^2 + \|f - S_k(f)\|^2$.

(e) (Nierówność Bessela (5)) $\sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 \leqslant \|f\|^2$, $f \in \mathcal{H}$.

(f) Jeżeli $\mathcal{H} = \mathcal{R}_{2\pi}([-\pi, \pi])$, zaś $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ jest układem trygonometrycznym, to nierówność Bessela ma postać:

$$\tfrac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt.$$

Istotnie, $\sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 = \big(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}a_0\big)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\big((\sqrt{\pi}a_n)^2 + (\sqrt{\pi}b_n)^2\big)$.

(g) $S_k(f)$ realizuje semi-odległość elementu f od przestrzeni V_k, tzn. $\|f - S_k(f)\| = \operatorname{dist}(f, V_k) := \inf\{\|f - g\| : g \in V_k\}$, $f \in \mathcal{H}$, $k = 0, 1, 2, \dots$.
Istotnie,

$$\|f - \sum_{j=0}^{k}\lambda_j\varphi_j\|^2 - \|f - S_k(f)\|^2 = -2\operatorname{Re}\Big(\sum_{j=0}^{k}\lambda_j\overline{\langle f, \varphi_j\rangle}\Big) + \sum_{j=0}^{k}|\lambda_j|^2 + \sum_{j=0}^{k}|\langle f, \varphi_j\rangle|^2 = \sum_{j=0}^{k}|\lambda_j - \langle f, \varphi_j\rangle|^2.$$

(h) $S_k(f)$ jest jedynym elementem o własności (g).

Od tej chwili zakładamy, że $\langle\ ,\ \rangle$ jest iloczynem skalarnym, z którym $\mathcal{H}$ jest przestrzenią Hilberta.

Twierdzenie 8.4.4. *Dla dowolnego $f \in \mathcal{H}$, szereg $S(f) := \sum_{n=0}^{\infty}\langle f, \varphi_n\rangle\varphi_n$ jest zbieżny.*

Dowód. Pokażemy, że szereg $S(f)$ spełnia warunek Cauchy'ego. Mamy

$$\Big\|\sum_{j=n}^{m}\langle f, \varphi_j\rangle\varphi_j\Big\|^2 = \sum_{j=n}^{m}|\langle f, \varphi_j\rangle|^2, \quad m > n.$$

Teraz wystarczy skorzystać z nierówności Bessela). □

Zauważmy, że $(k+1)$-sza suma częściowa szeregu $S(f)$ jest równa $S_k(f)$. Szereg $S(f)$ nazywamy *szeregiem Fouriera* elementu f (w bazie ortonormalnej $(\varphi_j)_{j=0}^{\infty}$). Jest widoczne, że operacja $\mathcal{H} \ni f \longmapsto S(f) \in \mathcal{H}$ jest liniowa. Ponadto, $\|f - S(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|S(f)\|^2$. W szczególności, $\|S(f)\| \leqslant \|f\|$, $f \in \mathcal{H}$.

Niech $V := \bigcup_{k=0}^{\infty} V_k$. Odnotujmy, że V jest podprzestrzenią wektorową $\mathcal{H}$.

Twierdzenie 8.4.5. *Następujące warunki są równoważne:*
(i) $S = \mathrm{id}$;
(ii) $\|S(f)\| = \|f\|$, $f \in \mathcal{H}$, *tzn. S jest izometrią;*
(iii) *zachodzi* tożsamość Parsevala (6) $\langle f, g\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle f, \varphi_n\rangle\overline{\langle g, \varphi_n\rangle}$, $f, g \in \mathcal{H}$;
(iv) $V^{\perp} = \{0\}$, *tzn. jeżeli $\langle f, \varphi_j\rangle = 0$ dla $j = 0, 1, 2, \dots$, to $f = 0$;*
(v) $\overline{V} = \mathcal{H}$.

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (iii): $\langle f, g\rangle = \langle S(f), S(g)\rangle$.
(iii) $\Longrightarrow$ (ii): $f = g$.
(ii) $\Longrightarrow$ (i): Wynika z równości $\|f - S(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|S(f)\|^2$.
(i) $\Longrightarrow$ (iv): Jeżeli $f \perp \varphi_j$ dla dowolnego j, to $S(f) = 0$.
(iv) $\Longrightarrow$ (i): $\langle f - S(f), \varphi_j\rangle = 0$ dla dowolnego j.
(i) $\Longrightarrow$ (v): $V \ni S_k(f) \longrightarrow f \in \overline{V}$.
(v) $\Longrightarrow$ (i): Przypuśćmy, że $V \supset V_{k_\nu} \ni f_\nu \longrightarrow f$. Wtedy

$$\|f - S_{k_\nu}(f)\| = \operatorname{dist}(f, V_{k_\nu}) \leqslant \|f - f_\nu\| \longrightarrow 0.$$

---

(5) Friedrich Bessel (1784–1846).
(6) Marc–Antoine Parseval (1755–1836).

Ponieważ ciąg $(\|f - S_k(f)\|)_{k=0}^{\infty}$ jest monotoniczny ([7]), zatem $\|f - S_k(f)\| \longrightarrow 0$, a stąd $\|f - S(f)\| = 0$, czyli $S(f) = f$. $\square$

Definicja 8.4.6. Jeżeli jest spełniony którykolwiek z równoważnych warunków z Twierdzenia 8.4.5, to mówimy, że układ ortonormalny $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ jest *zupełny*.

Twierdzenie 8.4.7. *Dla nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ następujące warunki są równoważne:*

(i) *w $\mathcal{H}$ istnieje układ ortonormalny zupełny;*

(ii) *$\mathcal{H}$ jest przestrzenią* ośrodkową, *tzn. posiada przeliczalny podzbiór gęsty.*

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Niech $(\varphi_j)_{j=0}^{\infty}$ będzie układem ortonormalnym zupełnym. Wtedy, na podstawie Twierdzenia 8.4.5, zbiór $A := \{\lambda_0\varphi_0 + \dots + \lambda_k\varphi_k : k \in \mathbb{N}_0,\ \lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K} \cap (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})\}$ jest gęsty w $\mathcal{H}$ (i oczywiście przeliczalny).

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Wobec Obserwacji 8.4.2(c) wystarczy znaleźć układ liniowo niezależny $(\psi_j)_{j=0}^{\infty}$ taki, że przestrzeń $V := \bigcup\limits_{k=0}^{\infty}(\mathbb{K}\psi_0 + \dots + \mathbb{K}\psi_k)$ jest gęsta w $\mathcal{H}$. Niech $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ będzie zbiorem przeliczalnym gęstym i niech $\psi_0 := a_{k_0}$ będzie pierwszym niezerowym wektorem w tym ciągu. Niech dalej $\psi_1 := a_{k_1}$ będzie pierwszym wektorem liniowo niezależnym z a_{k_0}. Jeżeli już określimy $\psi_j = a_{k_j}$ dla $j = 0, \dots, \ell$, to chcemy by $\psi_{\ell+1} := a_{k_{\ell+1}}$ był pierwszym wektorem liniowo niezależnym z $a_{k_0}, \dots, a_{k_\ell}$. Gdyby ta procedura się zacinała na pewnym ℓ, to wtedy $A \subset W := \mathbb{K}a_{k_0} + \dots + \mathbb{K}a_{k_\ell}$. Przestrzeń W, jako przestrzeń skończenie wymiarowa jest domknięta (zob. Wniosek 5.11.12). Wynika stąd, że $\mathcal{H} = \overline{A} = W$, a więc $\mathcal{H}$ musi być przestrzenią skończenie wymiarową; sprzeczność.

Tak więc nasza procedura daje liniowo niezależny układ $(\psi_j)_{j=0}^{\infty}$ taki, że $A \subset V$, gdzie V jest jak powyżej. W szczególności, $\mathcal{H} = \overline{A} = \overline{V}$. $\square$

Obserwacja 8.4.8. Przypomnijmy raz jeszcze, że przestrzeń $\mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$ *nie* jest przestrzenią Hilberta i nie możemy dla niej skorzystać z Twierdzenia 8.4.7. Będzie do możliwe dla przestrzeni $L^2_{2\pi}(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f|_{[-\pi,\pi]} \in L^2([-\pi,\pi]),\ \forall_{x\in\mathbb{R}} : f(x + 2\pi) = f(x)\}$, gdzie $L^2([-\pi,\pi])$ oznacza przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem w sensie Lebesgue'a. Do tematu wrócimy w trakcie wykładu z Analizy Matematycznej 4.

8.5. Kryteria zbieżności jednostajnej

Twierdzenie 8.5.1 (Kryterium zbieżności jednostajnej)**.** *Niech $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ będzie taka, że $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathcal{C}'^1([-\pi,\pi])$. Wtedy $S_k(f;\cdot) \longrightarrow f$ jednostajnie na $\mathbb{R}$.*

Dowód. Wobec Kryterium Diniego wiemy, że $S_k(f;x) \longrightarrow f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Wystarczy więc pokazać, że ciąg $(S_k(f))_{k=0}^{\infty}$ jest zbieżny jednostajnie. Zastosujemy kryterium Weierstrassa i wykażemy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)| + |b_n(f)| < +\infty.$$

Zauważmy, że $f' \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$. W szczególności, na podstawie nierówności Bessela, mamy:

$$\tfrac{1}{2}a_0^2(f') + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2(f') + b_n^2(f')) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'^2(t)\,dt.$$

Całkując przez części dostajemy: $a_n(f') = nb_n(f)$, $b_n(f') = -na_n(f)$, $n = 1, 2, \dots$ ([8]). Teraz, na podstawie nierówności Schwarza, mamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(f)| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|b_n(f')| \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2(f')\Big)^{1/2} < +\infty.$$

Zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n(f)|$ sprawdzamy analogicznie. $\square$

([7]) $\|f - S_{k+1}(f)\| = \operatorname{dist}(f, V_{k+1}) \leqslant \operatorname{dist}(f, V_k) = \|f - S_k(f)\|$.

([8]) Dla przykładu: $a_n(f') = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}f(t)\cos nt|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = nb_n(f)$.

Twierdzenie 8.5.2 (Kryterium zbieżności niemal jednostajnej)**.** *Niech $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją okresową o okresie 2π, taką, że $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathcal{C}'^1([-\pi,\pi])$. Wtedy*

$$S_k(f;x) \longrightarrow \frac{f(x+)+f(x-)}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ponadto, $S_k(f;\cdot) \longrightarrow f$ niemal jednostajnie w dowolnym przedziale otwartym, w którym f jest klasy $\mathcal{C}^1$.

Dowód. Przypomnijmy Przykład 8.2.6. Niech $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją okresową o okresie 2π taką, że

$$h(x) = \begin{cases} -x-\pi, & \text{jeżeli } -\pi \leqslant x < 0 \\ 0, & \text{jeżeli } x = 0 \\ -x+\pi, & \text{jeżeli } 0 < x \leqslant \pi \end{cases}.$$

Wtedy

$$h(x) = S(h;x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ponadto, szereg jest zbieżny niemal jednostajnie na przedziale $(0,2\pi)$.

Bez zmiany szeregu Fouriera możemy zmodyfikować funkcję f tak, by

$$2f(x) = f(x+)+f(x-), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Po takiej zmianie, pierwsza część tezy sprowadza się do udowodnienia, że

$$S_k(f;\cdot) \longrightarrow f \text{ punktowo na } \mathbb{R}.$$

Założenie, że f jest kawałkami klasy $\mathcal{C}^1$ gwarantuje, że w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$, spełniony jest warunek z kryterium Diniego, tzn. istnieje skończona granica

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x+)}{h} + \lim_{h\to 0+} \frac{f(x-h)-f(x-)}{h},$$

co daje zbieżność punktową.

Problemem jest zbieżność niemal jednostajna. Niech $-\pi = \xi_0 < \dots < \xi_N = \pi$ będą punktami „osobliwymi" funkcji f, tzn. dla dowolnego $j \in \{1,\dots,N\}$ funkcja

$$[\xi_{j-1},\xi_j] \ni x \longmapsto \begin{cases} f(\xi_{j-1}+), & \text{jeżeli } x = \xi_{j-1} \\ f(x), & \text{jeżeli } \xi_{j-1} < x < \xi_j \\ f(\xi_j-), & \text{jeżeli } x = \xi_j \end{cases}$$

jest klasy $\mathcal{C}^1$. Niech

$$c_j := \begin{cases} \frac{1}{4}(f(\xi_j+)-f(\xi_j-)), & \text{jeżeli } j \in \{0,N\} \\ \frac{1}{2}(f(\xi_j+)-f(\xi_j-)), & \text{jeżeli } j = 1,\dots,N-1 \end{cases}.$$

Odnotujmy, że $c_0 = c_N$. Zdefiniujmy

$$g(x) := f(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{N} c_j h(x-\xi_j), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Jest to oczywiście funkcja okresowa o okresie 2π i kawałkami klasy $\mathcal{C}^1$ (o co najwyżej tych samych punktach osobliwych w $[-\pi,\pi]$). Pokażemy, że g jest ciągła.

Istotnie, dla $\ell \in \{0,N\}$ mamy:

$$g(\xi_\ell+)-g(\xi_\ell-) = 4c_\ell - \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{N} c_j\Big(h\big((\xi_\ell-\xi_j)+\big) - h\big((\xi_\ell-\xi_j)-\big)\Big)$$

$$= 4c_\ell - 2\sum_{\substack{j\in\{0,\dots,N\}:\\ (\xi_\ell-\xi_j)/(2\pi)\in\mathbb{Z}}} c_j = 4c_\ell - 2c_\ell - 2c_\ell = 0,$$

zaś dla $\ell \in \{1, \dots, N-1\}$ mamy:

$$g(\xi_\ell+) - g(\xi_\ell-) = 2c_\ell - \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{N} c_j\Big(h\big((\xi_\ell - \xi_j)+\big) - h\big((\xi_\ell - \xi_j)-\big)\Big) = 2c_\ell - 2c_\ell = 0.$$

Na podstawie Twierdzenia 8.5.1, $S_k(g, \cdot) \longrightarrow g$ jednostajnie na $\mathbb{R}$. Zauważmy, że

$$S_k(g; x) = S_k(f; x) - \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{N} c_j S_k(h(\cdot - \xi_j); x), \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Teraz pozostaje już tylko skorzystać z Przykładu 8.2.6, z którego wynika, że $S_k(h(\cdot - \xi_j); x) \longrightarrow h(x - \xi_j)$ niemal jednostajnie w każdym z przedziałów (ξ_{j-1}, ξ_j), $j = 1, \dots, N$. □

8.6. Funkcje o wahaniu ograniczonym

Definicja 8.6.1. Dla dowolnej funkcji $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ zdefiniujmy

$$\mathbb{V}(f) = \mathbb{V}_{[a,b]}(f) := \sup\Big\{\sum_{j=1}^{N} |f(t_{j-1}) - f(t_j)| : N \in \mathbb{N},\ a = t_0 < \dots < t_N = b\Big\}.$$

Liczbę $\mathbb{V}(f) \in [0, +\infty]$ nazywamy *wahaniem* funkcji f na przedziale $[a, b]$. Jeżeli $\mathbb{V}(f) < +\infty$, to mówimy, że funkcja f ma *wahanie ograniczone*. Zbiór funkcji o wahaniu ograniczonym na przedziale $[a, b]$ oznaczamy przez $\mathcal{BV}([a, b])$.

Obserwacja 8.6.2 (Odwzorowania o wahaniu ograniczonym). (a) $\mathbb{V}(\alpha f) = |\alpha|\mathbb{V}(f)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbb{V}(f + g) \leqslant \mathbb{V}(f) + \mathbb{V}(g)$. W szczególności, $\mathcal{BV}([a, b])$ jest przestrzenią wektorową.

(b) $\mathbb{V}_{[a,b]}(f) = \mathbb{V}_{[a,c]}(f) + \mathbb{V}_{[c,b]}(f)$, $a \leqslant c \leqslant b$. W szczególności, $\mathbb{V}_{[c,d]}(f) \leqslant \mathbb{V}_{[a,b]}(f)$ dla $[c, d] \subset [a, b]$.

(c) $|f(x') - f(x'')| \leqslant \mathbb{V}_{[x',x'']}(f)$, $x', x'' \in [a, b]$. W szczególności, $\mathcal{BV}([a, b]) \subset \mathcal{B}([a, b])$.

(d) Dla $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mamy: $\mathbb{V}(fg) \leqslant (\sup_{[a,b]}|f|) \cdot \mathbb{V}(g) + \mathbb{V}(f) \cdot (\sup_{[a,b]}|g|)$. W szczególności, $\mathcal{BV}([a, b])$ jest algebrą.

(e) Jeżeli $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest monotoniczna, to $\mathbb{V}(f) = |f(a) - f(b)|$. W szczególności, $f \in \mathcal{BV}([a, b])$.

(f) Jeżeli $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą L, to $\mathbb{V}(f) \leqslant L(b - a)$. Dla przykładu, jeżeli f jest różniczkowalna i ma ograniczoną pochodną, to $f \in \mathcal{BV}([a, b])$. W szczególności, $\mathcal{C}^1([a, b]) \subset \mathcal{BV}([a, b])$.

(g) Niech $f(x) := \begin{cases} x\sin\frac{\pi}{x}, & \text{jeżeli } 0 < x \leqslant 2 \\ 0, & \text{jeżeli } x = 0 \end{cases}$ (f jest oczywiście ciągła). Mamy:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{[0,2]}(f) &\geqslant \sum_{j=1}^{n-1}\Big|f\Big(\frac{2}{2n-2j+3}\Big) - f\Big(\frac{2}{2n-2j+1}\Big)\Big| \\ &= \sum_{j=1}^{n-1}\Big(\frac{2}{2n-2j+3} + \frac{2}{2n-2j+1}\Big) \geqslant 4\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{2n-2j+3} \overset{\text{Ćwiczenie}}{\longrightarrow} +\infty.\end{aligned}$$

(h) Dla $f \in \mathcal{BV}([a, b]$ mamy: $f \in \mathcal{C}([a, b]) \iff$ funkcja $[a, b] \ni x \overset{\varphi}{\longmapsto} \mathbb{V}_{[a,x]}(f)$ jest ciągła.

Istotnie, implikacja ($\Longleftarrow$) wynika (b) i (c): $|f(x') - f(x'')| \leqslant |\mathbb{V}_{[a,x']}(f) - \mathbb{V}_{[a,x'']}(f)|$, $x', x'' \in [a, b]$.

Dla dowodu implikacji ($\Longrightarrow$) zauważmy, że, wobec (b), funkcja φ jest niemalejąca, a więc jej nieciągłość oznacza istnienie skoku, np. $\varphi(x) > \varphi(x_0) + \delta$ dla dowolnych $a \leqslant x_0 < x \leqslant b$, gdzie $\delta > 0$. Wobec (b) mamy: $\mathbb{V}_{[x_0,x]}(f) > \delta$, $x_0 < x$. W szczególności, $\mathbb{V}_{[x_0,b]}(f) > \delta$, co oznacza istnienie podziału $x_0 = t_0 < \dots < t_N = b$ takiego, że $\sum_{j=1}^{N} |f(t_j) - f(t_{j-1})| > \delta$. Korzystając z ciągłości funkcji f wnioskujemy, że istnieje punkt $x_0 < x_1 < t_1$ taki, że $|f(x_1) - f(t_1)| + \sum_{j=2}^{N} |f(t_j) - f(t_{j-1})| > \delta$, skąd wynika, że $\mathbb{V}_{[x_1,b]}(f) > \delta$. Powtarzając to samo rozumowanie dla przedziału $[x_0, x_1]$, wnioskujemy, że istnieje $x_0 < x_2 < x_1$ taki, że $\mathbb{V}_{[x_2,x_1]}(f) > \delta$. Po k krokach dostajemy ciąg $x_0 < x_k < \dots < x_1 < b$ taki, że $\mathbb{V}_{[x_j,x_{j-1}]}(f) > \delta$, $j = k, \dots, 2$. Teraz, korzystając z (b), mamy:

$$\mathbb{V}_{[x_0,b]}(f) = \mathbb{V}_{[x_0,x_k]}(f) + \mathbb{V}_{[x_k,x_{k-1}]}(f) + \dots + \mathbb{V}_{[x_2,x_1]}(f) + \mathbb{V}_{[x_1,b]}(f) \geqslant (k+1)\delta \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty;$$

sprzeczność.

W przypadku skoku: $\varphi(x) < \varphi(x_0) - \delta$ dla dowolnych $a \leqslant x < x_0 \leqslant b$, postępujemy analogicznie.

Twierdzenie 8.6.3 (Rozkład Jordana). *Funkcja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ma wahanie ograniczone wtedy i tylko wtedy, gdy $f = f_1 - f_2$, gdzie $f_1, f_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ są niemalejące* (9). *W szczególności, zbiór punktów nieciągłości funkcji o wahaniu ograniczonym może być co najwyżej przeliczalny oraz każda funkcja o wahaniu ograniczonym ma w każdym punkcie skończone granice jednostronne.*

Ponadto, jeżeli f jest ciągła, to funkcje f_1 i f_2 można wybrać w klasie funkcji ciągłych.

Dowód. Dostateczność warunku wynika z Obserwacji 8.6.2(a)(e).

Dla dowodu konieczności, niech $f_1(x) := \mathbb{V}_{[a,x]}(f) + |f(a)|$, $x \in [a, b]$. Na podstawie Obserwacji 8.6.2(b), funkcja f_1 jest niemalejąca. Ponadto, na podstawie Obserwacji 8.6.2(h), jeżeli f jest ciągła, to f_1 jest ciągła. Pozostaje wykazać, że funkcja $f_2 := f_1 - f$ jest niemalejąca (ponieważ $f_2(a) = f_1(a) - f(a) = |f(a)| - f(a) \geqslant 0$, będzie ona automatycznie nieujemna). Korzystając z Obserwacji 8.6.2(b)(c), dla $a \leqslant x' < x'' \leqslant b$, mamy:

$$f_2(x'') - f_2(x') = \mathbb{V}_{[a,x'']}(f) - \mathbb{V}_{[a,x']}(f) - (f(x'') - f(x')) = \mathbb{V}_{[x',x'']}(f) - (f(x'') - f(x')) \geqslant 0. \qquad \square$$

8.7. Kryterium Jordana

Twierdzenie 8.7.1 (Kryterium Jordana). *Niech $f \in \mathcal{R}^1_{2\pi}(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$ i $0 < \delta \leqslant \pi$ będą takie, że $\mathbb{V}_{[x_0-\delta,x_0+\delta]}(f) < +\infty$ oraz $2f(x_0) = f(x_0+) + f(x_0-)$* (10). *Wtedy $S_k(f; x_0) \longrightarrow f(x_0)$.*

Lemat 8.7.2 (Twierdzenie o wartości średniej). *Niech $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ będzie funkcją monotoniczną i niech $\psi \in \mathcal{R}([a, b])$. Wtedy istnieje punkt $\xi \in [a, b]$ taki, że*

$$\int_a^b \varphi(t)\psi(t)\,dt = \begin{cases} \varphi(b-) \int_\xi^b \psi(t)\,dt, & \text{jeżeli } \varphi \text{ jest rosnąca} \\ \varphi(a+) \int_a^\xi \psi(t)\,dt, & \text{jeżeli } \varphi \text{ jest malejąca} \end{cases}.$$

Dowód. Podstawienie $t := a + b - u$ redukuje przypadek malejący do rosnącego. Dla $n \in \mathbb{N}$, niech

$$t_{n,j} := a + \frac{b-a}{n} j, \quad j = 0, \dots, n.$$

Mamy $\int_a^b \varphi(t)\psi(t)\,dt = s_n^{(1)} + s_n^{(2)}$, gdzie

$$s_n^{(1)} := \sum_{j=1}^n \varphi(t_{n,j-1}) \int_{t_{n,j-1}}^{t_{n,j}} \psi(t)\,dt, \quad s_n^{(2)} := \sum_{j=1}^n \int_{t_{n,j-1}}^{t_{n,j}} \Big(\varphi(t) - \varphi(t_{n,j-1})\Big)\psi(t)\,dt.$$

Niech

$$g(x) := \int_x^b \psi(t)\,dt, \quad x \in [a, b].$$

Przypomnijmy (Twierdzenie 7.3.1), że g jest funkcją ciągłą. Niech $m := \min_{[a,b]} g$, $M := \max_{[a,b]} g$. Przekształcamy:

$$s_n^{(1)} = \sum_{j=1}^n \varphi(t_{n,j-1})\Big(g(t_{n,j-1}) - g(t_{n,j})\Big) = \varphi(a)g(a) + \sum_{j=1}^{n-1} g(t_{n,j})\Big(\varphi(t_{n,j}) - \varphi(t_{n,j-1})\Big).$$

Wynika stąd, że

$$m\varphi(t_{n,n-1}) \leqslant s_n^{(1)} \leqslant M\varphi(t_{n,n-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dalej mamy:

$$|s_n^{(2)}| \leqslant (\varphi(b) - \varphi(a)) \max_{j=1,\dots,n} \int_{t_{n,j-1}}^{t_{n,j}} |\psi(t)|dt \leqslant (\varphi(b) - \varphi(a))C\frac{b-a}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

gdzie $|\psi| \leqslant C = \text{const}$. Ostatecznie, przechodząc z n do $+\infty$ dostajemy:

$$m\varphi(b-) \leqslant \int_a^b \varphi(t)\psi(t)\,dt \leqslant M\varphi(b-).$$

Teraz wystarczy już tylko skorzystać z własności Darboux (dla funkcji g). $\square$

(9) Jest to tzw. *rozkład Jordana*. Oczywiście nie jest on jednoznaczny: $f = (f_1 + c) - (f_2 + c)$, $c \geqslant 0$.

(10) Przypomnijmy, że (wobec rozkładu Jordana) granice jednostronne istnieją.

Dowód Twierdzenia 8.7.1. Na podstawie rozkładu Jordana mamy:

$$f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)=\varphi_1(t)-\varphi_2(t),$$

gdzie $\varphi_1,\varphi_2:[0,\delta]\longrightarrow\mathbb{R}_+$ są niemalejące. Ponieważ

$$\varphi_1(0+)-\varphi_2(0+)=f(x_0+)+f(x_0-)-2f(x_0)=0,$$

możemy założyć, że $\varphi_1(0+)=\varphi_2(0+)=0$ (zastępując φ_j przez $\varphi_j-\varphi_j(0+)$). Teraz, wobec zasady lokalizacji (Twierdzenie 8.2.3 zastosowane do funkcji $f-f(x_0)$), wystarczy pokazać, że dla dowolnej funkcji niemalejącej $\varphi:[0,\delta]\longrightarrow\mathbb{R}_+$ takiej, że $\varphi(0+)=0$ mamy:

$$\int_0^\delta \frac{\varphi(t)}{2}\frac{\sin\frac{(2k+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}dt \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Zauważmy, że

$$\int_0^\delta \frac{\varphi(t)}{2}\frac{\sin\frac{(2k+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}dt-\int_0^\delta\frac{\varphi(t)}{t}\sin\frac{(2k+1)t}{2}dt=\int_0^\delta\varphi(t)\Big(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\Big)\sin\frac{(2k+1)t}{2}dt.$$

Ponieważ $\lim\limits_{t\to0}(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t})=0$ (Ćwiczenie), zatem funkcja

$$(0,\delta]\ni t\overset{\psi}{\longmapsto}\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t},\quad \psi(0):=0,$$

jest całkowalna (por. Obserwacja 7.6.2(e)). W takim razie, na podstawie twierdzenia Riemanna–Lebesgue'a, wystarczy pokazać, że

$$\int_0^\delta\frac{\varphi(t)}{t}\sin\frac{(2k+1)t}{2}dt\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Korzystając z Lematu 8.7.2, dla $0<\eta\leqslant\delta$, mamy:

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^\delta\frac{\varphi(t)}{t}\sin\frac{(2k+1)t}{2}dt\overset{\text{Tw.R-L}}{=}\lim_{k\to+\infty}\int_0^\eta\frac{\varphi(t)}{t}\sin\frac{(2k+1)t}{2}dt$$

$$\overset{\text{Lemat 8.7.2}}{=}\lim_{k\to+\infty}\varphi(\eta-)\int_{\xi(\eta,k)}^\eta\frac{\sin\frac{(2k+1)t}{2}}{t}dt,$$

gdzie $\xi(\eta,k)\in[0,\eta]$. Wobec założenia, że $\varphi(0+)=0$, pozostaje oszacować ostatnią całkę niezależnie od η i k. Mamy:

$$\Big|\int_{\xi(\eta,k)}^\eta\frac{\sin\frac{(2k+1)t}{2}}{t}dt\Big|=\Big|\int_{\frac{(2k+1)\xi(\eta,k)}{2}}^{\frac{(2k+1)\eta}{2}}\frac{\sin u}{u}du\Big|\leqslant C\Big(\frac{(2k+1)\xi(\eta,k)}{2}\Big)+C\Big(\frac{(2k+1)\eta}{2}\Big),$$

gdzie

$$C(x):=\Big|\int_1^x\frac{\sin u}{u}du\Big|,\quad x\geqslant0.$$

Korzystając jeszcze raz z Lematu 8.7.2 (z $\varphi(u):=\frac{1}{u}$), mamy:

$$C(x)=\Big|\int_1^\xi\sin u\,du\Big|\leqslant2,\quad x\geqslant1,$$

(gdzie $\xi=\xi(x)\in[1,x]$). Tak więc $C(x)\leqslant\max\{2,C(0)\}$, $x\geqslant0$. □

Przykład 8.7.3. Funkcja

$$f(x):=\begin{cases}\frac{1}{\ln\frac{|x|}{2\pi}}, & \text{jeżeli } 0<|x|\leqslant\pi\\ 0, & \text{jeżeli } x=0\end{cases}$$

(po okresowym przedłużeniu na $\mathbb{R}$) spełnia w punkcie $x_0:=0$ warunki kryterium Jordana (Ćwiczenie), ale nie spełnia warunków kryterium Diniego bowiem:

$$\int_0^\pi\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)}{t}dt=2\int_0^\pi\frac{1}{t\ln\frac{t}{2\pi}}dt=2\int_{-\infty}^{-\ln2}\frac{du}{u}=-\infty.$$

Przykład 8.7.4. Funkcja

$$f(x) := \begin{cases} |x| \cos \frac{\pi}{2x}, & \text{jeżeli } 0 < |x| \leqslant \pi \\ 0, & \text{jeżeli } x = 0 \end{cases}$$

(po okresowym przedłużeniu na $\mathbb{R}$) spełnia w punkcie $x_0 := 0$ warunki kryterium Diniego (na podstawie Obserwacji 8.2.5(e)), ale nie spełnia warunków kryterium Jordana (ĆWICZENIE — por. Obserwacja 8.6.2(g)).

8.8. Funkcje ciągłe o rozbieżnym szeregu Fouriera

Niech $\mathcal{E} := \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$. Przestrzeń ta wraz normą supremową

$$\|f\| := \sup\{|f(t)| : t \in \mathbb{R}\} = \sup\{|f(t)| : t \in [-\pi, \pi]\}$$

jest przestrzenią Banacha.

Dla dowolnego ustalonego $x_0 \in \mathbb{R}$ niech $\mathcal{E} \ni f \overset{L_k}{\longmapsto} S_k(f; x_0) \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Każdy operator L_k jest liniowy. Niech $\|L_k\| := \sup\{|L_k(f)| : \|f\| \leqslant 1\}$. Korzystając ze wzoru

$$S_k(f; x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t)}{2} \frac{\sin \frac{2k+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} dt,$$

dostajemy

$$\|L_k\| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\sin \frac{2k+1}{2} t|}{\sin \frac{t}{2}} dt =: d_k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Lemat 8.8.1. (a) $\|L_k\| = d_k$, $k \in \mathbb{N}_0$.
(b) $\sup\{d_k : k \in \mathbb{N}_0\} = +\infty$.

Dowód. (a) Ustalmy $k \in \mathbb{N}_0$. Przypadek $k = 0$ jest oczywisty ($S_0(1; x_0) = 1 = d_0$). Niech więc $k \geqslant 1$. Skonstruujemy ciąg $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{E}$ taki, że $\|f_n\| \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$, oraz $L_k(f) \longrightarrow d_k$. Niech

$$g_0(t) := \operatorname{sgn}\Big(\frac{\sin \frac{(2k+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}\Big), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Najpierw konstruujemy (ĆWICZENIE) ciąg parzystych funkcji ciągłych i okresowych $g_n : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, taki że $g_n \longrightarrow g_0$ punktowo oraz

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi g_n(t) \frac{\sin \frac{2k+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} dt \longrightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g_0(t) \frac{\sin \frac{2k+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} dt = d_k.$$

Następnie kładziemy $f_n(t) := g_n(t - x_0)$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\frac{f_n(x_0+t)+f_n(x_0-t)}{2} = g_n(t)$, a zatem $L_k(f_n) \longrightarrow d_k$.

(b) Mamy

$$\begin{aligned} d_k &\geqslant \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\sin \frac{2k+1}{2} t|}{t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{(2k+1)\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin u|}{u} du \geqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{k\pi} \frac{|\sin u|}{u} du \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{s=1}^k \int_{(s-1)\pi}^{s\pi} \frac{|\sin u|}{u} du \geqslant \frac{2}{\pi} \sum_{s=1}^k \frac{1}{s\pi} \int_{(s-1)\pi}^{s\pi} |\sin u|\, du = \frac{4}{\pi^2} \sum_{s=1}^k \frac{1}{s} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty. \end{aligned}$$ □

Twierdzenie 8.8.2 (Szczególny przypadek twierdzenia Banacha–Steinhausa (11)). *Istnieje zbiór gęsty $A \subset \mathcal{E}$, typu $\mathcal{G}_\delta$ (12), taki że*

$$\sup\{|S_k(f; x_0))| : k \in \mathbb{N}_0\} = \sup\{|L_k(f)| : k \in \mathbb{N}_0\} = +\infty, \quad f \in A. \tag{†}$$

(11) Hugo Steinhaus (1887–1972).

(12) Tzn. $A = \bigcap_{n=1}^\infty A_n$, gdzie A_n jest otwarty w $\mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$.

Dowód. Niech $B_n := \{f \in \mathcal{E} : |L_k(f)| \leqslant n,\ k \geqslant 0\}$, $A_n := \mathcal{E} \setminus B_n$, $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Widać, że:

- B_n jest domknięty w $\mathcal{E}$ (ĆWICZENIE),
- A jest typu $\mathcal{G}_\delta$,
- spełniony jest warunek (†).

Pozostaje sprawdzić, że A jest gęsty. Przypuśćmy, że $\overline{B}(f_0, r_0) \subset \mathcal{E} \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Ponieważ przestrzeń $\overline{B}(f_0, r_0)$ jest zupełna, zatem Twierdzenie Baire'a 5.11.28(ii) daje istnienie n_0 takiego, że $\operatorname{int}_{\overline{B}(f_0,r_0)}(B_{n_0} \cap \overline{B}(f_0, r_0)) \neq \varnothing$. Niech $\overline{B}(g_0, r) \subset B_{n_0}$. Wynika stąd, że dla dowolnego $k \geqslant 0$ mamy:

$$d_k = \|L_k\| = \sup\{\|L_k(f)\| : \|f\| = 1\} \leqslant \sup\Big\{\frac{1}{r}(\|L_k(g_0)\| + \|L_k(g_0 + rf)\|) : \|f\| = 1\Big\} \leqslant \frac{2n_0}{r},$$

co daje sprzeczność. □

Twierdzenie 8.8.3. *Dla dowolnego zbioru przeliczalnego $B \subset [-\pi, \pi]$ (13), istnieje zbiór gęsty $A \subset E$, typu $\mathcal{G}_\delta$, taki że*

$$\sup\{|S_k(f; x)| : k \geqslant 0\} = +\infty, \quad (f, x) \in A \times B.$$

W szczególności, dla dowolnej funkcji $f \in A$ jej szereg Fouriera $S(f; x)$ jest rozbieżny dla dowolnego $x \in B$.

Dowód. Wobec Twierdzenia 8.8.2 dla dowolnego punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ istnieje zbiór gęsty $A_{x_0} \subset \mathcal{E}$, typu $\mathcal{G}_\delta$, taki że $\sup\{|S_k(f; x_0)| : k \geqslant 0\} = +\infty$ dla $f \in A_{x_0}$. Zdefiniujmy $A := \bigcap_{x \in B} A_x$. Jest to oczywiście zbiór typu $\mathcal{G}_\delta$. Gęstość wynika z Twierdzenia Baire'a 5.11.28(i). □

(13) Odnotujmy, że zbiór B może być gęsty w $[-\pi, \pi]$.

Część III

Analiza Matematyczna III

ROZDZIAŁ 9

Różniczkowanie odwzorowań

9.1. Pochodne kierunkowe

Definicja 9.1.1. Niech E i F będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{R}$, niech $\Omega \in \operatorname{top} E$ i niech $f : \Omega \longrightarrow F$. Dla $a \in \Omega$ i $\xi \in E$, niech $\Omega_{a,\xi} := \{t \in \mathbb{R} : a + t\xi \in \Omega\}$. Oczywiście $\Omega_{a,0} = \mathbb{R}$ i $0 \in \Omega_{a,\xi}$. Dla $\xi \neq 0$, zbiór $\Omega_{a,\xi}$ jest izomorficzny z $\Omega \cap (a + \mathbb{R}\xi)$. Łatwo widać, że $\Omega_{a,\xi} \in \operatorname{top} \mathbb{R}$. Niech

$$\Omega_{a,\xi} \ni t \overset{f_{a,\xi}}{\longmapsto} f(a + t\xi) \in F.$$

Oczywiście $f_{a,0} \equiv f(a)$, $f_{a,\xi}(0) = f(a)$. Dla $\xi \neq 0$, funkcję $f_{a,\xi}$ możemy utożsamiać z $f|_{\Omega\cap(a+\mathbb{R}\xi)}$.

Jeżeli $f'_{a,\xi}(0)$ istnieje, to mówimy że f ma *pochodną kierunkową w punkcie a w kierunku ξ* i definiujemy

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(a) := f'_{a,\xi}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\xi) - f(a)}{t}.$$

Oczywiście $\frac{\partial f}{\partial 0}(a)$ zawsze istnieje i $\frac{\partial f}{\partial 0}(a) = 0$. Zauważmy, że dla $\alpha \in \mathbb{R}_*$ mamy

$$\frac{\partial f}{\partial(\alpha\xi)}(a) \text{ istnieje } \iff \frac{\partial f}{\partial \xi}(a) \text{ istnieje; ponadto, } \frac{\partial f}{\partial(\alpha\xi)}(a) = \alpha\frac{\partial f}{\partial \xi}(a).$$

Dla $E = \mathbb{R}$ i $\xi \neq 0$ mamy: $\frac{\partial f}{\partial \xi}(a)$ istnieje $\iff f'(a)$ istnieje; ponadto, $\frac{\partial f}{\partial \xi}(a) = f'(a)\xi$.

Obserwacja 9.1.2. Ponieważ różniczkowanie „kierunkowe" sprowadza się do różniczkowania pewnej pomocniczej funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, wiele reguł różniczkowania kierunkowego wynika natychmiast z odpowiednich własności różniczkowania funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, np. (przy oczywistych założeniach o f i g) mamy:

- Niech $f, g : \Omega \longrightarrow F$, $a \in \Omega$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Jeżeli $\frac{\partial f}{\partial \xi}(a)$ i $\frac{\partial g}{\partial \xi}(a)$ istnieją, to $\frac{\partial(\alpha f+\beta g)}{\partial \xi}(a)$ istnieje oraz $\frac{\partial(\alpha f+\beta g)}{\partial \xi}(a) = \alpha\frac{\partial f}{\partial \xi}(a) + \beta\frac{\partial g}{\partial \xi}(a)$.
- Niech $f : \Omega \longrightarrow F$, $g : \Omega \longrightarrow G$, $a \in \Omega$. Jeżeli $\frac{\partial f}{\partial \xi}(a)$ i $\frac{\partial g}{\partial \xi}(a)$ istnieją oraz $B \in \mathcal{L}(F, G; H)$, to $\frac{\partial(B(f,g))}{\partial \xi}(a)$ istnieje oraz $\frac{\partial(B(f,g))}{\partial \xi}(a) = B\big(\frac{\partial f}{\partial \xi}(a), g(a)\big) + B\big(f(a), \frac{\partial g}{\partial \xi}(a)\big)$.

Przykład 9.1.3. Niech

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1^4 x_2^2}{x_1^8 + x_2^4}, & \text{jeżeli } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{jeżeli } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}.$$

Wtedy $\frac{\partial f}{\partial \xi}(0, 0) = 0$ dla dowolnego $\xi \in \mathbb{R}^2$. Istotnie, dla $\xi \neq (0, 0)$ mamy $\frac{f(t\xi)-f(0)}{t} = \frac{t\xi_1^4\xi_2^2}{t^4\xi_1^8+\xi_2^4}$.

Z drugiej strony, $f(t, t^2) = \frac{1}{2}$, a więc, w szczególności, f nie jest ciągła w $(0, 0)$.

Definicja 9.1.4. Mówimy, że f ma w punkcie a *różniczkę Gâteaux (różniczkę słabą)* (1), jeżeli $\frac{\partial f}{\partial \xi}(a)$ istnieje dla dowolnego $\xi \in E$ oraz odwzorowanie $E \ni \xi \overset{\delta_a f}{\longmapsto} \frac{\partial f}{\partial \xi}(a) \in F$ jest liniowe (2) i ciągłe; odwzorowanie to nazywamy *różniczką Gâteaux odwzorowania f w punkcie a*.

Obserwacja 9.1.5. (a) Przykład 9.1.3 pokazuje, że istnienie różniczki Gâteaux nie implikuje nawet ciągłości odwzorowania w punkcie.

---

(1) René Gâteaux (1880–1914).

(2) Wiemy, że odwzorowanie to jest zawsze jednorodne. Zatem liniowość oznacza tu addytywność.

(b) Jeżeli $L : E \longrightarrow F$ jest operatorem liniowym nieciągłym (takim, jak, np. w Obserwacji 5.11.2), to $\frac{\partial L}{\partial \xi}(0) = L(\xi)$ dla dowolnego $\xi \in E$. W szczególności, odwzorowanie $E \ni \xi \longmapsto \frac{\partial L}{\partial \xi}(a) \in F$ jest liniowe, ale nieciągłe.

(c) Dla $E = \mathbb{R}$ mamy: $\delta_a f$ istnieje $\Longleftrightarrow f'(a)$ istnieje.

(d) Niech

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{jeżeli } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0, & \text{jeżeli } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}.$$

Wtedy $\frac{\partial f}{\partial(1,0)}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial(0,1)}(0,0) = 0$, ale $\frac{\partial f}{\partial((1,0)+(0,1))}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial(1,1)}(0,0)$ nie istnieje.

(e) Niech

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2 (x_1 - x_2)}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{jeżeli } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0, & \text{jeżeli } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}.$$

Wtedy $\frac{\partial f}{\partial \xi}(0,0) = f(\xi)$ dla dowolnego $\xi \in \mathbb{R}^2$, ale odwzorowanie $\mathbb{R}^2 \ni \xi \longmapsto \frac{\partial f}{\partial \xi}(0,0) \in \mathbb{R}$ nie jest liniowe.

Definicja 9.1.6. (a) Jeżeli $E = \mathbb{R}^n$ i $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ jest bazą kanoniczną w $\mathbb{R}^n$, to $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) := \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}_j}(a)$ nazywamy j-tą *pochodną cząstkową* (o ile istnieje).

(b) Jeżeli ponadto $F = \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, to macierz

$$Jf(a) := \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a)\right]_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,n}} \in \mathbb{M}(m \times n; \mathbb{R})$$

(o ile wszystkie pochodne cząstkowe istnieją) nazywamy *macierzą Jacobiego odwzorowania f w punkcie a* [3].

(c) Jeżeli $m = 1$, to macierz Jacobiego nazywamy *gradientem* funkcji f w punkcie a:

$$\operatorname{grad} f(a) = \left[\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right] \in \mathbb{M}(1 \times n; \mathbb{R}).$$

(d) Jeżeli $m = n$, to $\det Jf(a)$ nazywamy *jakobianem* odwzorowania f w punkcie a.

Obserwacja 9.1.7. (a) Jeżeli E jest skończenie wymiarowa, to dla istnienia różniczki Gâteaux istotna jest tylko liniowość odwzorowania $\xi \longmapsto \frac{\partial f}{\partial \xi}(a)$.

(b) Jeżeli $F = F_1 \times \dots \times F_N$, $f = (f_1, \dots, f_N)$, to $\delta_a f$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\delta_a f_1, \dots, \delta_a f_N$ istnieją. Ponadto, $\delta_a f := (\delta_a f_1, \dots, \delta_a f_N)$.

(c) Jeżeli $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$ i $\delta_a f$ istnieje, to $Jf(a)$ jest reprezentacją macierzową $\delta_a f$, czyli

$$(\delta_a f)(\xi) = \frac{\partial f}{\partial \xi}(a) = Jf(a).\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

W szczególności, jeżeli $m = 1$, to

$$(\delta_a f)(\xi) = \frac{\partial f}{\partial \xi}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\xi_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\xi_n = \operatorname{grad} f(a).\xi, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Przykład 9.1.5(d) pokazuje, że może być tak, że $\operatorname{grad} f(a)$ ma sens, ale $\frac{\partial f}{\partial \xi}(a)$ nie istnieje dla pewnych ξ.

Definicja 9.1.8. Niech $\xi_1, \dots, \xi_k \in E$. Jeżeli pochodna kierunkowa $\frac{\partial^{k-1} f}{\partial \xi_{k-1} \dots \partial \xi_1}(x)$ rzędu $(k-1)$ w kierunku wektorów $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$ istnieje dla x z pewnego otoczenia punktu a, to definiujemy *pochodną kierunkową rzędu k w kierunku wektorów $\xi_1, \dots, \xi_k$* jako

$$\frac{\partial^k f}{\partial \xi_k \dots \partial \xi_1}(a) = \frac{\partial}{\partial \xi_k}\Big(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial \xi_{k-1} \dots \partial \xi_1}\Big)(a).$$

W szczególności, dla $E = \mathbb{R}^n$ definiujemy n^k *pochodnych cząstkowych rzędu k*:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(a), \quad i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}.$$

---

[3] Carl Jacobi (1804–1851).

Obserwacja 9.1.9 (Ćwiczenie)**.**

$$\frac{\partial^{k+\ell} f}{\partial\xi_{k+\ell}\dots\partial\xi_1}(a)=\frac{\partial^\ell}{\partial\xi_{k+\ell}\dots\partial\xi_{k+1}}\Big(\frac{\partial^k f}{\partial\xi_k\dots\partial\xi_1}\Big)(a).$$

Przykład 9.1.10. Niech

$$f(x_1,x_2):=\begin{cases}\frac{x_1x_2(x_1^2-x_2^2)}{x_1^2+x_2^2}, & \text{jeżeli } (x_1,x_2)\neq(0,0)\\ 0, & \text{jeżeli } (x_1,x_2)=(0,0)\end{cases}.$$

Wtedy $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ i $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)$ istnieją dla dowolnego $x\in\mathbb{R}^2$ ($\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)=0$) oraz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(0,0)=-\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(0,0)=1.$$

Istotnie, wobec związku $f(x_2,x_1)=-f(x_1,x_2)$, wystarczy pokazać pierwszą równość. Mamy

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(0,0)&=\lim_{t\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(t,0)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac1t\Big(\frac{(x_1(x_1^2-x_2^2)+x_1x_2(-2x_2))(x_1^2+x_2^2)-x_1x_2(x_1^2-x_2^2)2x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}\Big|_{(x_1,x_2)=(t,0)}\Big)=1.\end{aligned}$$

Twierdzenie 9.1.11 (Twierdzenie o równości pochodnych mieszanych)**.** *Załóżmy, że pochodne* $\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial\eta\partial\xi}(x)$ *istnieją dla* x *z otoczenia punktu* a *i są ciągłe w punkcie* a*. Wtedy* $\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial\eta\partial\xi}(a)$.

Dowód. Możemy założyć, że $\xi,\eta\neq0$ i, dalej, że $\|\xi\|=\|\eta\|=1$. Niech kula $B(a,3r)\subset\Omega$ będzie taka, że pochodne mieszane istnieją dla dowolnego punktu $x\in B(a,3r)$. Zdefiniujmy

$$\varPhi(t):=f(a+t\xi+t\eta)-f(a+t\xi)-f(a+t\eta)+f(a)-t^2\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(a),\quad |t|\leqslant r.$$

Pokażemy, że $\varPhi(t)/t^2\longrightarrow0$ przy $t\longrightarrow0+$, co wobec symetrii wyrażenia $f(a+t\xi+t\eta)-f(a+t\xi)-f(a+t\eta)+f(a)$, da żądany wynik. Wystarczy pokazać, że

$$\|\varPhi(t)\|\leqslant t^2\sup\Big\{\Big\|\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(a+x\xi+y\eta)-\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(a)\Big\|:0\leqslant x,y\leqslant t\Big\},\quad 0\leqslant t\leqslant r. \tag{†}$$

Ustalmy $0<t\leqslant r$ i niech

$$g(y):=f(a+t\xi+y\eta)-f(a+y\eta)-ty\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(a),\quad 0\leqslant y\leqslant r.$$

Mamy $\varPhi(t)=g(t)-g(0)$. Ponadto,

$$g'(y)=\frac{\partial f}{\partial\eta}(a+t\xi+y\eta)-\frac{\partial f}{\partial\eta}(a+y\eta)-t\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(a).$$

Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, mamy:

$$\|\varPhi(t)\|\leqslant t\sup\{\|g'(y)\|:0\leqslant y\leqslant t\}. \tag{‡}$$

Ustalmy teraz $0<y\leqslant t$ i niech

$$h(x):=\frac{\partial f}{\partial\eta}(a+x\xi+y\eta)-x\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(a),\quad 0\leqslant x\leqslant r.$$

Mamy $g'(y)=h(t)-h(0)$. Ponadto,

$$h'(x)=\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(a+x\xi+y\eta)-\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(a).$$

Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, dostajemy

$$\|g'(y)\|\leqslant t\sup\{\|h'(x)\|:0\leqslant x\leqslant t\},$$

co łącznie z (‡) daje (†). □

Twierdzenie 9.1.12. *Niech $\xi_1, \dots, \xi_k \in E$ ($k \geqslant 2$). Załóżmy, że dla dowolnego $\ell \in \{2, \dots, k\}$ i dla dowolnego odwzorowania injektywnego $\tau : \{1, \dots, \ell\} \longrightarrow \{1, \dots, k\}$, pochodna kierunkowa $\frac{\partial^\ell f}{\partial\xi_{\tau(\ell)} \dots \partial\xi_{\tau(1)}}(x)$ istnieje dla $x \in \Omega$ oraz funkcja $\Omega \ni x \longmapsto \frac{\partial^\ell f}{\partial\xi_{\tau(\ell)} \dots \partial\xi_{\tau(1)}}(x)$ jest ciągła na całym Ω dla $\ell < k$ oraz jest ciągła w punkcie a dla $\ell = k$. Wtedy dla dowolnej permutacji k–elementowej σ mamy:*

$$\frac{\partial^k f}{\partial\xi_{\sigma(k)} \dots \partial\xi_{\sigma(1)}}(a) = \frac{\partial^k f}{\partial\xi_k \dots \partial\xi_1}(a).$$

Dowód. Zastosujemy indukcję ze względu na k. Przypadek $k = 2$ został rozwiązany w poprzednim twierdzeniu. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $k - 1 \geqslant 2$ i niech σ będzie dowolną permutacją k elementową.

Przypadek $\sigma(j) = j$, $j = 1, \dots, k-2$, $\sigma(k-1) = k$, $\sigma(k) = k-1$ redukuje się do przypadku $k = 2$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial\xi_{\sigma(k)} \dots \partial\xi_{\sigma(1)}}(a) = \frac{\partial^2}{\partial\xi_{k-1}\partial\xi_k}\Big(\frac{\partial^{k-2} f}{\partial\xi_{k-2} \dots \partial\xi_1}\Big)(a) = \frac{\partial^2}{\partial\xi_k\partial\xi_{k-1}}\Big(\frac{\partial^{k-2} f}{\partial\xi_{k-2} \dots \partial\xi_1}\Big)(a) = \frac{\partial^k f}{\partial\xi_k \dots \partial\xi_1}(a).$$

Przypadek $\sigma(k) = k$ wynika z założenia indukcyjnego:

$$\frac{\partial^k f}{\partial\xi_{\sigma(k)} \dots \partial\xi_{\sigma(1)}}(a) = \frac{\partial}{\partial\xi_k}\Big(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial\xi_{\sigma(k-1)} \dots \partial\xi_{\sigma(1)}}\Big)(a) = \frac{\partial}{\partial\xi_k}\Big(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial\xi_{k-1} \dots \partial\xi_1}\Big)(a) = \frac{\partial^k f}{\partial\xi_k \dots \partial\xi_1}(a).$$

Pozostałe przypadki wynikają z faktu, iż każda permutacja jest złożeniem pewnej liczby permutacji powyższych dwóch typów. □

9.2. Różniczkowanie odwzorowań zmiennej wektorowej

Niech E i F będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{K}$, niech $\Omega \in \operatorname{top} E$, $f : \Omega \longrightarrow F$ i niech $a \in \Omega$.

Definicja 9.2.1. Powiemy, że odwzorowanie f jest *różniczkowalne* w punkcie a (ma w punkcie a *różniczkę Frécheta (mocną)*), jeżeli istnieje odwzorowanie $L \in \mathcal{L}(E, F)$ takie, że

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|) \text{ gdy } h \longrightarrow 0.$$

Równoważnie,

$$\lim_{E_* \ni h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

Odnotujmy, że oczywiście definicja ta nie zależy od wyboru normy w klasie norm równoważnych.

Zbiór wszystkich odwzorowań $f : \Omega \longrightarrow F$ różniczkowalnych w punkcie a będziemy oznaczać roboczo przez $\mathcal{D}(\Omega, F; a)$. Oczywiście, każde odwzorowanie stałe jest różniczkowalne ($L = 0$).

Obserwacja 9.2.2. (a) Jeżeli f jest różniczkowalne w punkcie a, to f jest ciągłe w punkcie a.

(b) Każde odwzorowanie liniowe i ciągłe $L \in \mathcal{L}(E, F)$ jest różniczkowalne w każdym punkcie $a \in E$.

Istotnie, $L(a+h) = L(a) + L(h)$.

(c) Jeżeli f jest różniczkowalne w punkcie a, to f ma różniczkę Gâteaux w punkcie a i $\delta_a f = L$ (gdzie L jest odwzorowaniem występującym w definicji różniczkowalności w sensie Frécheta).

Istotnie, dla dowolnego $\xi \in E$ mamy

$$f(a+t\xi) = f(a) + L(t\xi) + o(\|t\xi\|) = f(a) + tL(\xi) + o(t), \quad \text{gdy } t \longrightarrow 0.$$

Jak wiemy, istnieją odwzorowania nieciągłe mające różniczkę Gâteaux, a więc różniczkowalność w sensie Frécheta jest istotnie mocniejsza.

(d) Jeżeli $E = \mathbb{R}^n$, to f jest różniczkowalne w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, F)$ oraz odwzorowania $g_1, \dots, g_n : \Omega - a \longrightarrow F$ takie, że

$$\lim_{h \to 0} g_j(h) = 0 = g_j(0), \quad j = 1, \dots, n,$$

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \sum_{j=1}^n h_j g_j(h), \quad h = (h_1, \dots, h_n) \in \Omega - a.$$

Istotnie, jest widoczne, że powyższy warunek jest wystarczający. Przypuśćmy teraz, że $f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|)$, gdzie $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, F)$. Definiujemy

$$g_j(h) := \frac{h_j}{\|h\|^2}\Big(f(a+h) - f(a) - L(h)\Big), \quad h \in (\varOmega - a)_*, \quad g_j(0) := 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Definicja 9.2.3. Z Obserwacji 9.2.2(c) wynika, że jeżeli f jest różniczkowalne w punkcie a, to odwzorowanie L występujące w definicji jest jednoznacznie wyznaczone. Oznaczamy je przez $f'(a)$ i nazywamy *pochodną (różniczką Frécheta)* odwzorowania f w punkcie a. Mamy więc

$$f'(a) \in \mathcal{L}(E, F), \qquad f'(a)(h) = (\delta_a f)(h) = \frac{\partial f}{\partial h}(a), \quad h \in E.$$

Uwaga 9.2.4. W przypadku przestrzeni zespolonych musimy wyraźnie rozróżniać pomiędzy różniczkowaniem w sensie zespolonym i różniczkowaniem w sensie rzeczywistym. Oczywiście każde odwzorowanie $\mathbb{C}$–liniowe jest $\mathbb{R}$–liniowe. Tak więc, jeżeli E, F są przestrzeniami nad $\mathbb{C}$ i odwzorowanie f jest różniczkowalne w punkcie a w sensie zespolonym (tzn. różniczka $f'(a)$ jest $\mathbb{C}$–liniowa), to f jest różniczkowalne w punkcie a w sensie rzeczywistym. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Np. jeżeli $L \in \mathcal{L}(E, F)$ jest odwzorowaniem $\mathbb{R}$–liniowym, które nie jest $\mathbb{C}$–liniowe, to L jest różniczkowalne w sensie rzeczywistym, ale nie jest różniczkowalne w sensie zespolonym; dla przykładu: $E = F := \mathbb{C}$, $L(z) := \overline{z}$, $z \in \mathbb{C}$.

Od tej chwili będziemy rozważać wyłącznie różniczkowanie w sensie rzeczywistym, nawet w przypadku, gdy przestrzenie E i F są nad $\mathbb{C}$.

Obserwacja 9.2.5. (a) Jeżeli $E = \mathbb{R}$, to f jest różniczkowalne w sensie Frécheta w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(a)$ istnieje w zwykłym sensie. Ponadto, $f'(a)(h) = f'(a)h$ dla dowolnego $h \in \mathbb{R}$.

(b) Jeżeli $F = F_1 \times \dots \times F_N$, $f = (f_1, \dots, f_N)$, to

$$f \in \mathcal{D}(\varOmega, F; a) \Longleftrightarrow f_j \in \mathcal{D}(\varOmega, F_j; a),\ j = 1, \dots, N;\ \text{ponadto, } f'(a) = (f_1'(a), \dots, f_N'(a)).$$

(c) Jeżeli $f, g \in \mathcal{D}(\varOmega, F; a)$, to $\mu f + \nu g \in \mathcal{D}(\varOmega, F; a)$ oraz $(\mu f + \nu g)'(a) = \mu f'(a) + \nu g'(a)$, $\mu, \nu \in \mathbb{K}$. Innymi słowy, $\mathcal{D}(\varOmega, F; a)$ jest $\mathbb{K}$–przestrzenią wektorową, a operator $\mathcal{D}(\varOmega, F; a) \ni f \longmapsto f'(a) \in \mathcal{L}(E, F)$ jest $\mathbb{K}$–liniowy.

(d) Jeżeli $L \in \mathcal{L}(F, G)$ (gdzie G jest przestrzenią unormowaną) i $f \in \mathcal{D}(\varOmega, F; a)$, to $L \circ f \in \mathcal{D}(\varOmega, G; a)$ i $(L \circ f)'(a) = L \circ f'(a)$.

(e) Jeżeli $B \in \mathcal{L}(E, F; G)$, to $B'(a, b)(h, k) = B(h, b) + B(a, k)$, $(a, b), (h, k) \in E \times F$.

Istotnie, odwzorowanie $E \times F \ni (h, k) \overset{L}{\longmapsto} B(h, b) + B(a, k) \in G$ jest liniowe i ciągłe. Ponadto,

$$B(a + h, b + k) - B(a, b) - (B(h, b) + B(a, k)) = B(h, k) \text{ oraz}$$
$$\frac{\|B(h, k)\|}{\|h\| + \|k\|} \leqslant \frac{\|B\|\|h\|\|k\|}{\|h\| + \|k\|} \leqslant \|B\|(\|h\| + \|k\|).$$

Twierdzenie 9.2.6. (a) *Jeżeli $f \in \mathcal{D}(\varOmega, F; a)$, $g \in \mathcal{D}(\varOmega, G; a)$, $B \in \mathcal{L}(F, G; H)$, gdzie F, G i H są przestrzeniami unormowanymi, to $B(f, g) \in \mathcal{D}(\varOmega, H; a)$ oraz*

$$(B(f, g))'(a)(h) = B(f'(a)(h), g(a)) + B(f(a), g'(a)(h)), \quad h \in E.$$

W szczególności, jeżeli $f \in \mathcal{D}(\varOmega, \mathbb{K}; a)$ i $g \in \mathcal{D}(\varOmega, F; a)$, to $f \cdot g \in \mathcal{D}(\varOmega, F; a)$ oraz

$$(f \cdot g)'(a)(h) = f'(a)(h) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)(h), \quad h \in E.$$

(b) *Jeżeli $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle)$ jest przestrzenią unitarną (zob. Definicja 5.11.21), $f, g \in \mathcal{D}(\varOmega, \mathcal{H}; a)$, to $\langle f, g \rangle \in \mathcal{D}(\varOmega, \mathbb{K}; a)$ i $(\langle f, g \rangle)'(a) = \langle f'(a), g(a) \rangle + \langle f(a), g'(a) \rangle$.*

Dowód. (a) Operator $E \ni h \overset{L}{\longmapsto} B(f'(a)(h), g(a)) + B(f(a), g'(a)(h))$ jest oczywiście liniowy i ciągły. Wobec dwuliniowości B, dostajemy:

$$\frac{B(f(a+h), g(a+h)) - B(f(a), g(a)) - L(h)}{\|h\|} = B\Big(\frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)(h)}{\|h\|}, g(a+h)\Big)$$
$$+ B\Big(f(a), \frac{g(a+h) - g(a) - g'(a)(h)}{\|h\|}\Big) + B\Big(\frac{f'(a)(h)}{\|h\|}, g(a+h) - g(a)\Big) = A_1(h) + A_2(h) + A_3(h).$$

Ciągłość B oraz różniczkowalność f i g w punkcie a (w szczególności, ciągłość g w punkcie a) implikują, że $A_1(h) \longrightarrow 0$ i $A_2(h) \longrightarrow 0$ oraz $\|A_3(h)\| \leqslant \|B\|\|f'(a)\|\|g(a+h) - g(a)\| \longrightarrow 0$, gdy $h \longrightarrow 0$.

(b) W przypadku, gdy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ własność ta wynika bezpośrednio z (a). W przypadku, gdy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ wystarczy zauważyć, że w dowodzie (a) korzystaliśmy tylko z $\mathbb{R}$–jednorodności. $\square$

Twierdzenie 9.2.7 (Różniczkowanie złożenia)**.** *Niech G będzie przestrzenią unormowaną, niech $U \subset G$ będzie zbiorem otwartym, niech $\varphi : U \longrightarrow E$ i niech $t_0 \in U$. Załóżmy, że $\varphi \in \mathcal{D}(U, E; t_0)$, $f \in \mathcal{D}(\Omega, F; \varphi(t_0))$ i $\varphi(U) \subset \Omega$. Wtedy $f \circ \varphi \in \mathcal{D}(U, F; t_0)$ oraz $(f \circ \varphi)'(t_0) = f'(\varphi(t_0)) \circ \varphi'(t_0)$.*

Dowód. Niech $a := \varphi(t_0)$, $B := \varphi'(t_0)$, $A := f'(a)$,

$$\varphi(t_0 + t) = \varphi(t_0) + B(t) + \beta(t)\|t\|, \quad f(a + h) = f(a) + A(h) + \alpha(h)\|h\|,$$

gdzie $\lim\limits_{t\to0} \beta(t) = 0$, $\lim\limits_{h\to0} \alpha(h) = 0$. Oczywiście $A \circ B \in \mathcal{L}(G, F)$. Dla małych $t \in G_*$ niech

$$h(t) := \varphi(t_0 + t) - \varphi(t_0) = B(t) + \beta(t)\|t\|.$$

Zauważmy, że $h(t) \longrightarrow 0$, gdy $t \longrightarrow 0$. Mamy:

$$\begin{aligned}(f \circ \varphi)(t_0 + t) &= f(a + h(t)) = f(a) + A(B(t) + \beta(t)\|t\|) + \alpha(h(t))\|B(t) + \beta(t)\|t\|\| \\ &= (f \circ \varphi)(t_0) + A(B(t)) + \gamma(t)\|t\|, \text{ gdzie} \\ \gamma(t) : &= A(\beta(t)) + \alpha(h(t))\Big\|\frac{B(t)}{\|t\|} + \beta(t)\Big\|.\end{aligned}$$

Pozostaje jeszcze zauważyć, że $\gamma(t) \longrightarrow 0$, gdy $t \longrightarrow 0$. $\square$

Obserwacja 9.2.8. Twierdzenie 9.2.6 wynika z Twierdzenia 9.2.7 i Obserwacji 9.2.5(b)(e). Istotnie,

$$\begin{aligned}(B(f, g))'(a)(h) &= (B \circ (f, g))'(a)(h) = (B'((f, g)(a)) \circ ((f, g)'(a)))(h) \\ &= B'(f(a), g(a))(f'(a)(h), g'(a)(h)) = B(f'(a)(h), g(a)) + B(f(a), g'(a)(h)).\end{aligned}$$

Twierdzenie 9.2.9 (Por. Twierdzenie 5.1.8)**.** *Niech E, F będą przestrzeniami unormowanymi, niech $U \subset E$, $V \subset F$ będą zbiorami otwartymi i niech $f : U \longrightarrow V$ będzie odwzorowaniem bijektywnym. Niech $g := f^{-1}$ i niech $a \in U$ będzie taki, że $f'(a)$ istnieje. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *$g'(f(a))$ istnieje;*

(ii) *$f'(a) \in \operatorname{Isom}(E, F)$ i g jest ciągłe w punkcie $f(a)$.*

Dowód. Implikacja (i) $\Longrightarrow$ (ii) jest oczywista ($g'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$).

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Niech $A := f'(a)$. Chcemy sprawdzić, że $g(f(a) + k) = g(f(a)) + A^{-1}(k) + \|k\|\beta(k)$, gdzie $\beta(k) \longrightarrow 0$ przy $k \longrightarrow 0$. Niech $B(f(a), r) \subset V$. Dla $\|k\| < r$ zdefiniujmy $h(k) := g(f(a) + k) - a$. Ciągłość odwzorowania g w punkcie $f(a)$ implikuje, że $h(k) \longrightarrow 0$ przy $k \longrightarrow 0$. Nasz problem sprowadza się więc do równości $h(k) = A^{-1}(f(a + h(k)) - f(a)) + \|f(a + h(k)) - f(a)\|\beta(k)$ i dalej, korzystając z równości $f(a + h) = f(a) + A(h) + \|h\|\alpha(h)$, $\alpha(h) \longrightarrow 0$ przy $h \longrightarrow 0$, mamy

$$0 = A^{-1}(\|h(k)\|\alpha(h(k))) + \|A(h(k)) + \|h(k)\|\alpha(h(k))\|\beta(k).$$

Wystarczy więc pokazać, że $\frac{A^{-1}(\|h\|\alpha(h))}{\|A(h)+\|h\|\alpha(h)\|}$ dąży do zera przy $h \longrightarrow 0$. Ponieważ operator A^{-1} jest ograniczony, wystarczy więc pokazać, że wyrażenie $\frac{\|h\|\alpha(h)}{\|A(h)+\|h\|\alpha(h)\|}$ dąży do zera przy $h \longrightarrow 0$. Ponieważ $\alpha(h) \longrightarrow 0$ przy $h \longrightarrow 0$, wystarczy oszacować od dołu wyrażenie $\|A(h/\|h\|) + \alpha(h)\|$. Odnotujmy, że $\|h\| = \|A^{-1}(A(h))\| \leqslant \|A^{-1}\|\|A(h)\|$. Mamy więc $\|A(h/\|h\|) + \alpha(h)\| \geqslant 1/\|A^{-1}\| - \|\alpha(h)\|$. $\square$

9.3. Twierdzenia o przyrostach skończonych

Twierdzenie 9.3.1 (Twierdzenie o przyrostach skończonych)**.** *Załóżmy, że $D \subset E$ jest obszarem, $[a, b] \subset D$. Niech $f : D \longrightarrow F$ będzie odwzorowaniem ciągłym takim, że $f'(x)$ istnieje dla $x \in [a, b] \setminus S$, gdzie $S \subset [a, b]$ jest co najwyżej przeliczalny. Wtedy dla dowolnego $L \in \mathcal{L}(E, F)$ mamy:*

$$\|f(b) - f(a) - L(b - a)\| \leqslant \big(\sup\{\|f'(\xi) - L\| : \xi \in [a, b] \setminus S\}\big)\|b - a\|.$$

W szczególności, $\|f(b) - f(a)\| \leqslant \big(\sup\{\|f'(\xi)\| : \xi \in [a, b] \setminus S\}\big)\|b - a\|$.

Dowód. Zastępując odwzorowanie f przez $f - L$ redukujemy dowód do przypadku $L = 0$. Niech

$$g(t) := f(a + t(b - a)),\ t \in [0, 1], \quad S' := \{t \in [0, 1] : a + t(b - a) \in S\}.$$

Wtedy $g : [0, 1] \longrightarrow F$ jest odwzorowaniem ciągłym i $g'(t)$ istnieje dla $t \in [0, 1] \setminus S'$. Ponadto, na podstawie twierdzenia o różniczkowaniu złożenia, $g'(t) = f'(a + t(b - a))(x - a)$. Stąd, na podstawie klasycznego twierdzenia o przyrostach skończonych (zob. Wniosek 5.4.4), mamy:

$$\begin{aligned}\|f(b) - f(a)\| = \|g(1) - g(0)\| &\leqslant \sup\{\|g'(t)\| : t \in [0, 1] \setminus S'\}\\ &= \sup\{\|f'(a + t(b - a))(x - a)\| : t \in [0, 1] \setminus S'\}\\ &\leqslant \sup\{\|f'(\xi)\| : \xi \in [a, b] \setminus S\}\|b - a\|. \qquad \square\end{aligned}$$

Jako natychmiastowy wniosek dostajemy

Twierdzenie 9.3.2 (Twierdzenie o przyrostach skończonych)**.** *Załóżmy, że $D \subset E$ jest obszarem gwiaździstym względem punktu a (tzn. $[a, x] \subset D$ dla dowolnego $x \in D$). Niech $f : D \longrightarrow F$ będzie odwzorowaniem ciągłym takim, że $f'(x)$ istnieje dla $x \in D \setminus S$, gdzie $S \subset D$ jest zbiorem takim, że $\#(S \cap [a, x]) \leqslant \aleph_0$ dla dowolnego $x \in D$. Wtedy dla dowolnego $L \in \mathcal{L}(E, F)$ mamy:*

$$\|f(x) - f(a) - L(x - a)\| \leqslant \big(\sup\{\|f'(\xi) - L\| : \xi \in [a, x] \setminus S\}\big)\|x - a\|, \quad x \in D.$$

W szczególności, $\|f(x) - f(a)\| \leqslant \big(\sup\{\|f'(\xi)\| : \xi \in [a, x] \setminus S\}\big)\|x - a\|$, $x \in D$.

Wniosek 9.3.3. *Niech $D \subset E$ będzie dowolnym obszarem i niech $f : D \longrightarrow F$ będzie odwzorowaniem ciągłym takim, że $f'(x) = 0$ dla $x \in D \setminus S$, gdzie $S \subset D$ jest zbiorem takim, że $\#(S \cap [a, b]) \leqslant \aleph_0$ dla dowolnego odcinka $[a, b] \subset D$. Wtedy $f = \mathrm{const}$.*

Dowód. Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych wnioskujemy, że dla dowolnej kuli $B(a, r) \subset D$ odwzorowanie $f|_{B(a,r)}$ jest stałe. Stąd, wobec spójności D, f musi być globalnie stałe. $\square$

Wniosek 9.3.4. *Niech $f : \Omega \longrightarrow F$ będzie funkcją ciągłą i różniczkowalną w $\Omega \setminus \{a\}$ dla pewnego $a \in \Omega$. Jeżeli $L := \lim_{x \to a} f'(x)$ istnieje (granica w $\mathcal{L}(E, F)$), to $f'(a)$ istnieje i $f'(a) = L$.*

Dowód. Na podstawie poprzedniego twierdzenia mamy $f(a+h) = f(a)+L(h)+\alpha(h)\|h\|$, gdzie $\|\alpha(h)\| \leqslant \sup\{\|f'(\xi) - L\| : \xi \in (a, a + h]\} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$. $\square$

Wniosek 9.3.5 (Twierdzenie o przyrostach skończonych)**.** *Niech $D \subset E$ będzie dowolnym obszarem i niech $f : D \longrightarrow F$ będzie odwzorowaniem ciągłym takim, że $f'(x)$ istnieje dla $x \in D \setminus S$, gdzie $S \subset D$ jest zbiorem takim, że $\#(S \cap [a, b]) \leqslant \aleph_0$ dla dowolnego odcinka $[a, b] \subset D$. Wtedy*

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \big(\sup\{\|f'(\xi)\| : \xi \in D \setminus S\}\big)\varrho^i_D(x, y), \quad x, y \in D \text{ (zob. Obserwacja 4.6.8)}.$$

9.4. Różniczki cząstkowe

Definicja 9.4.1. Jeżeli $E = E_1 \times \dots \times E_N$, $a = (a_1, \dots, a_N)$, to definiujemy

$$\Omega_{a,j} := \{x_j \in E_j : (a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n) \in \Omega\},$$
$$f_{a,j}(x_j) := f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n), \quad x_j \in \Omega_{a,j},\ j = 1, \dots, N;$$

zauważmy, że $\Omega_{a,j}$ jest zbiorem otwartym w E_j. Powiemy, że f ma w punkcie a *różniczkę cząstkową w kierunku przestrzeni* E_j, jeżeli różniczka $f'_{a,j}(a_j) \in \mathcal{L}(E_j, F)$ istnieje. Oznaczamy ją wtedy przez $\frac{\partial f}{\partial E_j}(a)$.

Obserwacja 9.4.2. Jeżeli $\dim E_j = 1$ i $E_j = \mathbb{R}\xi$ (dla pewnego j), to $\frac{\partial f}{\partial E_j}(a)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{\partial f}{\partial \xi}(a)$ istnieje. Ponadto, $\frac{\partial f}{\partial E_j}(a)(h_j) = \frac{\partial f}{\partial h_j}(a)$, $h_j \in E_j$.

Twierdzenie 9.4.3. (a) *Jeżeli $f'(a)$ istnieje, to $\frac{\partial f}{\partial E_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial E_N}(a)$ istnieją oraz*

$$f'(a)(h) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial E_j}(a)(h_j), \quad h = (h_1, \dots, h_N) \in E_1 \times \dots \times E_N, \text{ czyli}$$

$$\frac{\partial f}{\partial E_j}(a)(h_j) = f'(a)(0, \dots, 0, h_j, 0, \dots, 0), \quad h_j \in E_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

W szczególności, dla $E = \mathbb{R}^n$, jeżeli $f'(a)$ istnieje, to istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$ oraz $f'(a)(h) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j$.

(b) *Niech $\varphi \in \mathcal{D}(U, E; t_0)$ i $f \in \mathcal{D}(\Omega, F; \varphi(t_0))$ będą takie, jak w Twierdzeniu 9.2.7 (o różniczkowaniu złożenia). Załóżmy, że $G = G_1 \times \cdots \times G_p$, $E = E_1 \times \cdots \times E_n$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Wtedy:*

$$(f \circ \varphi)'(t_0)(X) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial E_j}(\varphi(t_0)) \circ \frac{\partial \varphi_j}{\partial G_k}(t_0) \Big)(X_k), \quad X = (X_1, \dots, X_p) \in G_1 \times \cdots \times G_p, \ \textit{czyli}$$

$$\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial G_k}(t_0)(X_k) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial E_j}(\varphi(t_0)) \circ \frac{\partial \varphi_j}{\partial G_k}(t_0) \Big)(X_k), \quad k = 1, \dots, p.$$

W szczególności, dla $G = \mathbb{K}^p$, $E = \mathbb{K}^n$, dostajemy

$$\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial t_k}(t_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(t_0)) \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(t_0), \quad k = 1, \dots, p.$$

Jeżeli ponadto $F = \mathbb{K}^m$, to powyższy wzór ma następującą interpretację macierzową:

$$J(f \circ \varphi)(t_0) = Jf(\varphi(t_0)).J\varphi(t_0). \tag{*}$$

Obserwacja 9.4.4. Podkreślmy, że wzór (*) jest prawdziwy przy założeniu, że $\varphi'(t_0)$ i $f'(\varphi(t_0))$ istnieją. Jeżeli istnieją tylko pochodne cząstkowe (tak, że wszystkie występujące obiekty mają sens), to wzór nie musi zachodzić. Dla przykładu, niech $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) := (t, t^2)$ (odnotujmy, że φ jest klasy $\mathcal{C}^\infty$), $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(t, t^2) := 0$, $f(t, 0) = f(0, t) := t$, a poza tym f jest określona dowolnie, $t_0 := 0$. Wtedy $\varphi(0) = (0, 0)$, $f \circ \varphi \equiv 0$, $J\varphi(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $Jf(0, 0) = [1, 1]$, $Jf(0, 0).J\varphi(0) = 1$.

Dowód Twierdzenia 9.4.3. (a) Zauważmy, że $f_{a,j} = f \circ \psi_{a,j}$, gdzie

$$\Omega_{a,j} \ni x_j \stackrel{\psi_{a,j}}{\longmapsto} (a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_N.$$

Wystarczy teraz skorzystać z twierdzenia o różniczkowaniu złożenia:

$$f'_{a,j}(a_j)(h_j) = (f \circ \psi_{a,j})'(a_j)(h_j) = (f'(\psi_{a,j}(a_j)) \circ \psi'_{a,j}(a_j))(h_j) = f'(a)(0, \dots, 0, h_j, 0, \dots, 0).$$

(b) Na podstawie (a) mamy:

$$\begin{aligned}(f \circ \varphi)'(t_0)(X) &= f'(\varphi(t_0))(\varphi'(t_0)(X)) = f'(\varphi(t_0))\Big(\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \varphi}{\partial G_k}(t_0)(X_k) \Big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial E_j}(\varphi(t_0)) \Big(\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \varphi_j}{\partial G_k}(t_0)(X_k) \Big) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial E_j}(\varphi(t_0)) \circ \frac{\partial \varphi_j}{\partial G_k}(t_0) \Big)(X_k). \quad \square\end{aligned}$$

Twierdzenie 9.4.5. *Załóżmy, że $E = E_1 \times \cdots \times E_N$ i $f : \Omega \longrightarrow F$ jest odwzorowaniem takim, że*

- *różniczka cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial E_j}(x)$ istnieje dla x z pewnego otoczenia punktu a i jest ciągła w punkcie a dla dowolnego $j \in \{1, \dots, N\} \setminus \{j_0\}$,*
- *$\frac{\partial f}{\partial E_{j_0}}(a)$ istnieje.*

Wtedy $f'(a)$ istnieje.

Dowód. Zastosujemy indukcję ze względu na N.

$N = 2$. Możemy założyć, że $a = 0$ oraz $j_0 = 2$. Wiemy, że jedynym kandydatem na $f'(0)$ jest odwzorowanie $E_1 \times E_2 \ni (h_1, h_2) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial E_1}(0)(h_1) + \frac{\partial f}{\partial E_2}(0)(h_2) \in F$. Jest to oczywiście odwzorowanie liniowe ciągłe. Dla małych $h = (h_1, h_2)$ szacujemy korzystając z twierdzenia o przyrostach skończonych oraz definicji różniczki cząstkowej:

$$\begin{aligned}&\Big\| f(h_1, h_2) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial E_1}(0)(h_1) - \frac{\partial f}{\partial E_2}(0)(h_2) \Big\| \\ &\qquad \leqslant \Big\| f(h_1, h_2) - f(0, h_2) - \frac{\partial f}{\partial E_1}(0)(h_1) \Big\| + \Big\| f(0, h_2) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial E_2}(0)(h_2) \Big\|\end{aligned}$$

$$\leqslant \sup\Big\{\Big\|\frac{\partial f}{\partial E_1}(\xi_1,h_2)-\frac{\partial f}{\partial E_1}(0)\Big\| : \xi_1\in[0,h_1]\Big\}\,\|h_1\|+o(\|h_2\|)=o(\|(h_1,h_2)\|).$$

$N-1 \rightsquigarrow N$. Możemy założyć, że $j_0=N$. Wobec założenia indukcyjnego różniczka cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial(E_2\times\cdots\times E_N)}(a)$ istnieje. Teraz wystarczy wykorzystać przypadek $N=2$. □

Definicja 9.4.6. (a) Niech $\mathcal{D}(\Omega,F):=\bigcap_{x\in\Omega}\mathcal{D}(\Omega,F;x)$. Oczywiście $\mathcal{D}(\Omega,F)$ jest $\mathbb{K}$–przestrzenią wektorową. Połóżmy $\mathcal{D}_b(\Omega,F):=\{f\in\mathcal{D}(\Omega,F)\cap\mathcal{B}(\Omega,F): f'\in\mathcal{B}(\Omega,\mathcal{L}(E,F))\}$. Widać, że $\mathcal{D}_b(\Omega,F)$ jest przestrzenią wektorową, zaś funkcja

$$\mathcal{D}_b(\Omega,F)\ni f\longmapsto\|f\|_{\Omega,1}:=\|f\|_\Omega+\|f'\|_\Omega=\sup\{\|f(x)\|:x\in\Omega\}+\sup\{\|f'(x)\|:x\in\Omega\}$$

jest normą na $\mathcal{D}_b(\Omega,F)$.

(b) Dla $0<\alpha\leqslant 1$, niech $\mathcal{C}_b^{1,\alpha}(\Omega,F):=\{f\in\mathcal{D}_b(\Omega,F): f'\in\mathcal{H}^\alpha(\Omega,\mathcal{L}(E,F))\}$, gdzie

$$\mathcal{H}^\alpha(\Omega,H):=\Big\{g:\Omega\longrightarrow H: |g|_\alpha:=\sup\Big\{\frac{\|g(x)-g(y)\|}{\|x-y\|^\alpha}: x,y\in\Omega,\ x\neq y\Big\}<+\infty\Big\}.$$

W przestrzeni $\mathcal{C}_b^{1,\alpha}(\Omega,F)$ wprowadzamy normę $\|f\|_{\Omega,1,\alpha}:=\|f\|_{\Omega,1}+|f'|_\alpha$ (por. Definicja 5.7.5); przypomnijmy, że $|\ |_\alpha$ jest seminormą.

(c) Niech $\mathcal{C}^1(\Omega,F):=\{f\in\mathcal{D}(\Omega,F): f'\in\mathcal{C}(\Omega,\mathcal{L}(E,F))\}$. Połóżmy $\mathcal{C}_b^1(\Omega,F):=\mathcal{C}^1(\Omega,F)\cap\mathcal{D}_b(\Omega,F)$. Oczywiście $\mathcal{C}_b^{1,\alpha}(\Omega,F)\subset\mathcal{C}_b^1(\Omega,F)$.

Zgodnie z ogólną umową, we wszystkich powyższych oznaczeniach pomijamy F jeżeli $F=\mathbb{R}$ i piszemy $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}_b(\Omega)$, $\mathcal{C}_b^{1,\alpha}(\Omega)$, $\mathcal{H}^\alpha(\Omega)$, $\mathcal{C}^1(\Omega)$, $\mathcal{C}_b^1(\Omega)$.

Twierdzenie 9.4.7. *Załóżmy, że odwzorowanie $f:\Omega\longrightarrow F$ ma w każdym punkcie $x\in\Omega$ różniczkę Gâteaux $\delta_x f$.*

(a) *Jeżeli odwzorowanie $\Omega\ni x\longmapsto\delta_x f\in\mathcal{L}(E,F)$ jest ciągłe w punkcie $a\in\Omega$, to $f'(a)$ istnieje (i oczywiście $f'(a)=\delta_a f$).*

(b) *$f\in\mathcal{C}^1(\Omega,F)$ wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie $\Omega\ni x\longmapsto\delta_x f\in\mathcal{L}(E,F)$ jest ciągłe.*

Dowód. (a) Zauważmy, że dla małych $h\in E$ funkcja $[0,1]\ni t\overset{f_{a,h}}{\longmapsto} f(a+th)\in F$ jest różniczkowalna oraz $f'_{a,h}(t)=\frac{\partial f}{\partial h}(a+th)=\delta_{a+th}f(h)$. Teraz, na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych dla jednej zmiennej, mamy

$$\begin{aligned}\|f(a+h)-f(a)-\delta_a f(h)\|&=\|f_{a,h}(1)-f_{a,h}(0)-f'_{a,h}(0)(1-0)\|\\&\leqslant\sup\{\|f'_{a,h}(t)-f'_{a,h}(0)\|:t\in[0,1]\}=\sup\{\|\delta_{a+th}f(h)-\delta_a f(h)\|:t\in[0,1]\}\\&\leqslant\big(\sup\{\|\delta_{a+th}f-\delta_a f\|_{\mathcal{L}(E,F)}:t\in[0,1]\}\big)\|h\|=o(\|h\|).\end{aligned}$$

(b) wynika natychmiast z (a). □

Obserwacja 9.4.8. (a) Jeżeli $f\in\mathcal{C}^1(\Omega,F)$, $g\in\mathcal{C}^1(\Omega,G)$ i $B\in\mathcal{L}(F,G;H)$, to $B(f,g)\in\mathcal{C}^1(\Omega,H)$.

Istotnie, na podstawie Twierdzenia 9.2.6(a), mamy $(B(f,g))'=B(f',g)+B(f,g')$.

(b) Jeżeli $\mathcal{H}$ jest przestrzenią unitarną, $f\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathcal{H})$, $g\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathcal{H})$, to $\langle f,g\rangle\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{K})$.

(c) Jeżeli $\varphi\in\mathcal{C}^1(U,E)$, $f\in\mathcal{C}^1(\Omega,F)$ i $\varphi(U)\subset\Omega$, to $f\circ\varphi\in\mathcal{C}^1(U,F)$.

Istotnie, na podstawie Twierdzenia 9.2.7, mamy $(f\circ\varphi)'=(f'\circ\varphi)\circ\varphi'$.

(d) Jeżeli $E=E_1\times\cdots\times E_N$ i $\frac{\partial f}{\partial E_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial E_N}$ istnieją, to $f\in\mathcal{C}^1(\Omega,F)\iff\frac{\partial f}{\partial E_j}\in\mathcal{C}(\Omega,\mathcal{L}(E_j,F))$, $j=1,\dots,N$. W szczególności, dla $E=\mathbb{R}^n$, jeżeli $\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}$ istnieją, to

$$f\in\mathcal{C}^1(\Omega,F)\iff\frac{\partial f}{\partial x_j}\in\mathcal{C}(\Omega,F),\ j=1,\dots,n.$$

Istotnie, implikacja ($\Longrightarrow$) wynika z faktu, że (Twierdzenie 9.4.3) $\frac{\partial f}{\partial E_j}(x)(h_j)=f'(x)(0,\dots,0,\underset{j}{h_j},0,\dots,0)$, $x\in\Omega$, $h_j\in E_j$, a stąd $\big\|\frac{\partial f}{\partial E_j}(x)-\frac{\partial f}{\partial E_j}(x_0)\big\|\leqslant\|f'(x)-f'(x_0)\|$, $j=1,\dots,N$, przy czym w $E_1\times\cdots\times E_N$ wybieramy normę maksimum.

Dla dowodu implikacji ($\Longleftarrow$) zauważmy najpierw, że na podstawie Twierdzenia 9.4.5 wiemy, że $f\in\mathcal{D}(\Omega,F)$. Dalej mamy

$$\|f'(x) - f'(x_0)\| = \sup\Big\{\Big\|\sum_{j=1}^{N}\Big(\frac{\partial f}{\partial E_j}(x)(h_j) - \frac{\partial f}{\partial E_j}(x_0)(h_j)\Big)\Big\| : \|h_j\| \leqslant 1,\ j = 1, \dots, N\Big\}$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{N}\Big\|\frac{\partial f}{\partial E_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial E_j}(x_0)\Big\| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

Twierdzenie 9.4.9 (Twierdzenie o różniczkowaniu wyraz po wyrazie (por. Twierdzenia 5.7.1, 6.10.1, 6.10.2))**.** *Niech $D \subset E$ będzie ograniczonym obszarem ϱ^i_D-ograniczonym (np. ograniczonym obszarem gwiaździstym), niech $x_0 \in D$ i niech F będzie przestrzenią Banacha.*

(a) *Załóżmy, że mamy rodzinę $(f_i)_{i\in I} \subset \mathcal{D}(D, F)$ taką, że:*
- *$(f_i')_{i\in I}$ jest rodziną jednostajnie sumowalną na D,*
- *$(f_i(x_0))_{i\in I}$ jest rodziną sumowalną.*

Wtedy $(f_i)_{i\in I}$ jest rodziną jednostajnie sumowalną na D, funkcja $f := \sum_{i\in I} f_i$ jest różniczkowalna na D oraz $f' = \sum_{i\in I} f_i'$, czyli $\big(\sum_{i\in I} f_i\big)' = \sum_{i\in I} f_i'$.

(b) *Załóżmy, że mamy ciąg $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{D}(D, F)$ taki, że:*
- *szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ jest zbieżny jednostajnie na D,*
- *szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ jest zbieżny.*

Wtedy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie na D, funkcja $f := \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ jest różniczkowalna na D oraz $f' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$, czyli $\big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\big)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$.

(c) *Załóżmy, że mamy ciąg $(f_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{D}(D, F)$ taki, że:*
- *ciąg $(f_n')_{n=0}^{\infty}$ jest zbieżny jednostajnie na D,*
- *ciąg $(f_n(x_0))_{n=0}^{\infty}$ jest zbieżny.*

Wtedy ciąg $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zbieżny jednostajnie na D, funkcja $f := \lim_{n\to+\infty} f_n$ jest różniczkowalna na D oraz $f' = \lim_{n\to+\infty} f_n'$, czyli $\big(\lim_{n\to+\infty} f_n\big)' = \lim_{n\to+\infty} f_n'$.

Dowód. (a) Niech $g_i := f_i' : D \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$, $i \in I$. Niech $f_A := \sum_{i\in A} f_i$, $A \in \mathcal{F}(I)$([4]). Zauważmy, że f_A jest funkcją różniczkowalną oraz $(f_A)' = g_A$. Weźmy $\varepsilon > 0$ i niech $C(\varepsilon) \in \mathcal{F}(I)$ będzie takie, że dla $A \in \mathcal{F}(I \setminus C(\varepsilon))$ mamy $\|f_A(x_0)\| \leqslant \varepsilon$ i $\|g_A(x)\| \leqslant \varepsilon$, $x \in D$. Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych (Wniosek 9.3.5), dla $A \in \mathcal{F}(I \setminus C(\varepsilon))$ i $x \in D$ mamy:

$$\|f_A(x)\| \leqslant \|f_A(x_0)\| + \|f_A(x) - f_A(x_0)\| \leqslant \varepsilon + \big(\sup\{\|g_A(\xi)\| : \xi \in D\}\big)\varrho^i_D(x, x_0) \leqslant \varepsilon\big(1 + \sup_{x,y\in D} \varrho^i_D(x, y)\big).$$

Wynika stąd, na podstawie kryterium Cauchy'ego (Twierdzenie 6.8.2(ii)), że $(f_i)_{i\in I}$ jest rodziną jednostajnie sumowalną.

Ustalmy $a \in D$ i niech

$$h_i(x) := \begin{cases} \frac{f_i(x) - f_i(a) - f_i'(a)(x-a)}{\|x-a\|}, & \text{jeżeli } x \neq a \\ 0, & \text{jeżeli } x = a \end{cases}, \quad x \in D, \quad i \in I.$$

Zauważmy, że każde z odwzorowań h_i jest ciągłe w punkcie a. Rodzina $(h_i)_{i\in I}$ jest jednostajnie sumowalna na D. Istotnie, mamy

$$h_A(x) = \frac{f_A(x) - f_A(a) - g_A(a)(x-a)}{\|x-a\|}, \quad x \neq a,$$

a stąd, na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych (Twierdzenie 9.3.2), dla x bliskich a, dostajemy

$$\|h_A(x)\| \leqslant \sup\{\|g_A(\xi) - g_A(a)\| : \xi \in [x, a]\} \leqslant 2\sup\{\|g_A(\xi)\| : \xi \in D\},$$

co, na podstawie kryterium Cauchy'ego, daje jednostajną sumowalność.

([4]) Przypomnijmy, że $\mathcal{F}(I) = \{A \subset I : A \neq \varnothing,\ \#A \leqslant \aleph_0\}$.

Teraz, na podstawie własności rodzin jednostajnie sumowalnych (Twierdzenia 6.4.11, 6.8.2, 6.8.7), mamy

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-g(a)(x-a)}{\|x-a\|}=\lim_{x\to a}\sum_{i\in I}h_i(x)=\sum_{i\in I}\lim_{x\to a}h_i(x)=0,$$

co kończy dowód.

(b) Dowód jest analogiczny — Ćwiczenie.

(c) wynika z (b). □

Twierdzenie 9.4.10. *Załóżmy, że F jest przestrzenią Banacha. Niech $D\subset E$ będzie obszarem. Wtedy:*

(a) $(\mathcal{D}_b(D,F),\|\ \|_{D,1})$ *jest przestrzenią Banacha,*

(b) $(\mathcal{C}^1_b(D,F),\|\ \|_{D,1})$ *jest przestrzenią Banacha,*

(c) $(\mathcal{C}^{1,\alpha}_b(D,F),\|\ \|_{D,1,\alpha})$ *jest przestrzenią Banacha.*

Dowód. (a) Niech $(f_n)_{n=1}^\infty$ będzie dowolnym ciągiem Cauchy'ego w $(\mathcal{D}_b(D,F),\|\ \|_{D,1})$. Wtedy $(f_n)_{n=1}^\infty$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{B}(D,F)$, a $(f_n')_{n=1}^\infty$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{B}(D,\mathcal{L}(E,F))$. Ponieważ przestrzenie $\mathcal{B}(D,F)$ i $\mathcal{B}(D,\mathcal{L}(E,F))$ są zupełne (Obserwacja 4.6.10), zatem $f_n\longrightarrow g_0\in\mathcal{B}(D,F)$ jednostajnie na D i $f_n'\longrightarrow g_1\in\mathcal{B}(D,\mathcal{L}(E,F))$ jednostajnie na D. Teraz pozostaje już tylko skorzystać lokalnie z Twierdzenia 9.4.9, aby stwierdzić, że $g_0\in\mathcal{D}(D,F)$ i $g_1=g_0'$.

(b) Wobec (a), wystarczy tylko zauważyć, że $\mathcal{C}^1_b(D,F)$ jest podprzestrzenią domkniętą w $\mathcal{D}_b(D,F)$ (korzystamy z Twierdzenia 9.4.9).

(c) Niech $(f_n)_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $(\mathcal{C}^{1,\alpha}_b(D,F),\|\ \|_{D,1,\alpha})$. Jest to również ciąg Cauchy'ego w $(\mathcal{C}^1_b(D,F),\|\ \|_{D,1})$, a wiec wobec (b), $f_n\longrightarrow f_0$ w $\mathcal{C}^1_b(D,F)$. Pozostaje, wykazać, że $|f_n-f_0|_\alpha\longrightarrow 0$. Mamy

$$\begin{aligned}|f_n-f_0|_\alpha&=\sup_{\substack{x,y\in D\\x\neq y}}\frac{\|f_n(x)-f_0(x)-(f_n(y)-f_0(y))\|}{\|x-y\|^\alpha}=\sup_{\substack{x,y\in D\\x\neq y}}\lim_{s\to+\infty}\frac{\|f_n(x)-f_s(x)-(f_n(y)-f_s(y))\|}{\|x-y\|^\alpha}\\&\leqslant\limsup_{s\to+\infty}|f_n-f_s|_\alpha\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.\end{aligned}$$

□

9.5. Druga pochodna

Niech E i F będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{K}$. Niech $\Omega\in\operatorname{top}E$, $f:\Omega\longrightarrow F$ i $a\in\Omega$. Będziemy chcieli zdefiniować pojęcie drugiej pochodnej funkcji f w punkcie a.

Definicja 9.5.1. Mówimy, że f ma *drugą pochodną (różniczkę Frécheta, różniczkę mocną) w punkcie a*, jeżeli $f'(x)$ istnieje dla $x\in V$, gdzie $V\subset\Omega$ jest pewnym otoczeniem otwartym punktu a, oraz odwzorowanie $f':V\longrightarrow\mathcal{L}(E,F)$ ma pochodną w punkcie a. Definiujemy *drugą pochodną (drugą różniczkę Frécheta, drugą różniczkę mocną)* odwzorowania f w punkcie a:

$$f''(a):=(f')'(a)\in\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,F))\simeq\mathcal{L}^2(E,F);$$

aby uniknąć nieporozumień ustalamy identyfikację

$$\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,F))\ni A\longmapsto(E\times E\ni(\xi_1,\xi_2)\longmapsto A(\xi_1)(\xi_2)\in F)\in\mathcal{L}^2(E,F),$$
$$f''(a)(\xi_1,\xi_2)\simeq f''(a)(\xi_1)(\xi_2),\quad \xi_1,\xi_2\in E.$$

Zbiór wszystkich odwzorowań $f:\Omega\longrightarrow F$, dla których $f''(a)$ istnieje oznaczamy przez $\mathcal{D}^2(\Omega,F;a)$.

Oczywiście, dla $E=\mathbb{R}$ powyższa definicja jest równoważna istnieniu $f''(a)$ (w sensie klasycznym) oraz $f''(a)(\xi_1,\xi_2)=f''(a)\xi_1\xi_2$, $\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}$.

Twierdzenie 9.5.2. *Jeżeli $f''(a)$ istnieje, to dla dowolnego $\eta\in E$ odwzorowanie $x\longmapsto f'(x)(\eta)$ ma pochodną w punkcie a oraz $f''(a)(\xi,\eta)=(x\longmapsto f'(x)(\eta))'(a)(\xi)$, $\xi,\eta\in E$. W szczególności:*

- *dla dowolnych $\xi,\eta\in E$ pochodna kierunkowa $\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(a)$ istnieje oraz $f''(a)(\xi,\eta)=\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(a)$;*
- *jeżeli $E=\mathbb{R}^n$, to wszystkie drugie pochodne cząstkowe $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a)$, $i,j=1,\dots,n$, istnieją oraz*

$$f''(a)(\xi,\eta)=\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a)\xi_j\eta_i,\quad \xi=(\xi_1,\dots,\xi_n),\ \eta=(\eta_1,\dots,\eta_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Dowód. Wiemy, że $f'(a+\xi) = f'(a) + f''(a)(\xi) + \|\xi\|\alpha(\xi)$ (równość w $\mathcal{L}(E,F)$), gdzie $\lim_{\xi\to 0}\alpha(\xi) = 0$. Stąd: $f'(a+\xi)(\eta) = f'(a)(\eta) + f''(a)(\xi,\eta) + \|\xi\|\alpha(\xi)(\eta)$, co daje żądany wynik. $\square$

Obserwacja 9.5.3. Pojawia się naturalne pytanie, czy jeżeli $f \in \mathcal{D}(\Omega, F)$ i dla dowolnego $\eta \in E$ odwzorowanie $x \longmapsto f'(x)(\eta)$ ma pochodną w punkcie a, to $f''(a)$ istnieje.

Twierdzenie 9.5.4. *Jeżeli $E = \mathbb{R}^n$, to odpowiedź na pytanie z Obserwacji 9.5.3.*

Dowód. Wiemy, że $f'(x)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i$, czyli $f'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\cdot \mathrm{pr}_i$, gdzie $\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ oznacza projekcję na i-tą współrzędną. Biorąc $\eta = \boldsymbol{e}_i$ wnioskujemy, że pochodna $\big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\big)'(a)$ istnieje. Stąd, korzystając z reguł różniczkowania, wnioskujemy, że pochodna $f''(a)$ istnieje. $\square$

Definicja 9.5.5. Niech $\mathcal{L}_s^2(E,F)$ oznacza zbiór wszystkich odwzorowań symetrycznych z $\mathcal{L}^2(E,F)$.

Odnotujmy, że $\mathcal{L}_s^2(E,F)$ jest podprzestrzenią domkniętą $\mathcal{L}^2(E,F)$. W szczególności, jeżeli F jest Banacha, to przestrzeń $\mathcal{L}_s^2(E,F)$ jest Banacha.

Twierdzenie 9.5.6 (Twierdzenie o symetrii drugiej różniczki)**.** *$f''(a) \in \mathcal{L}_s^2(E,F)$. W szczególności (por. Twierdzenie 9.5.2), dla $E = \mathbb{R}^n$ dostajemy $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$, $i,j = 1,\dots,n$.*

Dowód. (Por. dowód Twierdzenia 9.1.11.) Ustalmy $\xi, \eta \in E$. Chcemy pokazać, że $f''(a)(\xi,\eta) = f''(a)(\eta,\xi)$. Możemy założyć, że $\|\xi\| = \|\eta\| = 1$. Niech kula $B(a,3r) \subset \Omega$ będzie taka, że $f'(x)$ istnieje dla dowolnego punktu $x \in B(a,3r)$. Zdefiniujmy

$$\Phi(t) := f(a+t\xi+t\eta) - f(a+t\xi) - f(a+t\eta) + f(a) - t^2 f''(a)(\xi,\eta), \quad |t| \leqslant r.$$

Pokażemy, że $\Phi(t)/t^2 \longrightarrow 0$ przy $t \longrightarrow 0+$, co wobec symetrii wyrażenia

$$f(a+t\xi+t\eta) - f(a+t\xi) - f(a+t\eta) + f(a),$$

da żądany wynik. Ustalmy $0 < t \leqslant r$ i niech

$$g(y) := f(a+t\xi+y\eta) - f(a+y\eta) - tyf''(a)(\xi,\eta), \quad 0 \leqslant y \leqslant r.$$

Mamy $\Phi(t) = g(t) - g(0)$. Ponadto, $g'(y) = f'(a+t\xi+y\eta)(\eta) - f'(a+y\eta)(\eta) - tf''(a)(\xi,\eta)$. Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, mamy $\|\Phi(t)\| \leqslant t\sup\{\|g'(y)\| : 0 \leqslant y \leqslant t\}$. Niech

$$f'(a+h) = f'(a) + f''(a)(h) + \alpha(h)\|h\|, \quad \|h\| < 3r$$

(równość w $\mathcal{L}(E,F)$), gdzie $\lim_{h\to 0}\alpha(h) = 0$. Wynika stąd, że dla $0 \leqslant y \leqslant t$ mamy

$$\begin{aligned} g'(y) &= f'(a)(\eta) + f''(a)(t\xi+y\eta)(\eta) + \alpha(t\xi+y\eta)(\eta)\|t\xi+y\eta\| \\ &\quad - f'(a)(\eta) - f''(a)(y\eta)(\eta) - \alpha(y\eta)(\eta)\|y\eta\| - tf''(a)(\xi)(\eta) \\ &= \alpha(t\xi+y\eta)(\eta)\|t\xi+y\eta\| - \alpha(y\eta)(\eta)\|y\eta\|, \text{ a stąd} \\ &\sup\{\|g'(y)\| : 0 \leqslant y \leqslant t\} \leqslant 3t\sup\{\|\alpha(\mu\xi+\nu\eta)\| : 0 \leqslant \mu,\nu \leqslant t\}. \end{aligned}$$

Ostatecznie, $\frac{\|\Phi(t)\|}{t^2} \leqslant 3\sup\{\|\alpha(\mu\xi+\nu\eta)\| : 0 \leqslant \mu,\nu \leqslant t\} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. $\square$

Definicja 9.5.7. Niech E, F będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{K}$. Odwzorowanie $Q : E \longrightarrow F$ nazywamy *wielomianem jednorodnym stopnia* 2 *(formą kwadratową)* ($Q \in \underline{\mathcal{H}}^2(E,F)$), jeżeli istnieje odwzorowanie $\widetilde{Q} \in \mathrm{Hom}^2(E,F)$ takie, że $Q(x) = \widetilde{Q}(x,x)$, $x \in E$.

Przez $\mathcal{H}^2(E,F)$ oznaczamy przestrzeń wszystkich ciągłych wielomianów z $\underline{\mathcal{H}}^2(E,F)$.

Obserwacja 9.5.8. (a) $\underline{\mathcal{H}}^2(E,F)$ i $\mathcal{H}^2(E,F)$ są $\mathbb{K}$–przestrzeniami wektorowymi.

(b) Jeżeli $Q(x) = \widetilde{Q}(x,x)$, $x \in E$, gdzie $\widetilde{Q} \in \mathrm{Hom}^2(E,F)$, to odwzorowanie

$$\widehat{Q}(x,y) := \tfrac{1}{2}(\widetilde{Q}(x,y) + \widetilde{Q}(y,x)), \quad x,y \in E,$$

jest dwuliniowe, symetryczne ($\widehat{Q} \in \mathrm{Hom}_s^2(E,F)$) i $Q(x) = \widehat{Q}(x,x)$, $x \in E$. W takim razie odwzorowanie

$$\mathrm{Hom}_s^2(E,F) \ni W \overset{\Lambda}{\longmapsto} (E \ni x \longmapsto W(x,x) \in F) \in \underline{\mathcal{H}}^2(E,F)$$

jest epimorfizmem. Jest ono również injektywne bowiem

$$\widehat{Q}(x,y) = \tfrac{1}{2}\big(\widehat{Q}(x+y,x+y) - \widehat{Q}(x,x) - \widehat{Q}(y,y)\big) = \tfrac{1}{4}\big(\widehat{Q}(x+y,x+y) - \widehat{Q}(x-y,x-y)\big),$$
$$x,y \in E, \quad \widehat{Q} \in \operatorname{Hom}_s^2(E,F).$$

Oznacza to, że $\Lambda : \operatorname{Hom}_s^2(E,F) \longmapsto \underline{\mathcal{H}}^2(E,F)$ jest izomorfizmem algebraicznym, przy czym odwzorowanie odwrotne $\Xi := \Lambda^{-1}$ jest dane wzorem

$$\underline{\mathcal{H}}^2(E,F) \ni Q \overset{\Xi}{\longmapsto} \widehat{Q} \in \operatorname{Hom}_s^2(E,F), \quad E\times E \ni (x,y) \overset{\widehat{Q}}{\longmapsto} \tfrac{1}{4}\big(Q(x+y) - Q(x-y)\big) \in F.$$

(c) $\mathcal{H}^2(E,F) = \Lambda(\mathcal{L}_s^2(E,F))$.

(d) W przestrzeni $\mathcal{H}^2(E,F)$ wprowadzamy normę $\|Q\| := \sup\{\|Q(x)\| : \|x\| \leqslant 1\}$. Wobec nierówności $\|Q(x)\| = \|\widehat{Q}(x,x)\| \leqslant \|\widehat{Q}\|\|x\|^2$, norma $\|Q\|$ jest poprawnie określona. Przy takim unormowaniu

$$\Lambda \in \operatorname{Isom}(\mathcal{L}_s^2(E,F), \mathcal{H}^2(E,F)), \quad \|\Lambda\| \leqslant 1,\ \|\Xi\| \leqslant 2.$$

Odnotujmy, że oszacowanie $\|\Xi\| \leqslant 2$ nie musi być optymalne (Twierdzenie 9.5.9).

(e) Korzystając z powyższych identyfikacji będziemy pisać $f''(a)(h) := f''(a)(h,h)$, $h \in E$ (z pełną świadomością, że czasem może to prowadzić do wieloznaczności).

(f) Jeżeli F jest Banacha, to $\mathcal{H}^2(E,F)$ jest Banacha.

Twierdzenie 9.5.9. *Jeżeli $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ jest rzeczywistą przestrzenią unitarną ($E \neq \{0\}$), to Λ jest izometrią, tzn. $\|\widehat{Q}\| = \|Q\|$ dla dowolnego $Q \in \mathcal{H}^2(E,F)$.*

Przypomnijmy, że zawsze mamy $\|Q\| \leqslant \|\widehat{Q}\|$, $Q \in \mathcal{H}^2(E,F)$.

Dowód. Na wstępie zauważmy, że można założyć, że $\dim E \leqslant 2$. Istotnie, przypuśćmy, że twierdzenie zachodzi dla przestrzeni o wymiarze $\leqslant 2$. Niech $x_1, x_2 \in \overline{B}(1)$ i niech $V := \mathbb{R}x_1 + \mathbb{R}x_2$. Wtedy, dla dowolnego $Q \in \mathcal{H}^2(E,F)$, mamy $\|\widehat{Q}(x_1,x_2)\| \leqslant \|\widehat{Q}|_{V\times V}\| = \|Q_V\| \leqslant \|Q\|$, co dowodzi, że $\|\widehat{Q}\| = \|Q\|$, a więc $\|\Lambda\| = 1$.

Możemy więc założyć, że $\dim E \leqslant 2$. Ustalmy $Q \in \mathcal{H}^2(E,F)$. Zbiór $\overline{B}(1) \times \overline{B}(1)$ jest zwarty i w związku z tym $\|\widehat{Q}\|$ jest zrealizowana dla pewnych $a_1, a_2 \in \partial B(1)$, tzn. $\|\widehat{Q}\| = \|\widehat{Q}(a_1,a_2)\|$. Jeżeli $a_1 = \pm a_2$ dowód jest zakończony (tak jest zawsze, gdy $\dim E = 1$). Przypuśćmy, że $a_1 \neq \pm a_2$ i niech $b := \frac{a_1+a_2}{\|a_1+a_2\|}$. Pokażemy, że wtedy $\|\widehat{Q}\| = \|\widehat{Q}(b,b)\|$, co zakończy dowód. Chcemy pokazać, że $\|Q(a_1+a_2)\| = \|\widehat{Q}\|\|a_1+a_2\|^2$. Gdyby $\|Q(a_1+a_2)\| < \|\widehat{Q}\|\|a_1+a_2\|^2$, to wówczas

$$\|\widehat{Q}\| = \|\widehat{Q}(a_1,a_2)\| = \tfrac{1}{4}\|Q(a_1+a_2) - Q(a_1-a_2)\| < \|\widehat{Q}\|\tfrac{1}{4}(\|a_1+a_2\|^2 + \|a_1-a_2\|^2)$$
$$\overset{(*)}{=} \|\widehat{Q}\|\tfrac{1}{2}(\|a_1\|^2 + \|a_2\|^2) \leqslant \|\widehat{Q}\|;$$

sprzeczność ((*) wynika z reguły równoległoboku (Obserwacja 5.11.25(a))). □

Twierdzenie 9.5.10. *Załóżmy, że $f \in \mathcal{D}^2(\Omega,F;a)$, $g \in \mathcal{D}^2(\Omega,G;a)$, $B \in \mathcal{L}(F,G;H)$. Wtedy $B(f,g) \in \mathcal{D}^2(\Omega,H;a)$ oraz*

$$(B(f,g))''(a)(\xi,\eta) = B(f''(a)(\xi,\eta), g(a)) + B(f'(a)(\eta), g'(a)(\xi))$$
$$+ B(f'(a)(\xi), g'(a)(\eta)) + B(f(a), g''(a)(\xi,\eta)), \quad (\xi,\eta) \in E\times E.$$

W szczególności,

$$(B(f,g))''(a)(h) = B(f''(a)(h), g(a)) + 2B(f'(a)(h), g'(a)(h)) + B(f(a), g''(a)(h)), \quad h \in E.$$

Oczywiście, tak jak poprzednio, możemy sformułować analogiczne wyniki dla mnożenia i iloczynu skalarnego — Ćwiczenie.

Dowód. Możemy założyć, że $f \in \mathcal{D}(\Omega,F)$, $g \in \mathcal{D}(\Omega,G)$. Wiemy, że $(B(f,g))' = B_1(f',g) + B_2(f,g')$, gdzie

$$B_1 : \mathcal{L}(E,F) \times G \longrightarrow \mathcal{L}(E,H), \quad B_1(L,y)(h) := B(L(h),y),$$
$$B_2 : F \times \mathcal{L}(E,G) \longrightarrow \mathcal{L}(E,H), \quad B_2(x,L)(h) := B(x,L(h)).$$

Widać, że są to operatory dwuliniowe i ciągłe. Teraz wystarczy już tylko skorzystać z Twierdzenia 9.2.6:

$$(B(f,g))''(a)(\xi) = B_1(f''(a)(\xi), g(a)) + B_1(f'(a), g'(a)(\xi)) + B_2(f'(a)(\xi), g'(a)) + B_2(f(a), g''(a)(\xi)),$$

$\xi \in E$ (równość w $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, H))$).

Po podstawieniu argumentów dostajemy szukany wzór. □

Twierdzenie 9.5.11 (Różniczkowanie złożenia). *Niech G będzie przestrzenią unormowaną, niech $U \subset G$ będzie zbiorem otwartym, niech $\varphi : U \longrightarrow E$ i niech $t_0 \in U$. Załóżmy, że $\varphi \in \mathcal{D}^2(U, E; t_0)$, $f \in \mathcal{D}^2(\Omega, F; \varphi(t_0))$ i $\varphi(U) \subset \Omega$. Wtedy $f \circ \varphi \in \mathcal{D}^2(U, F; t_0)$ oraz*

$$(f \circ \varphi)''(t_0)(\xi, \eta) = f''(\varphi(t_0))(\varphi'(t_0)(\xi), \varphi'(t_0)(\eta)) + f'(\varphi(t_0))(\varphi''(t_0)(\xi, \eta)), \quad \xi, \eta \in G.$$

W szczególności,

$$(f \circ \varphi)''(t_0)(h) = f''(\varphi(t_0))(\varphi'(t_0)(h)) + f'(\varphi(t_0))(\varphi''(t_0)(h)), \quad h \in G.$$

Dowód. Możemy założyć, że $\varphi \in \mathcal{D}(U, E)$ i $f \in \mathcal{D}(\Omega, F)$. Wiemy, że $(f \circ \varphi)' = B(f' \circ \varphi, \varphi')$, gdzie

$$B : \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(G, E) \longrightarrow \mathcal{L}(G, F), \quad B(P, Q) := P \circ Q.$$

Wiadomo, że B jest operatorem dwuliniowym i ciągłym. Stąd, na podstawie Twierdzenia 9.2.6, mamy:

$$\begin{aligned}(f \circ \varphi)''(t_0)(\xi) &= B((f' \circ \varphi)'(t_0)(\xi), \varphi'(t_0)) + B(f'(\varphi(t_0)), \varphi''(t_0)(\xi)) \\ &= B(f''(\varphi(t_0))(\varphi'(t_0)(\xi)), \varphi'(t_0)) + B(f'(\varphi(t_0)), \varphi''(t_0)(\xi)) \text{ (równość w } \mathcal{L}(G, F)).\end{aligned}$$ □

Definicja 9.5.12 (Ćwiczenie). W standardowy sposób definiujemy przestrzenie $\mathcal{D}^2(\Omega, F)$, $\mathcal{D}^2_b(\Omega, F)$, $\mathcal{C}^{2,\alpha}_b(\Omega, F)$, $\mathcal{C}^2(\Omega, F)$, $\mathcal{C}^2_b(\Omega, F)$ oraz normy $\|f\|_{\Omega,2} := \|f\|_\Omega + \|f'\|_\Omega + \|f''\|_\Omega$, $f \in \mathcal{D}^2_b(\Omega, F)$, $\|f\|_{\Omega,2,\alpha} := \|f\|_{\Omega,2} + |f''|_\alpha$, $f \in \mathcal{C}^{2,\alpha}_b(\Omega, F)$.

Obserwacja 9.5.13 (Ćwiczenie). (a) $f' \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathcal{L}(E, F)) \iff f \in \mathcal{C}^2(\Omega, F)$.

(b) Jeżeli $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, F)$, $g \in \mathcal{C}^2(\Omega, G)$ i $B \in \mathcal{L}(F, G; H)$, to $B(f, g) \in \mathcal{C}^2(\Omega, H)$.

(c) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{C}^2(U, E)$ i $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, F)$, to $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^2(U, F)$.

(d) Teraz przychodzi kolej na uogólnienie twierdzenia o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie (por. Twierdzenie 6.10.1).

(e) Jeżeli F jest Banacha, to $\mathcal{D}^2_b(\Omega, F)$, $\mathcal{C}^{2,\alpha}_b(\Omega, F)$, $\mathcal{C}^2_b(\Omega, F)$ są Banacha.

9.6. Odwzorowania wieloliniowe

Niech $E, E_1, \dots, E_k, F$ będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{K}$.

Definicja 9.6.1. Przez $\operatorname{Hom}(E_1, \dots, E_k; F)$ oznaczamy przestrzeń odwzorowań k–liniowych $W : E_1 \times \dots \times E_k \longrightarrow F$. Jeżeli $E_1 = \dots = E_k = E$, to piszemy $\operatorname{Hom}^k(E, F)$. Przez $\operatorname{Hom}^k_s(E, F)$ oznaczamy przestrzeń wszystkich symetrycznych odwzorowań z przestrzeni $\operatorname{Hom}^k(E, F)$, tzn. tych odwzorowań $W \in \operatorname{Hom}^k(E, F)$, dla których

$$W(x_1, \dots, x_k) = W(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})$$

dla dowolnych $x_1, \dots, x_k \in E$ i permutacji k–elementowej $\sigma \in S_k$.

Obserwacja 9.6.2. (a) Dla dowolnej permutacji $\sigma \in S_k$ mamy

$$\operatorname{Hom}(E_1, \dots, E_k; F) \simeq \operatorname{Hom}(E_{\sigma(1)}, \dots, E_{\sigma(k)}; F).$$

(b) $\operatorname{Hom}^1(E, F) = \operatorname{Hom}^1_s(E, F) = \operatorname{Hom}(E, F)$.

(c) Dla $1 \leqslant \ell \leqslant k - 1$ rozważmy odwzorowanie

$$\operatorname{Hom}(E_1, \dots, E_k; F) \ni W \overset{\Phi}{\longmapsto} \widehat{W} \in \operatorname{Hom}(E_1, \dots, E_\ell; \operatorname{Hom}(E_{\ell+1}, \dots, E_k; F)),$$

$$E_1 \times \dots \times E_\ell \ni (x_1, \dots, x_\ell) \overset{\widehat{W}}{\longmapsto} W(x_1, \dots, x_\ell, \cdot, \dots, \cdot).$$

Bez trudu sprawdzamy, że Φ jest dobrze określone oraz, że Φ jest izomorfizmem algebraicznym, przy czym $\Psi := \Phi^{-1}$ jest dane wzorem:

$$\operatorname{Hom}(E_1, \dots, E_\ell; \operatorname{Hom}(E_{\ell+1}, \dots, E_k; F)) \ni A \overset{\Psi}{\longmapsto} \widehat{A} \in \operatorname{Hom}(E_1, \dots, E_k; F),$$

$$E_1 \times \dots \times_k \ni (x_1, \dots, x_k) \overset{\widehat{A}}{\longmapsto} A(x_1, \dots, x_\ell)(x_{\ell+1}, \dots, x_k) \in F.$$

(d) $\operatorname{Hom}(E_1, \dots, E_k; F) \simeq \operatorname{Hom}(E_1, \dots, E_\ell; \operatorname{Hom}(E_{\ell+1}, \dots, E_k; F))$. W szczególności,

$$\operatorname{Hom}^k(E, F) \simeq \operatorname{Hom}^\ell(E, \operatorname{Hom}^{k-\ell}(E, F)).$$

Definicja 9.6.3. Niech $\underline{\mathcal{H}}^k(E,F)$ oznacza przestrzeń wszystkich *wielomianów jednorodnych stopnia* k, tzn. przestrzeń wszystkich tych odwzorowań $Q : E \longrightarrow F$, dla których istnieje $\widetilde{Q} \in \operatorname{Hom}^k(E,F)$ takie, że $Q(x) = \widetilde{Q}(x,\dots,x)$ dla dowolnego $x \in E$. Przyjmijmy dodatkowo $\underline{\mathcal{H}}^0(E,F) := F$.

Obserwacja 9.6.4. Jeżeli $Q(x) = \widetilde{Q}(x,\dots,x)$, $x \in E$, to wzór

$$\widehat{Q}(x_1,\dots,x_k) := \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\widetilde{Q}(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(k)}),\quad x_1,\dots,x_k \in E,$$

zadaje odwzorowanie z $\operatorname{Hom}^k_s(E,F)$ o tej samej własności. Mamy więc epimorfizm

$$\operatorname{Hom}^k_s(E,F) \ni W \overset{\Lambda}{\longmapsto} (E \ni x \longmapsto W(x,\dots,x) \in F) \in \underline{\mathcal{H}}^k(E,F).$$

Twierdzenie 9.6.5 (Formuła polaryzacyjna)**.** *Dla* $0 \leqslant \ell \leqslant k$, $k \in \mathbb{N}$ *i* $Q \in \underline{\mathcal{H}}^\ell(E,F)$ *zachodzi wzór*

$$\frac{1}{k!}\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k}(-1)^{k-|\varepsilon|}Q(x_0+\varepsilon_1x_1+\dots+\varepsilon_kx_k) = \begin{cases}\widehat{Q}(x_1,\dots,x_k), & \text{jeżeli } \ell = k\\ 0, & \text{jeżeli } 0 \leqslant \ell \leqslant k-1\end{cases},\quad x_0,\dots,x_k \in E.$$

Dla $\ell = k \geqslant 2$ *formuła polaryzacyjna pokazuje, że odwzorowanie* Λ *jest injektywne (a więc jest izomorfizmem) i daje ponadto wzór na* $\Xi := \Lambda^{-1}$ *(zawsze można przyjąć* $x_0 = 0$*). Mamy więc*

$$\operatorname{Hom}^k_s(E,F) \simeq \underline{\mathcal{H}}^k(E,F).$$

Dowód. Przypadek $\ell = 0$ pozostawiamy jako Ćwiczenie. Dla $\ell \geqslant 1$ mamy

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k!}\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k}(-1)^{k-|\varepsilon|}Q(x_0+\varepsilon_1x_1+\dots+\varepsilon_kx_k)\\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k}(-1)^{k-|\varepsilon|}\widehat{Q}(\underbrace{x_0+\varepsilon_1x_1+\dots+\varepsilon_kx_k,\dots,x_0+\varepsilon_1x_1+\dots+\varepsilon_kx_k}_{\ell\times})\\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k}(-1)^{k-|\varepsilon|}\sum_{\substack{j_0,\dots,j_k\in\mathbb{N}_0\\ j_0+\dots+j_k=\ell}}\frac{\ell!}{j_0!\dots j_k!}\varepsilon_1^{j_1}\dots\varepsilon_k^{j_k}\widehat{Q}(\underbrace{x_0,\dots,x_0}_{j_0\times},\dots,\underbrace{x_k,\dots,x_k}_{j_k\times})\\
&= \sum_{\substack{j_0,\dots,j_k\in\mathbb{N}_0\\ j_0+\dots+j_k=\ell}}\Big(\frac{1}{k!}\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k}(-1)^{k-|\varepsilon|}\frac{\ell!}{j_0!\dots j_k!}\varepsilon_1^{j_1}\dots\varepsilon_k^{j_k}\Big)\widehat{Q}(\underbrace{x_0,\dots,x_0}_{j_0\times},\dots,\underbrace{x_k,\dots,x_k}_{j_k\times})\\
&=: \sum_{\substack{j_0,\dots,j_k\in\mathbb{N}_0\\ j_0+\dots+j_k=\ell}}A_{j_0,\dots,j_k}\widehat{Q}(\underbrace{x_0,\dots,x_0}_{j_0\times},\dots,\underbrace{x_k,\dots,x_k}_{j_k\times}).
\end{aligned}$$

Ustalmy $j_0,\dots,j_k \in \mathbb{N}_0$ takie, że $j_0+\dots+j_k = \ell$ i rozważmy dwa przypadki:

- Istnieje $s \in \{1,\dots,k\}$ takie, że $j_s = 0$ (ma to zawsze miejsce, gdy $\ell < k$, bo $j_1+\dots+j_k \leqslant \ell$). Wtedy $A_{j_0,\dots,j_k} = 0$, bo $(-1)^{k-(\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_k)}$ zmienia znak, gdy przechodzimy od $\varepsilon_s = 0$ do $\varepsilon_s = 1$, a cała reszta pozostaje bez zmian.
- Przypadek przeciwny. Musi być $\ell = k$, $j_0 = 0$ i $j_1 = \dots = j_k = 1$. Wtedy

$$A_{0,1,\dots,1} = \frac{1}{k!}\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k}(-1)^{k-|\varepsilon|}k!\varepsilon_1\dots\varepsilon_k = 1. \qquad\square$$

Obserwacja 9.6.6. Załóżmy, że mamy dany wielomian jednorodny $Q \in \underline{\mathcal{H}}^k(E,F)$. Wzór polaryzacyjny pozwala nam wyznaczyć odwzorowanie $\widehat{Q} \in \operatorname{Hom}^k_s(E,F)$ takie, że $\widehat{Q}(x,\dots,x) = Q(x)$, $x \in E$. Niestety, w praktyce wiąże się niejednokrotnie z uciążliwymi rachunkami. Ponieważ odwzorowanie $\widehat{Q}$ jest wyznaczone jednoznacznie, czasami możemy postąpić innaczej. Najpierw próbujemy odgadnąć jakieś odwzorowanie $W \in \operatorname{Hom}^k(E,F)$ takie, że $W(x,\dots,x) = Q(x)$, $x \in E$. Następnie symetryzujemy to odwzorowanie zgodnie ze wzorem

$$\widehat{W}(x_1,\dots,x_k) := \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}W(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(k)}),\quad x_1,\dots,x_k \in E. \qquad (*)$$

Pozornie niewiele to upraszcza, ale jeżeli nasz początkowy wybór W był w miarę trafny, to możemy sporo zyskać. Załóżmy mianowicie że zmienne $(x_1,\dots,x_k)$ możemy podzielić na ℓ grup $Z_1 := (1,\dots,x_{\beta_1})$, $Z_2 :=$

$(x_{\beta_1+1}, \dots, x_{\beta_1+\beta_2}), \dots, Z_\ell := (x_{\beta_1+\dots+\beta_{\ell-1}+1}, \dots, x_{\beta_1+\dots+\beta_\ell})$, gdzie $\beta_1, \dots, \beta_\ell \in \mathbb{N}$, $\beta_1 + \dots + \beta_\ell = k$, w ten sposób, że W jest odwzorowaniem symetrycznym względem zmiennych z każdej grupy Z_j przy ustalonych pozostałych zmiennych (5). Patrząc na (*), porządkując zmienne tak by każdy z ciągów $Z_1(\sigma) := (\sigma(1), \dots, \sigma(\beta_1))$, $Z_2(\sigma) := (\sigma(\beta_1+1), \dots \sigma(\beta_1+\beta_2))$, $\dots$, $Z_\ell(\sigma) := (\sigma(\beta_1 + \dots + \beta_{\ell-1} + 1), \dots, \sigma(\beta_1 + \dots + \beta_\ell))$ był ściśle rosnący, a nastepnie korzystając z oddzielnej symetrii, otrzymujemy (Ćwiczenie):

$$\widehat{W}(x_1, \dots, x_k) = \frac{\beta_1! \cdots \beta_\ell!}{k!} \sum_{\sigma \in S_{\beta_1, \dots, \beta_\ell}} W(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}), \quad x_1, \dots, x_k \in E,$$

gdzie $S_{\beta_1,\dots,\beta_\ell} := \{\sigma \in S_k : \text{każdy z ciągów } Z_1(\sigma), \dots, Z_\ell(\sigma) \text{ jest ściśle rosnący}\}$ (6).

Definicja 9.6.7. Odwzorowanie $Q : E \longrightarrow F$ nazywamy *wielomianem stopnia* $\leqslant k$, jeżeli istnieją $Q_j \in \underline{\mathcal{H}}^j(E, F)$, $j = 0, \dots, k$, takie, że $Q = Q_0 + \dots + Q_k$. Przestrzeń wielomianów stopnia $\leqslant k$ będzie oznaczana przez $\underline{\mathcal{P}}_k(E, F)$.

Na podstawie formuły polaryzacyjnej wiemy, że Q_k jest wyznaczony jednoznacznie przez Q. Powtarzając to rozumowanie dla $Q - Q_k$ wnioskujemy, że Q_{k-1} jest wyznaczony jednoznacznie itd. Wynika stąd, że wszystkie wielomiany $Q_0, \dots, Q_k$ są wyznaczone jednoznacznie.

Definicja 9.6.8. $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_k; F)$ oznacza przestrzeń wszystkich odwzorowań ciągłych z $\operatorname{Hom}(E_1, \dots, E_k; F)$. Jeżeli $E_1 = \dots = E_k = E$, to piszemy $\mathcal{L}^k(E, F)$.

$\mathcal{L}^k_s(E, F)$ oznacza przestrzeń ciągłych odwzorowań z $\operatorname{Hom}^k_s(E, F)$.

$\mathcal{H}^k(E, F)$ oznacza przestrzeń ciągłych wielomianów jednorodnych stopnia k.

$\mathcal{P}_k(E, F)$ oznacza przestrzeń ciągłych wielomianów stopnia $\leqslant k$.

Twierdzenie 9.6.9. *Niech $W \in \operatorname{Hom}(E_1, \dots, E_k; F)$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) $W \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_k; F)$*;*
(ii) *W jest ciągłe w 0;*
(iii) *istnieje punkt $a \in E_1 \times \dots \times E_k$ taki, że W jest ciągłe w a;*
(iv) *istnieją $a = (a_1, \dots, a_k) \in E_1 \times \dots \times E_k$, $r > 0$ i $R > 0$ takie, że $W(\overline{B}(a_1, r) \times \dots \times \overline{B}(a_k, r)) \subset \overline{B}(R)$;*
(v) *istnieje $C \geqslant 0$ takie, że $\|W(x_1 \dots, x_k)\| \leqslant C\|x_1\| \cdots \|x_k\|$, $(x_1, \dots, x_k) \in E_1 \times \dots \times E_k$.*

Dowód. Implikacje (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) są oczywiste.

(iv) $\Longrightarrow$ (v): Wystarczy pokazać, że $\|W(x_1, \dots, x_k)\| \leqslant C$ dla $\|x_1\| = \dots = \|x_k\| = r$ (7). Weźmy $(x_1, \dots, x_k) \in E_1 \times \dots \times E_k$ takie, że $\|x_1\| = \dots = \|x_k\| = r$ i szacujemy:

$$\begin{aligned}\|W(x_1, \dots, x_k)\| &= \|W((a_1 + x_1) - a_1, \dots, (a_k + x_k) - a_k)\| \\ &= \Big\| \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^k} (-1)^{k-|\varepsilon|} W(a_1 + \varepsilon_1 x_1, \dots, a_k + \varepsilon_k x_k) \Big\| \leqslant 2^k R =: C.\end{aligned}$$

(v) $\Longrightarrow$ (i): Dla $\|h_1\|, \dots, \|h_k\| \leqslant 1$ szacujemy:

$$\begin{aligned}\|W(a_1 + h_1, \dots, a_k + h_k) - W(a_1, \dots, a_k)\| &= \Big\| \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^k :\, |\varepsilon| \geqslant 1} W((1-\varepsilon_1)a_1 + \varepsilon_1 h_1, \dots, (1-\varepsilon_k)a_k + \varepsilon_k h_k) \Big\| \\ &\leqslant \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^k :\, |\varepsilon| \geqslant 1} C\|a_1\|^{1-\varepsilon_1} \|h_1\|^{\varepsilon_1} \cdots \|a_k\|^{1-\varepsilon_k} \|h_k\|^{\varepsilon_k} \leqslant C \operatorname{const}(k, a)(\|h_1\| + \dots + \|h_k\|). \qquad \square\end{aligned}$$

Wniosek 9.6.10. $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_k; F)$ *jest przestrzenią unormowaną poprzez funkcję*

$$\|W\| = \|W\|_{\mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F)} := \sup\{\|W(x_1, \dots, x_k)\| : \|x_1\| \leqslant 1, \dots, \|x_k\| \leqslant 1\},\ W \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_k; F).$$

---

(5) Oczywiście, to założenie jest trywialnie spełnione dla $\ell = k$ i $\beta_1 = \dots = \beta_k = 1$, ale nie o taki przypadek nam chodzi.

(6) $\#S_{\beta_1,\dots,\beta_\ell} = \frac{k!}{\beta_1! \cdots \beta_\ell!}$ — Ćwiczenie.

(7) Wtedy $\|W(x_1, \dots, x_k)\| \leqslant (C/r^k)\|x_1\| \cdots \|x_k\|$ dla dowolnych $(x_1, \dots . x_k) \in E_1 \times \dots \times E_k$.

Ponadto, jeżeli $E_j \neq \{0\}$, $j = 1, \dots, k$, to

$$\begin{aligned}\|W\| &= \sup\Big\{\frac{\|W(x_1,\dots,x_k)\|}{\|x_1\|\cdots\|x_k\|} : (x_1,\dots,x_k) \in (E_1)_* \times \dots \times (E_k)_*\Big\} \\ &= \sup\{\|W(x_1,\dots,x_k)\| : \|x_1\| = \dots = \|x_k\| = 1\}\end{aligned}$$

oraz $\|W\|$ jest najmniejszą stałą C taką, że Twierdzenie 9.6.9(v) *zachodzi. W szczególności,*

$$\|W(x_1,\dots,x_k)\| \leqslant \|W\|\|x_1\|\cdots\|x_k\|, \quad (x_1,\dots,x_k) \in E_1 \times \dots \times E_k.$$

Twierdzenie 9.6.11. *Niech Φ, Ψ będą takie, jak w Obserwacji 9.6.2*(c).

(a) *$\Phi(\mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F)) = \mathcal{L}(E_1,\dots,E_\ell;\mathcal{L}(E_{\ell+1},\dots,E_k;F))$ oraz $\|\Phi(W)\| = \|W\|$ dla $W \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_k;F)$, a więc $\Phi \in \operatorname{Isom}(\mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F),\mathcal{L}(E_1,\dots,E_\ell;\mathcal{L}(E_{\ell+1},\dots,E_k;F)))$ i Φ jest izometrią.*

(b) *Jeżeli $E_1,\dots,E_k$ są skończenie wymiarowe, to $\mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F) = \operatorname{Hom}(E_1,\dots,E_k;F)$. W szczególności, jeżeli E jest skończenie wymiarowa, to $\mathcal{L}^k(E,F) = \operatorname{Hom}^k(E,F)$.*

(c) *Jeżeli F jest Banacha, to $\mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F)$ jest Banacha.*

(d) *Jeżeli F jest Banacha, to $\mathcal{L}_s^k(E,F)$ jest Banacha.*

Dowód. (a) Wystarczy skorzystać ze wzorów na Φ i Ψ.

(b) Stosujemy indukcję względem k:

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}(E_1,\dots,E_{k+1};F) \simeq \mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;\mathcal{L}(E_{k+1},F)) \\ &\qquad = \operatorname{Hom}(E_1,\dots,E_k;\operatorname{Hom}(E_{k+1},F)) = \operatorname{Hom}(E_1,\dots,E_{k+1};F).\end{aligned}$$

(c) Stosujemy indukcję względem k:

$$\mathcal{L}(E_1,\dots,E_{k+1};F) \simeq \mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;\mathcal{L}(E_{k+1},F)).$$

(d) $\mathcal{L}_s^k(E,F)$ jest podprzestrzenią domkniętą w $\mathcal{L}^k(E,F)$. $\square$

Przestrzeń $\mathcal{H}^k(E,F)$ normujemy przy pomocy funkcji

$$\|Q\| = \|Q\|_{\mathcal{H}^k(E,F)} := \sup\{\|Q(x)\| : \|x\| \leqslant 1\}, \quad Q \in \mathcal{H}^k(E,F).$$

Odnotujmy, że $\|Q\|$ jest dobrze określona, $\|Q\| \leqslant \|\widehat{Q}\|$ oraz $\|Q(x)\| \leqslant \|Q\|\|x\|^k$, $x \in E$.

Twierdzenie 9.6.12. (a) *$\Lambda(\mathcal{L}_s^k(E,F)) = \mathcal{H}^k(E,F)$, $\Lambda \in \operatorname{Isom}(\mathcal{L}_s^k(E,F),\mathcal{H}^k(E,F))$, $\|\Lambda\| \leqslant 1$, $\|\Xi\| \leqslant e^{2k}$.*

(b) *Dla wielomianu $Q = Q_0 + \dots + Q_k \in \underline{\mathcal{P}}_k(E,F)$ mamy $Q \in \mathcal{P}_k(E,F) \iff Q_j \in \mathcal{H}^j(E,F)$, $j = 1,\dots,k$.*

(c) *Jeżeli $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ jest rzeczywistą przestrzenią unitarną, to Λ jest izometrią.*

Dowód. (a) Jeżeli $\|x_1\|,\dots,\|x_k\| \leqslant 1$, to

$$\|\widehat{Q}(x_1,\dots,x_k)\| \leqslant \frac{1}{k!}\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k}\|Q\||\varepsilon|^k = \|Q\|\frac{1}{k!}\sum_{\ell=1}^{k}\binom{k}{\ell}\ell^k \leqslant \|Q\|\frac{1}{k!}2^k k^k \leqslant e^{2k}\|Q\|,$$

a więc $\|\Xi\| \leqslant e^{2k}$.

(b) Przypuśćmy, że Q jest wielomianem ciągłym. Na podstawie formuły polaryzacyjnej mamy

$$\widehat{Q}_k(x_1,\dots,x_k) := \frac{1}{k!}\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^k}(-1)^{k-|\varepsilon|}Q(\varepsilon_1x_1 + \dots + \varepsilon_kx_k), \quad x_1,\dots,x_k \in E,$$

skąd natychmiast wynika, że Q_k jest wielomianem jednorodnym ciągłym. Stosując to samo rozumowanie do wielomianu $Q - Q_k$ wnioskujemy, że Q_{k-1} jest wielomianem jednorodnym ciągłym. Skończona indukcja kończy dowód.

(c) (Por. dowód Twierdzenia 9.5.9.) Można założyć, że $\dim E < +\infty$ (Ćwiczenie). Ustalmy $Q \in \mathcal{H}^k(E,F)$, $k \geqslant 3$. Ponieważ E jest skończenie wymiarowa, zbiór $\big(\overline{B}(1)\big)^k$ jest zwarty i w związku z tym $\|\widehat{Q}\|$ jest zrealizowana dla pewnych $a_1,\dots,a_k \in \partial B(1)$. Niech $a \in \partial B(1)$ będzie taki, że $\langle a,a_j\rangle \neq 0$, $j = 1,\dots,k$. Zastępując ewentualnie a_j przez $-a_j$ możemy założyć, że $\langle a,a_j\rangle \geqslant r > 0$, $j = 1,\dots,k$. Niech

$$K := \{(x_1,\dots,x_k) \in \big(\partial B(1)\big)^k : \langle a,x_j\rangle \geqslant r,\ j = 1,\dots,k,\ \|\widehat{Q}\| = \|\widehat{Q}(x_1,\dots,x_k)\|\}.$$

Zauważmy, że $(a_1, \dots, a_k) \in K$ oraz, że K jest zwarty. Zdefiniujmy $f(x_1, \dots, x_k) := \langle a, x_1\rangle + \dots + \langle a, x_k\rangle$ i niech $(b_1, \dots, b_k) \in K$ realizuje maksimum funkcji f na K. Pokażemy, że $\varepsilon_1 b_1 = \dots = \varepsilon_k b_k$ dla pewnych $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \{-1, 1\}$. Zauważmy, że to już zakończy dowód (Ćwiczenie). Przypuśćmy, że np. $b_1 \neq \pm b_2$. Zdefiniujmy $d := (b_1 + b_2)/\|b_1 + b_2\|$ i zauważmy, że (Ćwiczenie):

- $\|b_1 + b_2\| < 2$,
- $\langle a, d\rangle = \frac{\langle a,b_1\rangle + \langle a,b_2\rangle}{\|b_1+b_2\|} \geqslant \frac{2r}{\|b_1+b_2\|} > r$,
- analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 9.5.9 mamy $\|\widehat{Q}(d, d, b_3, \dots, b_k)\| = \|\widehat{Q}\|$.

W takim razie $(d, d, b_3, \dots, b_k) \in K$ oraz $f(d, d, b_3, \dots, b_k) = 2\frac{\langle a,b_1\rangle + \langle a,b_2\rangle}{\|b_1+b_2\|} + \langle a, b_3\rangle + \dots + \langle a, b_k\rangle > f(b_1, \dots, b_k)$; sprzeczność. □

Twierdzenie 9.6.13. *Niech $Q = Q_0 + \dots + Q_k \in \underline{\mathcal{P}}_k(E, F)$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *$Q \in \mathcal{P}_k(E, F)$;*

(ii) *Q jest ciągłe w 0;*

(iii) *istnieje punkt $a \in E$ taki, że Q jest ciągłe w a;*

(iv) *istnieją $a \in E$ i $r_0 > 0$ takie, że $Q(B(a, r_0))$ jest zbiorem ograniczonym;*

(v) *dla dowolnego $r > 0$, $Q(B(r))$ jest zbiorem ograniczonym (równoważnie: dla dowolnych $a \in E$ i $r > 0$, $Q(B(a, r))$ jest zbiorem ograniczonym).*

Dowód. Implikacje (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) są oczywiste.

(iv) $\Longrightarrow$ (v): Wobec formuły polaryzacyjnej (z $x_0 := a$) $\widehat{Q}_k(B(r_0/k) \times \dots \times B(r_0/k))$ jest zbiorem ograniczonym. Stąd na podstawie Twierdzenia 9.6.9, $\widehat{Q}_k$ jest ciągłe. W szczególności, $Q_k(B(r))$ jest zbiorem ograniczonym dla dowolnego $r > 0$. Teraz powtarzamy rozumowanie dla wielomianu $Q - Q_k$ i wnioskujemy, że $Q_{k-1}(B(r))$ jest zbiorem ograniczonym dla dowolnego $r > 0$ itd. Ostatecznie $Q_j(B(r))$ jest zbiorem ograniczonym dowolnych $j = 1, \dots, k$ i $r > 0$, skąd natychmiast wynika (v).

(v) $\Longrightarrow$ (i): Stosujemy poprzednie rozumowanie. □

Twierdzenie 9.6.14. (a) *Jeżeli $W \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_k; F)$, to $W'(a) \in \mathcal{L}(E_1 \times \dots \times E_k, F)$,*

$$W'(a)(h) = W(h_1, a_2, \dots, a_k) + W(a_1, h_2, a_3, \dots, a_k) + \dots + W(a_1, \dots, a_{k-1}, h_k),$$
$$a = (a_1, \dots, a_k),\ h = (h_1, \dots, h_k) \in E_1 \times \dots \times E_k.$$

W szczególności, $W' = W_1 + \dots + W_k$, gdzie $W_j \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_{j-1}, E_{j+1}, \dots, E_k; \mathcal{L}(E_j, F))$, $j = 1, \dots, k$. W konsekwencji,

$$W''(a)(h_1, h_2) = \sum_{\substack{1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant k \\ \sigma \in S_2}} W(a_1, \dots, a_{j_1 - 1}, h_{\sigma(1), j_1}, a_{j_1+1}, \dots, a_{j_2-1}, h_{\sigma(2), j_2}, a_{j_2+1}, \dots, a_k).$$

(b) *Jeżeli $Q \in \mathcal{H}^k(E, F)$, to $Q'(a)(h) = k\widehat{Q}(a, \dots, a, h)$, $a, h \in E$. W szczególności, $Q' \in \mathcal{H}^{k-1}(E, \mathcal{L}(E, F))$. W konsekwencji, $Q''(a)(h, h) = k(k-1)\widehat{Q}(a, \dots, a, h, h)$, $a, h \in E$.*

(c) *Jeżeli $Q \in \mathcal{P}_k(E, F)$, to $Q' \in \mathcal{P}_{k-1}(E, \mathcal{L}(E, F))$.*

Dowód. (a) — zob. dowód Obserwacji 9.2.5(e).

(b) $Q = \widehat{Q} \circ \pi$, gdzie $\pi : E \longrightarrow E^k$, $\pi(x) := (x, \dots, x)$. Stąd $Q'(a) = \widehat{Q}'(\pi(a)) \circ \pi'(a)$ i możemy skorzystać z (a).

(c) wynika z (b). □

9.7. Pochodne wyższych rzędów

Definicja 9.7.1. Niech E i F będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{K}$, niech $\Omega \in \operatorname{top}(E)$, $f : \Omega \longrightarrow F$, $a \in \Omega$ i załóżmy, że $f^{(k-1)}(x) \in \mathcal{L}^{k-1}(E, F)$ istnieje dla $x \in V$, gdzie V jest pewnym otoczeniem a (wiemy już co to oznacza dla $k = 2, 3$). Mamy więc odwzorowanie $f^{(k-1)} : V \longrightarrow \mathcal{L}^{k-1}(E, F)$. Definiujemy *$k$-tą pochodną ($k$-tą różniczkę Frécheta)* odwzorowania f w punkcie a:

$$f^{(k)}(a) := (f^{(k-1)})'(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}^{k-1}(E, F)) \simeq \mathcal{L}^k(E, F).$$

Aby uniknąć nieporozumień ustalamy identyfikację

$$\mathcal{L}(E, \mathcal{L}^{k-1}(E, F)) \ni A \longmapsto \widehat{A} \in \mathcal{L}^k(E, F), \quad E \times E^{k-1} \ni (\xi, \eta) \xrightarrow{\widehat{A}} A(\xi)(\eta) \in F, \text{ tzn.}$$

$$f^{(k)}(a)(\xi,\eta)\simeq f^{(k)}(a)(\xi)(\eta),\quad (\xi,\eta)\in E\times E^{k-1}.$$

Zbiór wszystkich odwzorowań $f:\Omega\longrightarrow F$, dla których $f^{(k)}(a)$ istnieje oznaczamy przez $\mathcal{D}^k(\Omega,F;a)$. Jak zwykle $\mathcal{D}^k(\Omega,F):=\bigcap_{x\in\Omega}\mathcal{D}(\Omega,F;x)$.

Obserwacja 9.7.2 (Ćwiczenie, por. Twierdzenie 9.6.14). (a) Jeżeli $W\in\mathcal{L}(E_1,\dots,E_k;F)$, to dla $1\leqslant\ell\leqslant k$ mamy

$$W^{(\ell)}(a)(h^1,\dots,h^\ell)=\sum_{\substack{1\leqslant j_1<\dots<j_\ell\leqslant k\\ \sigma\in S_\ell}} W(a_1,\dots,a_{j_1-1},h^{\sigma(1)}_{j_1},a_{j_1+1},\dots,a_{j_\ell-1},h^{\sigma(\ell)}_{j_\ell},a_{j_\ell+1},\dots,a_k).$$

Ponadto, $W^{(\ell)}=0$ dla $\ell\geqslant k+1$.

(b) Jeżeli $Q\in\mathcal{H}^k(E,F)$, to dla $1\leqslant\ell\leqslant k$ mamy

$$Q^{(\ell)}(a)(\underbrace{h,\dots,h}_{\ell\times})=\ell!\binom{k}{\ell}\widehat{Q}(\underbrace{a,\dots,a}_{(k-\ell)\times},\underbrace{h,\dots,h}_{\ell\times}),\quad a,h\in E,\ \ell=0,\dots,k;$$

w szczególności, $Q^{(k)}(a)=k!Q$, $a\in E$, a stąd $Q^{(\ell)}=0$ dla $\ell\geqslant k+1$.

(c) Jeżeli $Q\in\mathcal{P}_k(E,F)$, to $Q^{(\ell)}=0$ dla $\ell\geqslant k+1$.

(d) Załóżmy, że $D\subset E$ jest obszarem i $f\in\mathcal{D}^k(D,F)$. Wtedy $f\in\mathcal{P}_{k-1}(E,F)\iff f^{(k)}\equiv 0$.

Twierdzenie 9.7.3. (a) *Jeżeli $f^{(k)}\in\mathcal{D}^\ell(\Omega,\mathcal{L}^k(E,F);a)$, to $f\in\mathcal{D}^{k+\ell}(\Omega,F;a)$ oraz $(f^{(k)})^{(\ell)}(a)=f^{(k+\ell)}(a)$ (po utożsamieniu $\mathcal{L}^\ell(E,\mathcal{L}^k(E,F))\simeq\mathcal{L}^{k+\ell}(E,F)$).*

(b) *Jeżeli $f\in\mathcal{D}^{k+\ell}(\Omega,F;a)$, to dla dowolnych $h_{\ell+1},\dots,h_{k+\ell}\in E$ odwzorowanie*

$$x\longmapsto f^{(k)}(x)(h_{\ell+1},\dots,h_{k+\ell})$$

ma ℓ-tą pochodną w punkcie a oraz

$$f^{(k+\ell)}(a)(h_1,\dots,h_{k+\ell})=(x\longmapsto f^{(k)}(x)(h_{\ell+1},\dots,h_{k+\ell}))^{(\ell)}(a)(h_1,\dots,h_\ell),\quad h_1,\dots,h_\ell\in E.$$

(c) *Jeżeli $f\in\mathcal{D}^k(\Omega,F;a)$, to dla dowolnych $h_1,\dots,h_k\in E$ pochodna kierunkowa $\frac{\partial^k f}{\partial h_1\dots\partial h_k}(a)$ istnieje oraz $\frac{\partial^k f}{\partial h_1\dots\partial h_k}(a)=f^{(k)}(a)(h_1,\dots,h_k)$.*

(d) *Dla $E=\mathbb{R}$ mamy: $f\in\mathcal{D}^k(\Omega,F;a)$ (w sensie Frécheta) wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{(k)}(a)$ istnieje w sensie klasycznym oraz $f^{(k)}(a)(h_1,\dots,h_k)=f^{(k)}(a)h_1\cdots h_k$, $h_1,\dots,h_k\in\mathbb{R}$.*

(e) *Jeżeli $E=\mathbb{R}^n$ i $f\in\mathcal{D}^k(\Omega,F;a)$, to*

$$f^{(k)}(a)(h_1,\dots,h_k)=\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n}\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}}(a)h_{1,i_1}\cdots h_{k,i_k},\quad h_j=(h_{j,1},\dots,h_{j,n})\in\mathbb{R}^n,\ j=1,\dots,k.$$

Dowód. We wszystkich dowodach będziemy rozumować indukcyjnie.

(a) Dla $\ell=1$ wystarczy skorzystać z definicji.

$\ell\rightsquigarrow\ell+1$: $(f^{(k)})^{(\ell+1)}(a)=\big((f^{(k)})^{(\ell)}\big)'(a)=(f^{(k+\ell)})'(a)=f^{(k+\ell+1)}(a)$.

(b) $\ell=1$ (por. Twierdzenie 9.5.2): Wiemy, że

$$f^{(k)}(a+h_1)=f^{(k)}(a)+f^{(k+1)}(a)(h_1)+o(\|h_1\|)\text{ przy }h_1\longrightarrow 0\text{ (równość w }\mathcal{L}^k(E,F)).$$

Podstawiając $h_2,\dots,h_{k+1}$ dostajemy:

$$f^{(k)}(a+h_1)(h_2,\dots,h_{k+1})=f^{(k)}(a)(h_2,\dots,h_{k+1})+f^{(k+1)}(a)(h_1,h_2,\dots,h_{k+1})+o(\|h_1\|)\quad\text{przy }h_1\longrightarrow 0,$$

co daje żądany wynik.

$\ell\rightsquigarrow\ell+1$: Załóżmy, że $f\in\mathcal{D}^{k+\ell}(U,F)$ dla pewnego otoczenia U punktu a. Ustalmy $h_{\ell+2},\dots,h_{k+\ell+1}\in E$. Na podstawie założenia indukcyjnego odwzorowanie $U\ni x\overset{g}{\longmapsto}f^{(k)}(x)(h_{\ell+2},\dots,h_{k+\ell+1})$ jest ℓ–krotnie różniczkowalne w U oraz

$$g^{(\ell)}(x)(h_2,\dots,h_{\ell+1})=f^{(k+\ell)}(x)(h_2,\dots,h_{k+\ell+1}),\quad x\in U,\ h_2,\dots,h_{\ell+1}\in E.$$

Z drugiej strony, ponieważ $f^{(k+\ell+1)}(a)$ istnieje, więc

$$f^{(k+\ell)}(a+h_1)=f^{(k+\ell)}(a)+f^{(k+\ell+1)}(a)(h_1)+o(\|h_1\|)\text{ przy }h_1\longrightarrow 0\text{ (równość w }\mathcal{L}^{k+\ell}(E,F)).$$

Podstawiając $h_{\ell+2}, \dots, h_{k+\ell+1}$, dostajemy

$$g^{(\ell)}(a+h_1) = g^{(\ell)}(a) + f^{(k+\ell+1)}(a)(h_1, \cdot, \dots, \cdot, h_{\ell+2}, \dots, h_{k+\ell+1}) + o(\|h_1\|)$$
$$\text{przy } h_1 \longrightarrow 0 \text{ (równość w } \mathcal{L}^\ell(E,F) \text{ po stosownym utożsamieniu).}$$

Wynika stąd, że $g^{(\ell+1)}(a)$ istnieje oraz $g^{(\ell+1)}(a) = f^{(k+\ell+1)}(a)(\cdot, \dots, \cdot, h_{\ell+2}, \dots, h_{k+\ell+1})$, co kończy dowód.

(c) Przypadek $k = 1$ jest oczywisty.

$k \rightsquigarrow k+1$: Na podstawie (b) mamy

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial h_1 \dots \partial h_{k+1}}(a) = \frac{\partial}{\partial h_1} \frac{\partial^k f}{\partial h_2 \dots \partial h_{k+1}}(a) = \frac{\partial}{\partial h_1}\Big(x \longmapsto f^{(k)}(x)(h_2, \dots, h_{k+1})\Big)(a)$$
$$= (x \longmapsto f^{(k)}(x)(h_2, \dots, h_{k+1}))'(a)(h_1) = f^{(k+1)}(a)(h_1, \dots, h_{k+1}).$$

(d) Przypadek $k = 1$ jest oczywisty.

$k \rightsquigarrow k+1$: Na podstawie (b) mamy

$$f^{(k+1)}(a)(h_1, \dots, h_{k+1}) = (x \longmapsto f^{(k)}(x)(h_2, \dots, h_{k+1}))'(a)(h_1)$$
$$= (x \longmapsto f^{(k)}(x) h_2 \cdots h_{k+1})'(a)(h_1) = f^{(k+1)}(a) h_1 \cdots h_{k+1}.$$

(e) Ćwiczenie. □

Twierdzenie 9.7.4 (Twierdzenie o symetrii wyższych różniczek). $f^{(k)}(a) \in \mathcal{L}_s^k(E,F)$. *W szczególności, jeżeli* $E = \mathbb{R}^n$, *to*

$$f^{(k)}(a)(h) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n:\ |\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha, \quad h \in \mathbb{R}^n,$$

gdzie dla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ *i* $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$: $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$, $h^\alpha := h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n}$ $(0^0 := 1)$, $D^\alpha f(a) := (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \circ \dots \circ (\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n} f(a)$. *Zauważmy, że wobec symetrii różniczki, operator* $\mathcal{D}^k(\Omega, F; a) \ni f \longmapsto D^\alpha f(a)$ *jest poprawnie określony.*

Dowód. Zastosujemy indukcję ze względu na k. Przypadek $k = 2$ został rozwiązany w Twierdzeniu 9.5.6. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $k-1$ i niech σ będzie dowolną permutacją k elementową.

Przypadek $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(j) = j$, $j = 3, \dots, k$, redukuje się do przypadku $k = 2$:

$$f^{(k)}(a)(h_2, h_1, h_3, \dots, h_k) = (x \longmapsto f^{(k-2)}(x)(h_3, \dots, h_k))''(a)(h_2, h_1)$$
$$= (x \longmapsto f^{(k-2)}(x)(h_3, \dots, h_k))''(a)(h_1, h_2) = f^{(k)}(a)(h_1, h_2, h_3, \dots, h_k).$$

Przypadek $\sigma(1) = 1$ wynika z założenia indukcyjnego:

$$f^{(k)}(a)(h_1, h_{\sigma(2)}, \dots, h_{\sigma(k)}) = (x \longmapsto f^{(k-1)}(x)(h_{\sigma(2)}, \dots, h_{\sigma(k)}))'(a)(h_1)$$
$$= (x \longmapsto f^{(k-1)}(x)(h_2, \dots, h_k))'(a)(h_1) = f^{(k)}(a)(h_1, h_2, \dots, h_k).$$

Pozostałe przypadki wynikają z faktu, iż każda permutacja jest złożeniem pewnej liczby permutacji powyższych dwóch typów (por. dowód Wniosku 9.1.12). □

Twierdzenie 9.7.5 (Wzór Leibniza). *Niech* $f \in \mathcal{D}^k(\Omega, F; a)$, $g \in \mathcal{D}^k(\Omega, G; a)$ *i* $B \in \mathcal{L}(F, G; H)$. *Wtedy* $B(f,g) \in \mathcal{D}^k(\Omega, H; a)$ *oraz*

(†) $(B(f,g))^{(k)}(a)(h) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B(f^{(j)}(a)(h), g^{(k-j)}(a)(h))$, $h \in E$;

(‡) $(B(f,g))^{(k)}(a)(h_1, \dots, h_k) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{\sigma \in S_{j,k-j}} B\big(f^{(j)}(a)(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(j)}), g^{(k-j)}(a)(h_{\sigma(j+1)}, \dots, h_{\sigma(k)})\big)$, $h_1, \dots, h_k \in E$, *gdzie przypomnijmy (Obserwacja 9.6.6)* $S_{j,k-j} = \{\sigma \in S_k : \sigma(1) < \dots < \sigma(j),\ \sigma(j+1) < \dots < \sigma(k)\}$.

Dowód. Rozumujemy indukcyjnie. Przypadek $k = 1$ jest dobrze znany.

$k \rightsquigarrow k+1$: Wiemy, że $(B(f,g))' = B_1(f',g) + B_2(f,g')$, gdzie B_1 i B_2 są operatorami dwuliniowymi i ciągłymi takimi, jak w dowodzie Twierdzenia 9.5.10. W takim razie, na podstawie założenia indukcyjnego, $(B(f,g))' \in \mathcal{D}^k(\Omega, \mathcal{L}(E,H); a)$, a stąd $B(f,g) \in \mathcal{D}^{k+1}(\Omega, H; a)$. Indukcyjny dowód pierwszego z wzorów pozostawiamy jako Ćwiczenie.

Aby dostać (‡) możemy oczywiście zastosować wzór polaryzacyjny (Twierdzenie 9.6.5), ale można prościej. Wystarczy zastosować Obserwację 9.6.6 do każdego z odwzorowań k-liniowych

$$E^k \ni (h_1, \dots, h_k) \xmapsto{W} \binom{k}{j} B\big(f^{(j)}(a)(h_1, \dots, h_j), g^{(k-j)}(a)(h_{j+1}, \dots, h_k)\big) \in F,$$

przy $\beta_1 := j$, $\beta_2 := k - j$ — Ćwiczenie. □

Twierdzenie 9.7.6. *Niech G będzie przestrzenią unormowaną, niech $U \subset G$ będzie zbiorem otwartym, niech $\varphi : U \longrightarrow E$ i niech $t_0 \in U$. Załóżmy, że $\varphi \in \mathcal{D}^k(U, E; t_0)$, $f \in \mathcal{D}^k(\Omega, F; \varphi(t_0))$ i $\varphi(U) \subset \Omega$. Wtedy $f \circ \varphi \in \mathcal{D}^k(U, F; t_0)$.*

Dowód. Przypadek $k = 1$ jest dobrze znany.

$k \rightsquigarrow k+1$: Korzystamy ze wzoru $(f \circ \varphi)' = B(f' \circ \varphi, \varphi')$, gdzie B jest operatorem składania odwzorowań tak, jak w dowodzie Twierdzenia 9.5.11. Dalej rozumujemy standardowo. □

Definicja 9.7.7 (Ćwiczenie). W standardowy sposób definiujemy przestrzenie $\mathcal{D}^k(\Omega, F)$, $\mathcal{D}^k_b(\Omega, F)$, $\mathcal{C}^{k,\alpha}_b(\Omega, F)$, $\mathcal{C}^k(\Omega, F)$, $\mathcal{C}^k_b(\Omega, F)$ oraz normy $\|f\|_{\Omega,k} := \sum_{j=0}^{k} \|f^{(j)}\|_\Omega$, $f \in \mathcal{D}^k_b(\Omega, F)$, $\|f\|_{\Omega,k,\alpha} := \|f\|_{\Omega,k} + |f^{(k)}|_\alpha$, $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_b(\Omega, F)$. W przyszłości będziemy również korzystać z przestrzeni

$$\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega, F) := \{f \in \mathcal{C}^k(\Omega, F) : f^{(k)} \text{ spełnia lokalnie warunek Höldera z wykładnikiem } \alpha\}.$$

Obserwacja 9.7.8 (Ćwiczenie). (a) $f' \in \mathcal{C}^{k-1}(\Omega, \mathcal{L}(E,F)) \iff f \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$.

(b) Jeżeli $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$, $g \in \mathcal{C}^k(\Omega, G)$ i $B \in \mathcal{L}(F, G; H)$, to $B(f,g) \in \mathcal{C}^k(\Omega, H)$.

(c) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{C}^k(U, E)$ i $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$, to $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^k(U, F)$.

(d) Jeżeli Ω jest ograniczony, to dla $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$ mamy $|\ |_\beta \leqslant C|\ |_\alpha$, gdzie $C := (\operatorname{diam} \Omega)^{\alpha-\beta}$. W szczególności, jeżeli Ω jest ograniczony, to dla $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$ mamy: $\mathcal{C}^{k,\alpha}_b(\Omega, F) \subset \mathcal{C}^{k,\beta}_b(\Omega, F)$ oraz $\|\ \|_{\Omega,k,\beta} \leqslant C\|\ \|_{\Omega,k,\alpha}$, gdzie $C := \max\{1, (\operatorname{diam} \Omega)^{\alpha-\beta}\}$.

(e) Jeżeli Ω jest wypukły, to $\mathcal{D}^{k+1}_b(\Omega, F) \subset \mathcal{C}^{k,1}_b(\Omega, F)$ oraz $\|\ \|_{\Omega,k,1} \leqslant \|\ \|_{\Omega,k+1}$ (wystarczy skorzystać z twierdzenia o przyrostach skończonych).

(f) Dla $f \in \mathcal{B}(\Omega, F)$ mamy: $f \in \mathcal{C}^{k+1,\alpha}_b(\Omega, F) \iff f' \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_b(\Omega, \mathcal{L}(E,F))$. Ponadto, $\|f\|_{\Omega,k+1,\alpha} = \|f\|_{\Omega,0} + \|f'\|_{\Omega,k,\alpha}$.

(g) $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega, F) = \{f \in \mathcal{C}^k(\Omega, F) : \forall_{a \in \Omega}\ \exists_{U_a} : f|_{U_a} \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_b(U_a, F)\}$.

Twierdzenie 9.7.9. *Załóżmy, że Ω jest ograniczony i wypukły.*

(a) *Niech $B \in \mathcal{L}(F, G; H)$, $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_b(\Omega, F)$, $g \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_b(\Omega, G)$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}_0$. Wtedy $B(f,g) \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_b(\Omega, H)$.*

(b) *Niech $U \subset G$ będzie otwarty wypukły i ograniczony, $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_b(\Omega, F)$, $\varphi \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_b(U, E)$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(U) \subset \Omega$. Wtedy $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_b(U, F)$*

Dowód. (a) Indukcja względem k (przy dowolnych pozostałych elementach). Dla $k = 0$ mamy:

$$\frac{\|B(f(x), g(x)) - B(f(y), g(y))\|}{\|x-y\|^\alpha} \leqslant \frac{\|B(f(x) - f(y), g(y))\| + \|B(f(y), g(x) - g(y)\|}{\|x-y\|^\alpha} \leqslant \|B\|(|f|_\alpha \|g\|_{\Omega,0} + \|f\|_{\Omega,0}|g|_\alpha).$$

Dla dowodu $k \rightsquigarrow k+1$ mamy $(B(f,g))' = B_1(f',g) + B_2(f,g')$ przy standardowej interpretacji operatorów dwuliniowych

$$B_1 : \mathcal{L}(E,F) \times G \longrightarrow \mathcal{L}(E,H), \quad B_2 : F \times \mathcal{L}(E,G) \longrightarrow \mathcal{L}(E,H).$$

Zauważmy, że $f' \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_b(\Omega, \mathcal{L}(E,F))$, $g \in \mathcal{C}^{k,1}_b(\Omega, F) \subset \mathcal{C}^{k,\alpha}_b(\Omega, F)$. Korzystając z założenia indukcyjnego wnioskujemy, że $B_1(f',g) \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_b(\Omega, \mathcal{L}(E,G))$. Analogicznie dowodzimy, że $B_2(f,g') \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_b(\Omega, \mathcal{L}(E,G))$. W takim razie $(B(f,g))' \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_b(\Omega, \mathcal{L}(E,G))$, co daje $B(f,g) \in \mathcal{C}^{k+1,\alpha}_b(\Omega, G)$.

(b) Niech $B : \mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(G,E) \ni (A,B) \longmapsto A \circ B \in \mathcal{L}(G,F)$.

Dla $k = 1$ mamy $(f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi) \circ \varphi' = B(f' \circ \varphi, \varphi')$. Wiemy, że $f' \in \mathcal{C}_b^{0,\alpha}(\Omega, \mathcal{L}(E,F))$, $\varphi \in \mathcal{C}_b^{0,1}(U,E)$ oraz $\varphi' \in \mathcal{C}_b^{0,\alpha}(U, \mathcal{L}(G,E))$. Łatwo widać, że $f' \circ \varphi \in \mathcal{C}_b^{0,\alpha}(U, \mathcal{L}(E,F))$ (por. Twierdzenie 4.6.12(b)). Na podstawie (a), $B(f' \circ \varphi, \varphi') \in \mathcal{C}_b^{0,\alpha}(U, \mathcal{L}(G,F))$, a stąd $f \circ \varphi \in \mathcal{C}_b^{1,\alpha}(U,F)$.

Dla dowodu kroku indukcyjnego $k \rightsquigarrow k+1$ Wiemy, że $f' \in \mathcal{C}_b^{k,\alpha}(\Omega, \mathcal{L}(E,F))$, $\varphi \in \mathcal{C}_b^{k,1}(U,E)$ oraz $\varphi' \in \mathcal{C}_b^{k,\alpha}(U, \mathcal{L}(G,E))$. Na podstawie założenie indukcyjnego mamy $f' \circ \varphi \in \mathcal{C}_b^{k,\alpha}(U, \mathcal{L}(E,F))$, Wobec (a), $B(f' \circ \varphi, \varphi') \in \mathcal{C}_b^{k,\alpha}(U, \mathcal{L}(G,F))$, a stąd $f \circ \varphi \in \mathcal{C}_b^{k+1,\alpha}(U,F)$. □

Wniosek 9.7.10. (a) *Niech $B \in \mathcal{L}(F,G;H)$, $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega,F)$, $g \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega,G)$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}_0$. Wtedy $B(f,g) \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega,H)$.*

(b) *Niech $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega,F)$, $\varphi \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(U,E)$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(U) \subset \Omega$. Wtedy $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(U,F)$*

Teraz przychodzi kolej na uogólnienie twierdzenia o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie (por. Twierdzenie 6.10.1).

Twierdzenie 9.7.11 (Twierdzenie o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie). *Niech $D \subset E$ będzie obszarem takim, że ϱ_D^i jest funkcją ograniczoną (np. D jest ograniczonym obszarem gwiaździstym) i niech F będzie przestrzenią Banacha.*

(a) *Załóżmy, że mamy rodzinę $(f_i)_{i \in I} \subset \mathcal{D}^k(D,F)$ taką, że:*

- *$(f_i^{(k)})_{i \in I}$ jest rodziną jednostajnie sumowalną na D,*
- *dla dowolnego $j \in \{0,\dots,k-1\}$ istnieje punkt $c_j \in D$ taki, że rodzina $(f_i^{(j)}(c_j))_{i \in I}$ jest sumowalna.*

Wtedy dla dowolnego $j \in \{0,\dots,k-1\}$ rodzina $(f_i^{(j)})_{i \in I}$ jest jednostajnie sumowalna na D i jeżeli $g_j := \sum_{i \in I} f_i^{(j)}$, to $g_0 \in \mathcal{D}^k(D,F)$ oraz $g_0^{(j)} = g_j$, $j = 1,\dots,k$, czyli $\big(\sum_{i \in I} f_i\big)^{(j)} = \sum_{i \in I} f_i^{(j)}$, $j = 1,\dots,k$.

(b) *Załóżmy, że ciąg $(f_n)_{n=0}^\infty \subset \mathcal{D}^k(D,F)$ jest taki, że:*

- *szereg $\sum_{n=0}^\infty f_n^{(k)}$ jest zbieżny jednostajnie na D,*
- *dla dowolnego $j \in \{0,\dots,k-1\}$ istnieje punkt $c_j \in D$ taki, że szereg $\sum_{n=0}^\infty f_n^{(j)}(c_j)$ jest zbieżny.*

Wtedy dla dowolnego $j \in \{0,\dots,k-1\}$ szereg $\sum_{n=0}^\infty f_n^{(j)}$ jest zbieżny jednostajnie na D i jeżeli $g_j := \sum_{n=0}^\infty f_n^{(j)}$, to $g_0 \in \mathcal{D}^k(D,F)$ oraz $g_0^{(j)} = g_j$, $j = 1,\dots,k$, czyli $\big(\sum_{n=0}^\infty f_n\big)^{(j)} = \sum_{n=0}^\infty f_n^{(j)}$, $j = 1,\dots,k$.

(c) *Załóżmy, że ciąg $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}^k(D,F)$ jest taki, że:*

- *ciąg $(f_n^{(k)})_{n=1}^\infty$ jest zbieżny jednostajnie na D,*
- *dla dowolnego $j \in \{0,\dots,k-1\}$ istnieje punkt $c_j \in D$ taki, że ciąg $(f_n^{(j)}(c_j))_{n=1}^\infty$ jest zbieżny.*

Wtedy dla dowolnego $j \in \{0,\dots,k-1\}$ ciąg $(f_n^{(j)})_{n=1}^\infty$ jest zbieżny jednostajnie na D i jeżeli $g_j := \lim_{n\to+\infty} f_n^{(j)}$, to $g_0 \in \mathcal{D}^k(D,F)$ oraz $g_0^{(j)} = g_j$, $j = 1,\dots,k$, czyli $\big(\lim_{n\to+\infty} f_n\big)^{(j)} = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(j)}$, $j = 1,\dots,k$.

Dowód. Ćwiczenie. □

Wniosek 9.7.12. *Jeżeli F jest Banacha, to $\mathcal{D}_b^k(\Omega,F)$, $\mathcal{C}_b^{k,\alpha}(\Omega,F)$, $\mathcal{C}_b^k(\Omega,F)$ są Banacha.*

Dowód. Ćwiczenie. □

9.8. Wzór Taylora

Niech E i F będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{K}$, niech $\Omega \in \operatorname{top} E$, $f : \Omega \longrightarrow F$, $a \in \Omega$ i załóżmy, że $f \in \mathcal{D}^k(\Omega,F;a)$ (dla pewnego $k \in \mathbb{N}$).

Definicja 9.8.1. Definiujemy *k-tą resztę odwzorowania f w punkcie a*:

$$R_k(f,a,x) := f(x) - \Big(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)\Big), \quad x \in \Omega.$$

Ponadto przyjmujemy $R_0(f,a,x) := f(x) - f(a)$.

Obserwacja 9.8.2. (a) $f(a+h) = f(a) + f'(a)(h) + \frac{1}{2}f''(a)(h) + \dots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(h) + R_k(f,a,a+h)$, $h \in \Omega - a$.

(b) Dla $k \geqslant 2$, funkcja $R_k(f,a,\cdot)$ jest różniczkowalna w pewnym otoczeniu U punktu a oraz

$$R_k(f,a,\cdot)'(x) = R_{k-1}(f',a,x), \quad x \in U.$$

Istotnie, jeżeli $f \in \mathcal{D}(U,F)$, to na podstawie Obserwacji 9.7.2 mamy:

$$\begin{aligned} R_k(f,a,\cdot)'(x)(h) &= f'(x)(h) - \Big(f'(a)(h) + 2\cdot\tfrac{1}{2}f''(a)(x-a,h) + \dots + k\cdot\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a,\dots,x-a,h)\Big) \\ &= R_{k-1}(f',a,x)(h), \quad x \in U. \end{aligned}$$

Twierdzenie 9.8.3 (Wzór Taylora)**.** (a) (Wzór Taylora z resztą Peano.) *Jeżeli $f^{(k)}(a)$ istnieje, to*

$$\lim_{h\to 0}\frac{R_k(f,a,a+h)}{\|h\|^k} = 0.$$

(b) (Wzór Taylora dla funkcji klasy $\mathcal{C}^k$.) *Jeżeli $f \in \mathcal{C}^k(\Omega,F)$, to dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \Omega$ mamy:*

$$\lim_{\delta\to 0}\sup\Big\{\frac{\|R_k(f,a,a+h)\|}{\|h\|^k} : a \in K,\ 0 < \|h\| \leqslant \delta\Big\} = 0.$$

(c) (Wzór Taylora dla funkcji klasy $\mathcal{C}^{k,\alpha}$.)
Jeżeli $f \in \mathcal{C}^k(\Omega,F)$ i $|f^{(k)}|_\alpha < +\infty$, to

$$\frac{\|R_k(f,a,a+h)\|}{\|h\|^{k+\alpha}} \leqslant |f^{(k)}|_\alpha, \quad [a,a+h] \subset \Omega.$$

W szczególności, dla dowolnego zbioru $A \subset \Omega$ takiego, że $A + B(r) \subset \Omega$ dla pewnego $r > 0$ (np. dla dowolnego zbioru zwartego) mamy

$$\lim_{r>\delta\to 0+}\sup\Big\{\frac{\|R_k(f,a,a+h)\|}{\|h\|^{k+\beta}} : a \in A,\ 0 < \|h\| \leqslant \delta\Big\} = 0, \quad 0 < \beta < \alpha.$$

(d) (Wzór Taylora dla funkcji klasy $\mathcal{D}^{k+1}$.) *Załóżmy, że Ω jest gwiaździsty względem a, $f \in \mathcal{D}^{k+1}(\Omega,F)$ oraz $\|f^{(k+1)}(x)\| \leqslant M$, $x \in \Omega$. Wtedy*

$$\|R_k(f,a,a+h)\| \leqslant \frac{M\|h\|^{k+1}}{(k+1)!}, \quad h \in \Omega - a, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Dowód. We wszystkich przypadkach zastosujemy indukcję względem k (przy dowolnych pozostałych elementach).

(a) Przypadek $k = 1$ jest oczywisty.

$k \rightsquigarrow k+1$: Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, dla małych $0 \neq h \in \Omega - a$ mamy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|h\|^{k+1}}\|R_{k+1}(f,a,a+h)\| &= \frac{1}{\|h\|^{k+1}}\|R_{k+1}(f,a,a+h) - R_{k+1}(f,a,a)\| \\ &\leqslant \frac{1}{\|h\|^k}\sup\{\|R_{k+1}(f,a,\cdot)'(x)\| : x \in [a,a+h]\} = \frac{1}{\|h\|^k}\sup\{\|R_k(f',a,a+\xi)\| : \xi \in [0,h]\} \\ &\leqslant \sup\Big\{\frac{1}{\|\xi\|^k}\|R_k(f',a,a+\xi)\| : \xi \in (0,h]\Big\} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

(b) Przypadek $k = 1$ wynika z twierdzenia o przyrostach skończonych. Istotnie, dla $0 < \delta < \operatorname{dist}(K,\partial\Omega)$ mamy:

$$\begin{aligned} &\sup\Big\{\frac{\|R_1(f,a,a+h)\|}{\|h\|} : a \in K,\ 0 < \|h\| \leqslant \delta\Big\} \\ &= \sup\Big\{\frac{\|f(a+h) - f(a) - f'(a)(h)\|}{\|h\|} : a \in K,\ 0 < \|h\| \leqslant \delta\Big\} \\ &\leqslant \sup\{\|f'(x) - f'(a)\| : a \in K,\ x \in [a,a+h],\ 0 < \|h\| \leqslant \delta\} \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

(ostatni fakt wynika z jednostajnej ciągłości funkcji f' na K — por. Twierdzenie 4.4.9).

$k \rightsquigarrow k+1$: Na podstawie dowodu (a), dla małych $\delta > 0$, mamy:

$$\sup\Big\{\frac{\|R_{k+1}(f,a,a+h)\|}{\|h\|^{k+1}} : a \in K,\ 0 < \|h\| \leqslant \delta\Big\}$$
$$\leqslant \sup\Big\{\frac{\|R_k(f',a,a+\xi)\|}{\|\xi\|^k} : a \in K,\ 0 < \|\xi\| \leqslant \delta\Big\} \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

(c) Dla $k = 0$ wystarczy skorzystać z definicji $|f|_\alpha$.

Dla dowodu $k \rightsquigarrow k+1$ mamy:

$$\frac{\|R_{k+1}(f,a,a+h)\|}{\|h\|^{k+1+\alpha}} \leqslant \frac{\sup\{\|R_k(f',a,a+\xi)\| : \xi \in (0,h]\}}{\|h\|^{k+\alpha}}$$
$$\leqslant \frac{\sup\{|(f')^{(k)}|_\alpha \|\xi\|^{k+\alpha} : \xi \in (0,h]\}}{\|h\|^{k+\alpha}} \leqslant |f^{(k+1)}|_\alpha.$$

(d) Przypadek $k = 0$ wynika z twierdzenia o przyrostach skończonych.

$k \rightsquigarrow k+1$: Mamy $\|R_k(f',a,a+h)\| \leqslant \frac{M\|h\|^{k+1}}{(k+1)!}$, $h \in \Omega - a$. Ustalmy $h \in \Omega - a$ i niech

$$g(t) := R_{k+1}(f,a,a+th), \quad \varphi(t) := \frac{M\|h\|^{k+2}t^{k+2}}{(k+2)!}, \quad t \in [0,1].$$

Wobec poprzedniej nierówności mamy

$$\|g'(t)\| = \|R_{k+1}(f,a,\cdot)'(a+th)(h)\| = \|R_k(f',a,a+th)(h)\| \leqslant \frac{M\|th\|^{k+1}}{(k+1)!}\|h\| = \varphi'(t), \quad t \in [0,1].$$

Stąd, na podstawie zwykłego twierdzenia o przyrostach skończonych,

$$\|R_{k+1}(f,a,a+h)\| = \|g(1)-g(0)\| \leqslant \varphi(1) - \varphi(0) = \frac{M\|h\|^{k+2}}{(k+2)!}. \qquad \square$$

Wniosek 9.8.4 (Jednoznaczność wzoru Taylora)**.** *Jeżeli $f^{(k)}(a)$ istnieje, $Q = Q_0 + \dots + Q_k \in \underline{\mathcal{P}}_k(E,F)$ oraz $f(a+h) = Q(h) + o(\|h\|^k)$, przy $\longrightarrow 0$, to $Q_j = \frac{1}{j!}f^{(j)}(a)$, $j = 0,\dots,k$.*

Dowód. Na podstawie wzoru Taylora z resztą Peano, mamy:

$$f(a) + f'(a)(h) + \tfrac{1}{2}f''(a)(h) + \dots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(h)$$
$$= Q_0(h) + Q_1(h) + Q_2(h) + \dots + Q_k(h) + o(\|h\|^k), \quad \text{przy } h \longrightarrow 0.$$

Ustalmy $h \in E$. Zastępując w powyższym wzorze h przez th ($t \in \mathbb{R}$) dostajemy

$$f(a) + f'(a)(h)t + \tfrac{1}{2}f''(a)(h)t^2 + \dots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(h)t^k$$
$$= Q_0(h) + Q_1(h)t + Q_2(h)t^2 + \dots + Q_k(h)t^k + o(t^k), \quad \text{przy } t \longrightarrow 0,$$

skąd natychmiast wynika, że $Q_j(h) = \frac{1}{j!}f^{(j)}(a)(h)$, $j = 0,\dots,k$ (por. dowód Twierdzenia 5.6.5). $\square$

Obserwacja 9.8.5. Jeżeli $f : \Omega \longrightarrow F$ jest taka, że $f(a+h) = Q(h) + o(\|h\|^k)$, przy $\longrightarrow 0$, pewnego wielomianu $Q = Q_0 + \dots + Q_k \in \mathcal{P}_k(E,F)$ ($k \geqslant 1$), to Q_j nazywamy *j-tą różniczką Peano odwzorowania f w punkcie a*, $j = 0,\dots,k$. Oczywiście, wtedy $Q_0 = f(a)$, $f'(a)$ istnieje i $Q_1 = f'(a)$. Wiemy również, $f^{(j)}(a)$ dla $1 \leqslant j \leqslant k$ nie musi istnieć (Obserwacja 5.6.6).

Twierdzenie 9.8.6 (Wzór na k–tą pochodną złożenia)**.** *Niech E, F, G będą przestrzeniami unormowanymi, niech $U \subset G$, $\Omega \subset E$ będą zbiorami otwartymi i niech $t_0 \in U$. Załóżmy, że $\varphi \in \mathcal{D}^k(U,E;t_0)$, $\varphi(U) \subset \Omega$, $f \in \mathcal{D}^k(\Omega,F;\varphi(t_0))$. Wtedy (por. Twierdzenie 5.6.12):*

$$(\dagger)\ (f\circ\varphi)^{(k)}(t_0)(\xi) = \sum_{\alpha\in\Pi_k}\frac{k!}{\alpha!}$$
$$f^{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)}(\varphi(t_0))\Big(\underbrace{\frac{\varphi'(t_0)(\xi)}{1!},\dots,\frac{\varphi'(t_0)(\xi)}{1!}}_{\alpha_1\times},\dots,\underbrace{\frac{\varphi^{(k)}(t_0)(\xi)}{k!},\dots,\frac{\varphi^{(k)}(t_0)(\xi)}{k!}}_{\alpha_k\times}\Big),\ \xi \in G;$$

(‡) $(f\circ\varphi)^{(k)}(t_0)(\xi_1,\dots,\xi_k)=\sum_{\alpha\in\Pi_k}\dfrac{1}{\alpha!}$
$\sum_{\sigma\in S_{\beta(\alpha)}}\varPhi_\alpha(\xi_{\sigma(1)},\dots,\xi_{\sigma(k)}),\quad (\xi_1,\dots,\xi_k)\in G^k$, *gdzie*

- $\beta(\alpha):=(\underbrace{1,\dots,1}_{\alpha_1\times},\underbrace{2,\dots,2}_{\alpha_2\times},\dots,\underbrace{k,\dots,k}_{\alpha_k\times})$ *(zob. Obserwacja 9.6.6 z $\ell=\alpha_1+\dots+\alpha_k$),*
- $\varPhi_\alpha(\xi_1,\dots,\xi_k):=f^{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)}(\varphi(t_0))\big(\varphi'(t_0)(\xi_1),\dots,\varphi'(t_0)(\xi_{\alpha_1}),\dots,\varphi^{(k)}(t_0)(\xi_1,\dots,\xi_k)\big)$.

Pamiętamy, że $\alpha_1+2\alpha_2+\dots+k\alpha_k=k$. Oczywiście, jeżeli $\alpha_i=0$, to w $\beta(\alpha)$ pomijamy odpowiednią grupę. Jeżeli $\alpha_k\neq 0$, to $\alpha_1=\dots=\alpha_{k-1}=0$, $\alpha_k=1$. Zauważmy, że $\#S_{\beta(\alpha)}=\frac{k!}{\prod_{i=1}^k (i!)^{\alpha_i}}$ — Ćwiczenie.

Dowód. Skorzystamy z Wniosku 9.8.4 (podobnie, jak dla jednej zmiennej). Przyjmijmy oznaczenia:

$$\varphi_j:=\frac{1}{j!}\varphi^{(j)}(t_0),\ a:=\varphi(t_0),\ f_j:=\frac{1}{j!}f^{(j)}(a),\quad j=0,\dots,k.$$

Mamy: $f(a+h)=\sum_{i=0}^k f_i(h)+\alpha(h)\|h\|^k$, $\varphi(t_0+\xi)=\sum_{j=0}^k\varphi_j(\xi)+\beta(\xi)\|\xi\|^k$, gdzie $\lim_{h\to0}\alpha(h)=0$, $\lim_{\xi\to0}\beta(\xi)=0$. Korzystając z Wniosku 9.8.4 wystarczy wyznaczyć wielomian jednorodny stopnia k w rozwinięciu $(f\circ\varphi)(t_0+\xi)$. Liczymy:

$$(f\circ\varphi)(t_0+\xi)=\sum_{i=0}^k f_i\Big(\sum_{j=1}^k\varphi_j(\xi)+\beta(\xi)\|\xi\|^k\Big)+\alpha\big(\varphi(t_0+\xi)-\varphi(t_0)\big)\Big\|\sum_{j=1}^k\varphi_j(\xi)+\beta(\xi)\|\xi\|^k\Big\|^k$$

$$=\sum_{i=0}^k f_i\Big(\sum_{j=1}^k\varphi_j(\xi)\Big)+o(\|\xi\|^k)$$

$$=\sum_{i=0}^k\sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{N}_0\\ \alpha_1+\dots+\alpha_k=i}}\frac{i!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}\,f_i\Big(\underbrace{\varphi_1(\xi),\dots,\varphi_1(\xi)}_{\alpha_1\times},\dots,\underbrace{\varphi_k(\xi),\dots,\varphi_k(\xi)}_{\alpha_k\times}\Big)+o(\|\xi\|^k)$$

$$=\sum_{\nu=0}^k\Big(\sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{N}_0\\ \alpha_1+2\alpha_2+\dots+k\alpha_k=\nu}}\frac{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_k!}f_{\alpha_1+\dots+\alpha_k}\Big(\underbrace{\varphi_1(\xi),\dots,\varphi_1(\xi)}_{\alpha_1\times},\dots,\underbrace{\varphi_k(\xi),\dots,\varphi_k(\xi)}_{\alpha_k\times}\Big)+o(\|\xi\|^k).$$

Dla dowodu (‡), postąpimy podobnie jak w dowodzie wzoru Leibniza (Twierdzenie 9.7.5) i zastosujemy Obserwację 9.6.6 do każdego z odwzorowań

$$G^k\ni(\xi_1,\dots,\xi_k)\overset{W}{\longmapsto}\frac{k!}{\alpha!}f^{(\alpha_1+\dots+\alpha_k)}(\varphi(t_0))\Big(\frac{\varphi'(t_0)(\xi_1)}{1!},\dots,\frac{\varphi'(t_0)(\xi_{\alpha_1})}{1!},\dots,\frac{\varphi^{(k)}(t_0)(\xi_1,\dots,\xi_k)}{k!}\Big)\in F$$

przy $\beta:=\beta(\alpha)$ — Ćwiczenie. □

9.9. Szereg Taylora

Definicja 9.9.1. Niech F będzie przestrzenią Banacha i niech $f:\varOmega\longrightarrow F$. Załóżmy, że dla pewnego $a\in\varOmega$ pochodna $f^{(k)}(a)$ istnieje dla dowolnego $k\in\mathbb{N}$. Wtedy definiujemy *szereg Taylora funkcji f w punkcie a*

$$(T_af)(x):=\sum_{\nu=0}^\infty\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(a)(x-a);$$

$(T_af)(a+h)$ jest szeregiem wielomianów jednorodnych zmiennej h.

Twierdzenie 9.9.2 (Borel, por. Twierdzenie 6.12.3)**.** *Niech $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ będzie rzeczywistą przestrzenią unitarną (np. $\mathbb{R}^n$ ze zwykłym iloczynem skalarnym), zaś F — przestrzenią Banacha. Wtedy, dla dowolnego ciągu wielomianów jednorodnych $Q_\nu\in\mathcal{H}^\nu(E,F)$, $\nu\in\mathbb{N}_0$, istnieje funkcja $f\in\mathcal{C}^\infty(E,F)$ taka, że*

$$T_0f(x)=\sum_{\nu=0}^\infty Q_\nu(x),\ \ \textit{czyli}\ \frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(0)=Q_\nu,\ \nu\in\mathbb{N}_0.$$

Dowód. Na wstępie zauważmy, że

(*) wystarczy udowodnić, że dla dowolnego $N \in \mathbb{N}_0$ istnieje funkcja $g_N \in \mathcal{C}^\infty(E,F) \cap \mathcal{D}_b^N(E,F)$ taka, że $g_N = 0$ w pewnym otoczeniu zera oraz $\|Q_{N+1} - g_N\|_{E,N} \leqslant \frac{1}{2^N}$ ((*) pozostaje prawdziwa dla dowolnej przestrzeni unormowanej E).

Istotnie, jeżeli g_N, $N \in \mathbb{N}_0$, są takie jak w (*), to definiujemy, $f := Q_0 + \sum\limits_{N=0}^{\infty}(Q_{N+1} - g_N)$. Szereg jest zbieżny normalnie w $\mathcal{C}^k(E,F)$ dla dowolnego k. W takim razie $f \in \mathcal{C}^\infty(E,F)$. Oczywiście, $f(0) = Q_0$.

Dla dowolnego ν szereg $\sum\limits_{N=0}^{\infty}(Q_{N+1} - g_N)^{(\nu)}$ jest zbieżny jednostajnie na E. Na podstawie twierdzenia o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie, wynika stąd w szczególności, że

$$f^{(\nu)}(0) = \sum_{N=0}^{\infty}(Q_{N+1} - g_N)^{(\nu)}(0) = \sum_{N=0}^{\infty} Q_{N+1}^{(\nu)}(0) = \nu! Q_\nu, \quad \nu \in \mathbb{N} \ \text{ por. Obserwacja 9.7.2(b).}$$

Teraz pokażemy, że dla znalezienia funkcji g_N wystarczy mieć funkcję $\varphi \in \mathcal{C}_b^\infty(E,[0,1])$ taką, że $\varphi(x) = 0$ dla $\|x\| \leqslant 1/2$, $\varphi(x) = 1$ dla $\|x\| \geqslant 1$ (ta część dowodu również pozostaje prawdziwa dla dowolnej przestrzeni unormowanej).

Istotnie, niech $C_k := \sup\{\|\varphi^{(k)}(x)\| : \|x\| \leqslant 1\}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Ustalmy $N \in \mathbb{N}_0$. Przypomnijmy, że

$$Q_{N+1}^{(\mu)}(a)(X) = \mu! \binom{N+1}{\mu} \widehat{Q}_{N+1}(\underbrace{a, \dots, a}_{(N+1-\mu)\times}, \underbrace{X, \dots, X}_{\mu\times}).$$

W szczególności, $\|Q_{N+1}^{(\mu)}(a)\| \leqslant \mu! \binom{N+1}{\mu} \|\widehat{Q}_{N+1}\| \|a\|^{N+1-\mu}$. Niech $M_\mu := \mu! \binom{N+1}{\mu} \|\widehat{Q}_{N+1}\|$, $\mu = 0, \dots, N+1$. Połóżmy $h_\varepsilon(x) := \varphi(x/\varepsilon) Q_{N+1}(x)$, $x \in E$, $\varepsilon > 0$. Wtedy dla $0 < \varepsilon \leqslant 1$, korzystając ze wzoru Leibniza (por. Twierdzenie 9.7.5), mamy

$$\begin{aligned}
&\|Q_{N+1} - h_\varepsilon\|_{E,N} = \|Q_{N+1} - h_\varepsilon\|_{B(\varepsilon),N} = \sum_{\nu=0}^{N} \sup_{\|x\| \leqslant \varepsilon} \Big\| \Big((1 - \varphi(\cdot/\varepsilon)) Q_{N+1} \Big)^{(\nu)}(x) \Big\| \\
&= \sum_{\nu=0}^{N} \sup_{\|x\| \leqslant \varepsilon,\ \|\xi\| \leqslant 1} \Big\| \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} (1 - \varphi(\cdot/\varepsilon))^{(\nu-\mu)}(x)(\xi) Q_{N+1}^{(\mu)}(x)(\xi) \Big\| \\
&= \sum_{\nu=0}^{N} \sup_{\|x\| \leqslant \varepsilon,\ \|\xi\| \leqslant 1} \Big\| - \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \binom{\nu}{\mu} \varphi^{(\nu-\mu)}(x/\varepsilon)(\xi) \varepsilon^{\mu-\nu} Q_{N+1}^{(\mu)}(x)(\xi) + (1 - \varphi(x/\varepsilon)) Q_{N+1}^{(\nu)}(x)(\xi) \Big\| \\
&\leqslant \sum_{\nu=0}^{N} \Big(\sum_{\mu=0}^{\nu-1} \binom{\nu}{\mu} C_{\nu-\mu} \varepsilon^{\mu-\nu} M_\mu \varepsilon^{N+1-\mu} + M_\nu \varepsilon^{N+1-\nu} \Big) \leqslant \varepsilon \sum_{\nu=0}^{N} \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} C_{\nu-\mu} M_\mu = \varepsilon \operatorname{const}(N).
\end{aligned}$$

Teraz jako g_N wystarczy wziąć h_ε ze stosownie małym ε.

Do znalezienia funkcji φ skorzystamy z unitarności przestrzeni E. Niech $E \ni x \overset{\Phi}{\longmapsto} \|x\|^2 = \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$. Mamy $\Phi'(a)(X) = 2\langle a, X \rangle$, $\Phi''(a)(X,X) = 2\langle X, X \rangle$, $\Phi^{(k)}(a) = 0$, $k \geqslant 3$. Niech $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, [0,1])$, $\psi(t) = 0$ dla $t \leqslant 1/4$, $\psi(t) = 1$ dla $t \geqslant 1$. Zdefiniujmy $\varphi(x) := \psi(\langle x, x \rangle) = \psi \circ \Phi(x)$, $x \in E$. Wtedy $\varphi(x) = 0$ dla $\|x\| \leqslant 1/2$, $\varphi(x) = 1$ dla $\|x\| \geqslant 1$ oraz $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(E, [0,1])$. Niech $C_k := \sup\{\|\varphi^{(k)}(x)\| : \|x\| \leqslant 1\}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Zauważmy, że $C_0 = 1$ oraz $C_k < +\infty$, $k \in \mathbb{N}$. Istotnie, niech $c_\ell := \sup\{|\psi^{(\ell)}(t)| : t \in \mathbb{R}\} < +\infty$. Dla $x, h \in E$, $\|x\| \leqslant 1$, $\|h\| \leqslant 1$, mamy

$$\begin{aligned}
&|\varphi^{(k)}(x)(h)| = |(\psi \circ \Phi)^{(k)}(x)(h)| = \Big| \sum_{\alpha \in \Pi_k} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_k!} \psi^{(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)}(\Phi(x)) \Big(\frac{\Phi'(x)(h)}{1!} \Big)^{\alpha_1} \cdots \Big(\frac{\Phi^{(k)}(x)(h)}{k!} \Big)^{\alpha_k} \Big| \\
&= \Big| \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}_0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = k}} \frac{k!}{\alpha_1! \alpha_2!} \psi^{(\alpha_1 + \alpha_2)}(\Phi(x)) \Big(\frac{2\langle x, h \rangle}{1!} \Big)^{\alpha_1} \Big(\frac{2\langle h, h \rangle}{2!} \Big)^{\alpha_2} \Big| \leqslant \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}_0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = k}} \frac{k!}{\alpha_1! \alpha_2!} c_{\alpha_1 + \alpha_2} 2^{\alpha_1} < +\infty. \quad \square
\end{aligned}$$

Twierdzenie 9.9.3 (Twierdzenie Whitneya (8)). *Niech $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ będzie dowolną ośrodkową przestrzenią unitarną (np. $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym). Wtedy dla dowolnego zbioru domkniętego $S \subset E$ istnieje funkcja $f \in \mathcal{C}^\infty(E, \mathbb{R}_+)$ taka, że $S = f^{-1}(0)$ oraz $f^{(j)} = 0$ na S dla dowolnego $j \in \mathbb{N}_0$.*

Dowód. Możemy założyć, że $\varnothing \neq S \neq E$. Niech $\Phi(x) := \langle x, x\rangle$, $x \in E$ i niech $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, [0,1])$ będzie dowolną funkcją taką $\psi = 1$ na $[0, 1/2]$ oraz $[0, 1) = \{x \in \mathbb{R}_+ : \psi(x) > 0\}$. Zdefiniujmy $\varphi := \psi \circ \Phi$ (por. dowód Twierdzenia 9.9.2). Niech $C_j := \sup\{\|\varphi^{(j)}(x)\| : \|x\| \leqslant 1\}$, $j \in \mathbb{N}_0$. Ponieważ E jest ośrodkowa, zbiór $E \setminus S$ zawiera podzbiór przeliczalny gęsty, powiedzmy $\{q_1, q_2, \dots\}$. Niech $d_k := \operatorname{dist}(q_k, S)$, $k \in \mathbb{N}$.

$$a_k := \frac{1}{2^k} \min\Big\{\frac{d_k^j}{C_j} : j \leqslant k\Big\}, \quad f(x) := \sum_{k=1}^\infty a_k\, \varphi\Big(\frac{x - q_k}{d_k}\Big), \quad x \in E.$$

Sprawdzamy, że f spełnia wszystkie wymagane warunki:

• $f \in \mathcal{C}^\infty(E, \mathbb{R}_+)$: Wystarczy pokazać, że dla dowolnego $j \in \mathbb{N}_0$, szereg $\sum_{k=1}^\infty a_k \Big|\Big(\varphi\big(\frac{\cdot - q_k}{d_k}\big)\Big)^{(j)}\Big|$ jest zbieżny jednostajnie w E. Mamy

$$\sum_{k=1}^\infty a_k \Big|\Big(\varphi\Big(\frac{\cdot - q_k}{d_k}\Big)\Big)^{(j)}(x)\Big| = \sum_{k=1}^\infty a_k \frac{1}{d_k^j} \Big|\varphi^{(j)}\Big(\frac{x - q_k}{d_k}\Big)\Big| \leqslant \sum_{k=1}^\infty a_k \frac{C_j}{d_k^j} \leqslant \sum_{k=1}^{j-1} a_k \frac{C_j}{d_k^j} + \sum_{k=j}^\infty \frac{1}{2^k}, \quad x \in E.$$

• $f(x) > 0$ dla $x \in E \setminus S$: Ustalmy punkt $x_0 \in E \setminus S$ i niech $B(x_0, 2r) \subset E \setminus S$ dla pewnego $0 < r < 1$. Weźmy dowolny punkt $q_{k_0} \in B(x_0, r)$. Wtedy $d_{k_0} > r$, a stąd $x_0 \in B(q_{k_0}, d_{k_0})$, a więc $f(x_0) \geqslant a_{k_0}\, \varphi(\frac{x_0 - q_{k_0}}{d_{k_0}}) > 0$.

• $f^{(j)} = 0$ na S dla dowolnego j: Jeżeli $x_0 \in S$, to $\|x_0 - q_k\| \geqslant d_k$, a więc $\varphi^{(j)}(\frac{x_0 - q_k}{d_k}) = 0$ dla dowolnego k, a stąd $f^{(j)}(x_0) = 0$. □

Z nazwiskiem Whitneya często łączy się następujące ważne twierdzenie.

Twierdzenie* 9.9.4 (Twierdzenie Whitneya, (9)). *Niech $S \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem domkniętym, $k \in \mathbb{N}$ i niech $S \ni a \overset{P}{\longmapsto} P_a \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n, F)$ będzie odwzorowaniem takim, że dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset S$ mamy:*

$$\sup\Big\{\frac{\|P_x^{(j)}(x) - P_a^{(j)}(x)\|}{\|x - a\|^{k-j}} : a, x \in K,\ 0 < \|x - a\| \leqslant \delta,\ j = 0, \dots, k\Big\} \underset{\delta \to 0+}{\longrightarrow} 0. \tag{†}$$

Wtedy istnieje odwzorowanie $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, F)$ takie, że $f^{(j)}(x) = P_x^{(j)}(x)$, $x \in S$, $j = 0, \dots, k$.

Warunek występujący w powyższym twierdzeniu można uznać z definicję funkcji klasy $\mathcal{C}^k$ na zbiorze domkniętym. Aby lepiej zrozumieć ten warunek udowodnimy następujące elementarne twierdzenie.

Twierdzenie 9.9.5. *Niech $\Omega \in \operatorname{top} \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ i $f : \Omega \longrightarrow F$. Wtedy $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie $\Omega \ni a \overset{P}{\longmapsto} P_a \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n, F)$ takie, że dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \Omega$ zachodzi (†). Ponadto,*

$$P_a(x) = \overset{(k)}{T_a} f(x) := \sum_{\nu=0}^k \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(a)(x - a), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{*}$$

W szczególności, $P_x(x) = f(x)$, $x \in \Omega$.

Dowód. Niech $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$. Dla $a \in \Omega$ niech P_a będzie dane wzorem (*). Oczywiście $P_a \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n, F)$ oraz $P_a(x) = f(x) - R_k(f; a, x)$ dla $x \in \Omega$. W szczególności, $P_a'(x) = f'(x) - R_{k-1}(f'; a, x) = \overset{(k-1)}{T_a} f'(x)$ i w konsekwencji $P_a^{(j)}(x) = \overset{(k-j)}{T_a} f^{(j)}(x)$, $x \in \Omega$, $j = 0, \dots, k$. Zauważmy, że $P_a^{(j)}(a) = f^{(j)}(a)$, $j = 0, \dots, k$. Stąd, dla $x \in \Omega$, dostajemy

$$P_x^{(j)}(x) - P_a^{(j)}(x) = f^{(j)}(x) - \overset{(k-j)}{T_a} f^{(j)}(x) = R_{k-j}(f^{(j)}; a, x).$$

---

(8) Hassler Whitney (1907–1989).

(9) Zob. H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer Verlag, Berlin, 1969, Theorem 3.1.14.

Teraz, wobec wzoru Taylora dla funkcji klasy $\mathcal{C}^k$ (Twierdzenie 9.8.3(b)), dla $K \subset\subset \Omega$ dostajemy (†).

Niech teraz odwzorowanie $\Omega \ni a \overset{P}{\longmapsto} P_a \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n, F)$ spełnia (†) dla dowolnego $K \subset\subset \Omega$. Pokażemy, że odwzorowanie $\Omega \ni x \overset{f}{\longmapsto} P_x(x) \in F$ jest klasy $\mathcal{C}^k$ i $\overset{(k)}{T}_a f = P_a$, $a \in \Omega$. Wobec (†) mamy

$$\|f(x) - f(a)\| = \|P_x(x) - P_a(a)\| \leqslant \frac{\|P_x(x) - P_a(x)\|}{\|x-a\|^k}\|x-a\|^k + \|P_a(x) - P_a(a)\| \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} 0,$$

skąd wynika, że $f \in \mathcal{C}(\Omega, F)$. Przypuśćmy, że już wiemy, że $f^{(j)}(x) = P_x^{(j)}(x)$, $x \in \Omega$, $j = 0, \dots, \ell$, dla pewnego $\ell \in \{0, \dots, k\}$. Teraz, korzystając z (†), wnioskujemy, że

$$\|f^{(\ell)}(x) - f^{(\ell)}(a)\| = \|P_x^{(\ell)}(x) - P_a^{(\ell)}(a)\| \leqslant \frac{\|P_x^{(\ell)}(x) - P_a^{(\ell)}(x)\|}{\|x-a\|^{k-\ell}}\|x-a\|^{k-\ell} + \|P_a^{(\ell)}(x) - P_a^{(\ell)}(a)\| \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} 0,$$

skąd wynika, że $f^{(\ell)}$ jest odwzorowaniem ciągłym. Ponadto, jeżeli $\ell \leqslant k-1$, to dla dowolnego $a \in \Omega$ i $h \in (\mathbb{R}^n)_*$ mamy

$$\begin{aligned}\frac{f^{(\ell)}(a+h) - f^{(\ell)}(a) - P_a^{(\ell+1)}(a)(h)}{\|h\|} &= \frac{P_{a+h}^{(\ell)}(a+h) - P_a^{(\ell)}(a) - P_a^{(\ell+1)}(a)(h)}{\|h\|} \\ &= \frac{P_{a+h}^{(\ell)}(a+h) - P_a^{(\ell)}(a+h)}{\|h\|^{k-\ell}}\|h\|^{k-\ell-1} + \frac{P_a^{(\ell)}(a+h) - P_a^{(\ell)}(a) - P_a^{(\ell+1)}(a)(h)}{\|h\|} \underset{h \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

(równości w przestrzeni $\mathcal{L}^\ell(\mathbb{R}^n, F)$). Oznacza to, że $f^{(\ell+1)}(a)$ istnieje i $f^{(\ell+1)}(a) = P_a^{(\ell+1)}(a)$. Teraz skończona indukcja względem ℓ kończy łatwo dowód. $\square$

9.10. Ekstrema lokalne

Niech E będzie przestrzenią unormowaną nad $\mathbb{K}$, niech $\Omega \in \operatorname{top} E$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \Omega$. Przypomnijmy pewne definicje.

Definicja 9.10.1. Powiemy, że f ma w punkcie a *minimum lokalne* (odp. *silne minimum lokalne*), jeżeli istnieje otoczenie $U \subset \Omega$ punktu a takie, że $f(x) \geqslant f(a)$ dla $x \in U$ (odp. $f(x) > f(a)$ dla $x \in U \setminus \{a\}$).

Zmieniając kierunki nierówności definiujemy *maksimum lokalne* i *silne maksimum lokalne*. Zamieniając f na $-f$ możemy zawsze ograniczyć nasze rozważania do minimów lokalnych.

Definicja 9.10.2. Niech $Q \in \underline{\mathcal{H}}^k(E, \mathbb{R})$. Powiemy, że:
- Q jest *nieujemnie określony (półokreślony dodatnio)*, jeżeli $Q(h) \geqslant 0$, $h \in E$,
- Q jest *dodatnio określony*, jeżeli $Q(h) > 0$, $h \in E_*$,
- Q jest *silnie dodatnio określony*, jeżeli istnieje stała $c > 0$ taka, że $Q(h) \geqslant c\|h\|^k$, $h \in E$.

Zmieniając kierunki nierówności definiujemy pojęcie *niedodatniej określoności (półokreśloności ujemnej)*, *ujemnej określoności* i *silnej ujemnej określoności* (10). Zamieniając Q na $-Q$ możemy zawsze ograniczyć nasze rozważania do dodatniej określoności.

Obserwacja 9.10.3. (a) Jeżeli k jest nieparzyste i $Q \neq 0$, to Q nie jest ani nieujemnie ani niedodatnio określony, czyli jest *nieokreślony*. Istotnie, jeżeli k jest nieparzyste, to $Q(-h) = -Q(h)$.

(b) Jeżeli E jest skończenie wymiarowa, to dodatnia określoność jest równoważna silnej dodatniej określoności. Tak nie musi być gdy $\dim E = \infty$ — Ćwiczenie. Istotnie, jeżeli E jest skończenie wymiarowa i Q jest dodatnio określony, to $c := \inf\{Q(h) : \|h\| = 1\} > 0$ (bo sfera jest zwarta) i dla $h \neq 0$ mamy $Q(h) = \|h\|^k Q(\frac{h}{\|h\|}) \geqslant c\|h\|^k$.

(c) Jeżeli $E = \mathbb{R}^n$, $k = 2$ i $Q = [Q_{i,j}]_{i,j=1,\dots,n}$ jest macierzą symetryczną, to następujące warunki są równoważne:

(i) forma $Q(h) = h^t Q h = \sum\limits_{i,j=1}^n Q_{i,j} h_i h_j$, $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ jest nieujemnie określona; odnotujmy, że $Q(h) = \widehat{Q}(h,h)$, $h \in \mathbb{R}^n$, gdzie $\widehat{Q}(x,y) := x^t Q y$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, oraz że $Q_{i,j} = \widehat{Q}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$, $i, j = 1, \dots, n$.

(10) W tym ostatnim przypadku żądamy istnienia stałej $c < 0$ takiej, że $Q(h) \leqslant c\|h\|^k$ dla dowolnego $h \in E$.

(ii) $D(i_1,\dots,i_s)\geqslant 0$ dla dowolnych $1\leqslant i_1<\dots<i_s\leqslant n$, gdzie

$$D(i_1,\dots,i_s):=\det\begin{bmatrix}Q_{i_1,i_1},\dots,Q_{i_1,i_s}\\ \vdots\\ Q_{i_s,i_1},\dots,Q_{i_s,i_s}\end{bmatrix},\quad 1\leqslant i_1<\dots<i_s\leqslant n.$$

(iii) wszystkie wartości własne macierzy Q są nieujemne.

Minor $D(i_1,\dots,i_s)$ nosi nazwę *minora głównego rzędu s*. Minor $D(1,\dots,s)$ nosi nazwę *wiodącego minora głównego rzędu s*. Z kryterium tego wynika oczywiście, że Q jest niedodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $(-1)^sD(i_1,\dots,i_s)\geqslant 0$ dla dowolnych $1\leqslant i_1<\dots<i_s\leqslant n$.

Istotnie, wiadomo, że jeżeli $Q=Q^t$, to $Q=P^t\varDelta P$, gdzie P jest macierzą ortogonalną ($PP^t=\mathbb{I}_n$), zaś $\varDelta$ jest macierzą diagonalną mającą na przekątnej wartości własne $d_1,\dots,d_n$ macierzy A. Wynika stąd, że forma Q jest dodatnio (nieujemnie) określona wtedy i tylko wtedy, gdy forma skojarzona z macierzą $\varDelta$ jest dodatnio (nieujemnie) określona, co z kolei jest równoważne temu, że $d_1,\dots,d_n>0$ ($d_1,\dots,d_n\geqslant 0$). W szczególności, (i) $\iff$ (iii).

Ponieważ $\det Q=\det\varDelta=d_1\cdots d_n$, wnioskujemy stąd również, że jeżeli Q jest dodatnio (nieujemnie) określona, to $\det Q>0$ ($\det Q\geqslant 0$). Ustalmy $1\leqslant i_1<\dots<i_s\leqslant n$. Zauważmy, że $D(i_1,\dots,i_s)$ jest wyznacznikiem reprezentacji macierzowej formy G, gdzie $G:\mathbb{R}^s\longrightarrow\mathbb{R}$,

$$G(t):=Q(0,\dots,0,\underset{i_1}{t_1},0,\dots,0,\underset{i_2}{t_2},0,\dots,0,\underset{i_s}{t_s},0,\dots,0),\quad t=(t_1,\dots,t_s)\in\mathbb{R}^s.$$

Jest jasne, że jeżeli Q jest dodatnio (nieujemnie) określona, to G jest dodatnio (nieujemnie) określona, a stąd $D(i_1,\dots,i_s)>0$ ($D(i_1,\dots,i_s)\geqslant 0$).

Pozostaje wykazać, że (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Wiadomo, że równanie charakterystyczne $\det(A-\lambda\mathbb{I}_n)=0$ macierzy A ma postać

$$(-\lambda)^n+\sum_{s=1}^n\Big(\sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_s\leqslant n}D(i_1,\dots,i_s)\Big)(-\lambda)^{n-s}=0.$$

Jeżeli więc $D(i_1,\dots,i_s)\geqslant 0$ dla dowolnych $1\leqslant i_1<\dots<i_s\leqslant n$, to każdy pierwiastek tego równania (czyli wartość własna) musi być $\geqslant 0$ (Ćwiczenie).

Ćwiczenie: Czy dla nieujemnej określoności formy Q wystarczy, by $D(1,\dots,s)\geqslant 0$, $s=1,\dots,n$?

(d) Jeżeli $E=\mathbb{R}^n$, $k=2$ i $Q=[Q_{i,j}]_{i,j=1,\dots,n}$ jest macierzą symetryczną, to następujące warunki są równoważne:

(i) forma skojarzona z macierzą Q jest dodatnio określona;

(ii) $D(1,\dots,s)>0$, $s=1,\dots,n$ (11);

(iii) wszystkie wartości własne macierzy Q są dodatnie.

Istotnie, wiemy już, że (i) $\iff$ (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Pozostaje wykazać, że (ii) $\Longrightarrow$ (i). Dowód ten przeprowadzimy indukcyjnie ze względu na n. Przypadek $n=1$ jest oczywisty. Załóżmy, że wynik zachodzi dla $n-1$. Oznacza to w szczególności, że $Q((x',0))>0$ dla $x'\in(\mathbb{R}^{n-1})_*$. Niech $\widehat{Q}(x,y):=x^tQy$, $x,y\in\mathbb{R}^n$, oznacza dwuliniowe odwzorowanie symetryczne generujące formę Q. Wtedy istnieje $w^0=(w',1)\in\mathbb{R}^n$ takie, że $\widehat{Q}(w^0,\boldsymbol{e}_j)=0$, $j=1,\dots,n-1$. Istotnie problem polega na rozwiązaniu kwadratowego układu równań:

$$\sum_{s=1}^{n-1}Q_{s,j}w_j=-Q_{n,j},\quad s=1,\dots,n-1,$$

którego wyznacznik to $D(1,\dots,n-1)>0$.

Łatwo również stwierdzić, że forma Q jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $Q((x',0))>0$ dla $x'\in(\mathbb{R}^{n-1})_*$ oraz $Q(w^0)>0$. Istotnie, wektory $(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_{n-1},w^0)$ tworzą bazę. Forma Q jest dodatnio określona $\iff\forall_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}}\forall_{t\neq 0}:0<Q((x',0)+tw^0)=Q((x',0))+2t\widehat{Q}((x',0),w^0)+t^2Q(w^0)=Q((x',0))+t^2Q(w^0)$.

Pozostaje więc sprawdzenie, że $Q(w^0)>0$. Niech R oznacza reprezentację macierzową formy Q w bazie $e_1,\dots,e_{n-1},w^0$. Wiemy, że $\det R>0$. Pozostaje zauważyć, że $\det R=D(1,\dots,n-1)Q(w^0)$ (Ćwiczenie).

(11) Q jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy $(-1)^sD(1,\dots,s)>0$, $s=1,\dots,n$.

Twierdzenie 9.10.4 (Warunki konieczne na ekstrema lokalne). *Załóżmy, że f ma w punkcie a minimum lokalne i $f^{(k)}(a)$ istnieje. Wtedy:*

- *$f'(a) = 0$, tzn. a jest punktem* krytycznym *f.*
- *jeżeli $k \geqslant 2$, $f'(a) = 0, \dots, f^{(k-1)}(a) = 0$ i $f^{(k)}(a) \neq 0$, to k jest parzyste i różniczka $f^{(k)}(a)$ jest nieujemnie określona.*

Dowód. Ustalmy $h \in E_*$. Funkcja $g(t) = f(a+th)$ jest poprawnie określona dla $|t| \leqslant \delta$ (przy dostatecznie małym δ) i ma minimum lokalne w punkcie $t = 0$. Widać, że $g^{(k)}(0)$ istnieje. Stąd, na podstawie teorii dla jednej zmiennej rzeczywistej, $0 = g'(0) = f'(a)(h)$.

Jeżeli teraz $f'(a) = 0, \dots, f^{(k-1)}(a) = 0$, to $g'(0) = 0, \dots, g^{(k-1)}(0) = 0$ i $g^{(k)}(0) = f^{(k)}(a)(h)$. Z klasycznej teorii funkcji jednej zmiennej rzeczywistej dostajemy teraz, że $f^{(k)}(a)(h) \geqslant 0$ oraz, że k musi być parzyste. □

Twierdzenie 9.10.5 (Warunki dostateczne na ekstrema lokalne). (a) *Przypuśćmy, że $f^{(k)}(a)$ istnieje, $f'(a) = 0, \dots, f^{(k-1)}(a) = 0$, a różniczka $f^{(k)}(a)$ jest silnie dodatnio określona* (12)*. Wtedy f ma w punkcie a silne minimum lokalne.*

(b) *Przypuśćmy, że $f \in \mathcal{D}^k(U, \mathbb{R})$, gdzie U jest otwartym otoczeniem punktu a, $f'(a) = 0, \dots, f^{(k-1)}(a) = 0$, a różniczka $f^{(k)}(x)$ jest nieujemnie określona dla dowolnego $x \in U$. Wtedy f ma w punkcie a minimum lokalne.*

Dowód. (a) Niech $c > 0$ będzie takie, że $\frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(h) \geqslant c\|h\|^k$, $h \in E$. Wtedy, na podstawie wzoru Taylora z resztą Peano, mamy

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(h) + o(\|h\|^k) \geqslant f(a) + \frac{c}{2}\|h\|^k > f(a), \quad 0 < \|h\| \ll 1.$$

(b) Niech $\overline{B}(a, r) \subset U$. Dla dowolnego $h \in E$, $\|h\| \leqslant r$, niech $g(t) := f(a + th)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Wtedy $g^{(j)}(t) = f^{(j)}(a+th)(h)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $j = 1, \dots, k$. Korzystając z jednowymiarowego wzoru Taylora z resztą Lagrange'a, wnioskujemy, że istnieje liczba $\theta(h) \in [0, 1]$ taka, że

$$f(a+h) - f(a) = g(1) - g(0) = \frac{1}{k!} g^{(k)}(\theta(h)) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a + \theta(h)h)(h) \geqslant 0.$$ □

Definicja 9.10.6. Powiemy, że funkcja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ jest *wypukła*, jeżeli dla dowolnego segmentu $[a, b] \subset \Omega$, funkcja $[0, 1] \ni t \longmapsto f(a + t(b - a)) \in \mathbb{R}$ jest wypukła (por. Definicja 5.9.1). Funkcję $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *wklęsłą*, jeżeli funkcja $-f$ jest wypukła.

Ćwiczenie 9.10.7 (Funkcje wypukłe). Udowodnić, że jeżeli $f \in \mathcal{D}^2(\Omega)$, to f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $x \in \Omega$, druga różniczka $f''(x)$ jest nieujemnie określona.

9.11. Odwzorowania analityczne

Niech E, F, G będą przestrzeniami Banacha.

Definicja 9.11.1. Niech $\Omega \in \operatorname{top} E$. Powiemy, że odwzorowanie $f : \Omega \longrightarrow F$ jest *analityczne* ($f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, F)$), jeżeli dla dowolnego $a \in \Omega$ istnieją $r > 0$ i ciąg wielomianów jednorodnych $Q_k \in \mathcal{H}^k(E, F)$, $k \in \mathbb{N}_0$, taki że $B(a, r) \subset \Omega$ oraz $f(a + h) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} Q_k(h)$, $h \in B(r)$.

Obserwacja 9.11.2. Jeżeli $E = \mathbb{R}$, to powyższa definicja jest zgodna z Definicją 6.7.1.

Rozpoczniemy od pewnej obserwacji dotyczącej wielomianów jednorodnych.

Lemat 9.11.3. *Niech E, F będą przestrzeniami Banacha i niech $Q_k \in \mathcal{H}^k(E, F)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Załóżmy, że dla pewnego $r > 0$, szereg $\sum\limits_{k=0}^{\infty} Q_k(h)$ jest zbieżny dla dowolnego $h \in \overline{B}(r)$. Wtedy istnieją stałe $C, \varrho > 0$ takie, że $\|\widehat{Q}_k\| \leqslant \frac{C}{\varrho^k}$, $k \in \mathbb{N}_0$.*

W szczególności, dla dowolnego $h \in B(\theta\varrho)$, $0 < \theta < 1$, mamy $\|Q_k(h)\| \leqslant C\theta^k$, $k \in \mathbb{N}_0$, skąd wynika, że szereg $\sum\limits_{k=0}^{\infty} Q_k$ jest zbieżny normalnie w każdej kuli $B(\theta\varrho)$, $0 < \theta < 1$.

---

(12) W szczególności, k musi być parzyste.

Z powyższego lematu wynika, że w definicji odwzorowania analitycznego możemy zawsze zakładać, że istnieje stała $C > 0$ taka, że $\|\widehat{Q}_k\| \leqslant \frac{C}{r^k}$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Dowód. Niech $F_s := \{h \in \overline{B}(r) : \forall_{k\in\mathbb{N}} : \|Q_k(h)\| \leqslant s\}$. Zbiory F_s są oczywiście domknięte, $F_s \subset F_{s+1}$, oraz $\overline{B}(r) = \bigcup_{s=1}^{\infty} F_s$. Ponieważ $\overline{B}(r)$ jest przestrzenią zupełną, twierdzenie Baire'a implikuje, że istnieje $s_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $\operatorname{int} F_{s_0} \neq \varnothing$. Niech $\overline{B}(x_0, \tau) \subset F_{s_0}$. Teraz na podstawie wzoru polaryzacyjnego (Twierdzenie 9.6.5), dla $h_1, \dots, h_k \in \overline{B}(\tau/k)$, dostajemy $\|\widehat{Q}_k(h_1, \dots, h_k)\| \leqslant \frac{1}{k!} 2^k s_0$, skąd wynika, że

$$\|\widehat{Q}_k\| \leqslant \frac{1}{k!} \frac{2^k s_0}{(\frac{\tau}{k})^k} = \frac{(2k)^k}{k!} \frac{s_0}{\tau^k} \leqslant e^{2k} \frac{s_0}{\tau^k} = \frac{s_0}{(e^{-2}\tau)^k}, \quad k \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

Obserwacja 9.11.4. Niech $Q_k \in \mathcal{H}^k(E, F)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Wtedy, korzystając z Twierdzenia 9.6.12(a), wnioskujemy, że następujące warunki są równoważne:

(i) $\exists_{C,\, r>0}\ \forall_{k\in\mathbb{N}}\ \forall_{h_1,\dots,h_k \in \overline{B}(r)} : \|\widehat{Q}_k(h_1, \dots, h_k)\| \leqslant C$;

(ii) $\exists_{C,\, r>0}\ \forall_{k\in\mathbb{N}} : \|\widehat{Q}_k\| \leqslant \frac{C}{r^k}$;

(iii) $\exists_{C,\, r>0}\ \forall_{k\in\mathbb{N}} : \|Q_k\| \leqslant \frac{C}{r^k}$;

(iv) $\exists_{C,\, r>0}\ \forall_{k\in\mathbb{N}}\ \forall_{h\in\overline{B}(r)} : \|Q_k(h)\| \leqslant C$.

Twierdzenie 9.11.5. *Odwzorowanie* $\operatorname{Isom}(E, F) \ni L \overset{\Lambda}{\longmapsto} L^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ *jest analityczne.*

Dowód. Ustalmy $L_0 \in \operatorname{Isom}(E, F)$. Na podstawie Twierdzenia 6.5.4, dla dowolnego $H \in \mathcal{L}(E, F)$ takiego, że $\|H\| < 1/\|L_0^{-1}\|$, mamy

$$\Lambda(L_0 + H) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (L_0^{-1} \circ H)^k \circ L_0^{-1} =: \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(H).$$

Zauważmy, że $Q_k(H) = \widetilde{Q}_k(H, \dots, H)$, gdzie

$$\widetilde{Q}_k(H_1, \dots, H_k) := (-1)^k (L_0^{-1} \circ H_1) \circ \dots \circ (L_0^{-1} \circ H_k) \circ L_0^{-1}, \quad H_1, \dots, H_k \in \mathcal{L}(E, F).$$

Widać, że $\widetilde{Q}_k \in \mathcal{L}^k(\mathcal{L}(E, F), \mathcal{L}(F, E))$. $\square$

Twierdzenie 9.11.6. *Niech* $f(a+h) := \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(h)$, $h \in B(r)$, *gdzie* $Q_k \in \mathcal{H}^k(E, F)$, $\|\widehat{Q}_k\| \leqslant \frac{C}{r^k}$, $k \in \mathbb{N}_0$. *Wtedy:*

(a) $f \in \mathcal{C}^\omega(B(a, r), F)$;

(b) $f^{(j)}(a + h) = \sum_{k=j}^{\infty} j! \binom{k}{j} \widehat{Q}_k(\underbrace{h, \dots, h}_{(k-j)\times}, \underbrace{\cdot, \dots, \cdot}_{j\times})$, $h \in B(r)$ *(równość w* $\mathcal{H}^j(E, F)$*)*, $j \in \mathbb{N}_0$; *w szczególności,* $\mathcal{C}^\omega(B(a, r), F) \subset \mathcal{C}^\infty(B(a, r), F)$;

(c) $Q_j = \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)$, $j \in \mathbb{N}_0$, *czyli* $f(a + h) = T_a f(h)$, $h \in B(r)$;

(d) $f^{(j)} \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, \mathcal{H}^j(E, F))$ *dla dowolnego odwzorowania* $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega, F)$, $j \in \mathbb{N}$.

Dowód. (a) Niech $b \in B(a, r)$ i niech $\varrho := r - \|b - a\|$. Dla $\|h\| < \varrho$, policzmy formalnie

$$f(b + h) = f(a + (h + b - a)) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(h + (b - a)) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \widehat{Q}_k(\underbrace{h, \dots, h}_{j\times}, \underbrace{b - a, \dots, b - a}_{(k-j)\times})$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} \widehat{Q}_k(\underbrace{h, \dots, h}_{j\times}, \underbrace{b - a, \dots, b - a}_{(k-j)\times}) =: \sum_{j=0}^{\infty} P_j(h).$$

Powyższe formalne przekształcenia staną się poprawne, jeżeli rodzina

$$\sum_{(k,j)\in\mathbb{N}_0^2:\ j\leqslant k} \binom{k}{j} \widehat{Q}_k(\underbrace{h, \dots, h}_{j\times}, \underbrace{b - a, \dots, b - a}_{(k-j)\times})$$

będzie sumowalna. Wynika to natychmiast z oszacowania

$$\Big\|\binom{k}{j}\widehat{Q}_k(\underbrace{h,\dots,h}_{j\times},\underbrace{b-a,\dots,b-a}_{(k-j)\times})\Big\| \leqslant \binom{k}{j}C\Big(\frac{\|h\|}{r}\Big)^j\Big(\frac{\|b-a\|}{r}\Big)^{k-j}.$$

Niech

$$\widehat{P}_j(h_1,\dots,h_j) := \sum_{k=j}^{\infty}\binom{k}{j}\widehat{Q}_k(h_1,\dots,h_j,\underbrace{b-a,\dots,b-a}_{(k-j)\times}), \quad h_1,\dots,h_j \in E.$$

Mamy

$$\Big\|\binom{k}{j}\widehat{Q}_k(h_1,\dots,h_j,\underbrace{b-a,\dots,b-a}_{(k-j)\times})\Big\| \leqslant \binom{k}{j}C\frac{\|h_1\|}{r}\cdots\frac{\|h_j\|}{r}\Big(\frac{\|b-a\|}{r}\Big)^{k-j},$$

a stąd

$$\Big\|\binom{k}{j}\widehat{Q}_k(\underbrace{\cdot,\dots,\cdot}_{j\times},\underbrace{b-a,\dots,b-a}_{(k-j)\times})\Big\| \leqslant C\Big(\frac{1}{r}\Big)^j\binom{k}{j}\Big(\frac{\|b-a\|}{r}\Big)^{k-j}.$$

Szereg definiujący $\widehat{P}_j$ jest zatem zbieżny w $\mathcal{L}^j_s(E,F)$, a stąd $\widehat{P}_j \in \mathcal{L}^j_s(E,F)$.

(b) W przestrzeni $\mathcal{L}(E,F)$ rozważmy szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} Q_k'(h) = \sum_{k=1}^{\infty} k\widehat{Q}_k(\underbrace{h,\dots,h}_{(k-1)\times},\cdot)$$

(zob. Twierdzenie 9.6.14(b)). Dla $h \in \overline{B}(\theta r)$, $0<\theta<1$, mamy

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\|k\widehat{Q}_k(h,\dots,h,\cdot)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leqslant k\theta^{k-1}\frac{C}{r}.$$

Zauważmy, że $\lim\limits_{k\to+\infty}\sqrt[k]{k\theta^{k-1}\frac{C}{r}} = \theta < 1$. Teraz wystarczy już tylko (Ćwiczenie) skorzystać z twierdzenia o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie (Twierdzenie 9.4.9) i Lematu 9.11.4.

(c) i (d) wynika z (b). □

Twierdzenie 9.11.7 (Zasada identyczności, por. Twierdzenie 6.9.3)**.** *Jeżeli Ω jest spójny, $f,g \in \mathcal{C}^\omega(\Omega,F)$ i $f=g$ na pewnym niepustym zbiorze otwartym $U \subset \Omega$, to $f \equiv g$.*

Dowód. Zastępując f,g przez $f-g,0$, sprowadzamy dowód do przypadku $g\equiv 0$. Niech $\Omega_0 := \{z_0 \in \Omega :$ $f=0$ w pewnym otoczeniu otwartym punktu $z_0\}$. Wiemy, że $\Omega_0 \neq \varnothing$. Wprost z definicji wynika, że Ω_0 jest otwarty. Pozostaje pokazać, że Ω_0 jest domknięty w Ω. Niech b będzie punktem skupienia Ω_0 w Ω. Wiemy, że $f \in \mathcal{C}^\infty$ oraz $f=0$ na Ω_0. Stąd $f^{(k)}(b)=0$, $k\in\mathbb{N}_0$. W takim razie $T_bf=0$, co oznacza, że $b\in\Omega_0$. □

Twierdzenie 9.11.8 (Por. Twierdzenie 6.11.3)**.** *Niech $\Omega \subset E$ będzie zbiorem otwartym i niech $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega,F)$. Wtedy*

$$f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega,F) \iff \forall_{a\in\Omega}\ \exists_{C>0,\ B(a,r)\subset\Omega}\ \forall_{h\in B(r)}\ \forall_{k\in\mathbb{N}_0}:\ \frac{1}{k!}\|f^{(k)}(a+h)\| \leqslant \frac{C}{r^k}.$$

Dowód. ($\Longleftarrow$): Niech $a\in\Omega$ i niech $C,\ r>0$ będą takie, jak w warunku. Korzystając ze wzoru Taylora dla funkcji klasy $\mathcal{D}^{k+1}$ (Twierdzenie 9.8.3(d)), dla $h\in B(r)$ mamy:

$$\Big\|f(a+h) - \sum_{\nu=0}^{k}\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(a)(h)\Big\| = \|R_k(f,a,a+h)\| \leqslant \frac{\sup_{x\in B(a,r)}\|f^{(k+1)}(x)\|}{(k+1)!}\|h\|^{k+1}$$
$$\leqslant C\Big(\frac{\|h\|}{r}\Big)^{k+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

($\Longrightarrow$): Niech $a\in\Omega$. Przypuśćmy, że $f(a+h) := \sum\limits_{k=0}^{\infty}Q_k(h)$, $h\in B(2r)$, gdzie $Q_k\in\mathcal{H}^k(E,F)$, $\|\widehat{Q}_k\| \leqslant \frac{C}{(2r)^k}$, $k\in\mathbb{N}_0$, $B(a,2r)\subset\Omega$. Niech $\varphi(t) := \frac{1}{1-t}$. Korzystając z Twierdzenia 9.11.6(b) oraz z dowodu Twierdzenia 6.11.1(e), dostajemy dla $h \in B(r)$:

$$\begin{aligned}\|f^{(j)}(a+h)\| &\leqslant \Big\| \sum_{k=j}^{\infty} j!\binom{k}{j} \|\widehat{Q}_k(\underbrace{h,\dots,h}_{(k-j)\times},\underbrace{\cdot,\dots,\cdot}_{j\times})\Big\| \leqslant C\sum_{k=j}^{\infty} j!\binom{k}{j}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{k-j}\Big(\frac{1}{2r}\Big)^{j} \\ &= C\Big(\frac{1}{2r}\Big)^{j}\varphi^{(j)}(\tfrac{1}{2}) = C\Big(\frac{1}{2r}\Big)^{j} j!2^{j+1} = j!\frac{2C}{r^j}, \quad j \in \mathbb{N}. \qquad \square\end{aligned}$$

Mając Twierdzenie 9.11.8, możemy skorzystać z metody dowodu Twierdzenia 6.11.4 i dostaniemy (Ćwiczenie) następujące ważne twierdzenie.

Twierdzenie 9.11.9. *Niech $U \in \operatorname{top} G$, $\Omega \in \operatorname{top} E$, niech $\varphi \in \mathcal{C}^\omega(U,E)$, $\varphi(U) \subset \Omega$, $f \in \mathcal{C}^\omega(\Omega,F)$. Wtedy $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^\omega(U,F)$.*

9.12. Dyfeomorfizmy

Definicja 9.12.1. Załóżmy, że E, F, G są przestrzeniami Banacha, $U \in \operatorname{top} E$, $V \in \operatorname{top} F$ i niech $\mathcal{F} \in \{\mathcal{D}^k, \mathcal{C}^k, \mathcal{C}^{k,\alpha}\}$ dla pewnego $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$, gdzie

$$\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega, G) := \{f \in \mathcal{C}^k(\Omega, G) : \forall_{a\in\Omega}\ \exists_{U_a} : f|_U \in \mathcal{C}_b^{k,\alpha}(U_a, G)\}.$$

Powiemy, że bijekcja $f : U \longrightarrow V$ jest *dyfeomorfizmem klasy* $\mathcal{F}$, jeżeli $f \in \mathcal{F}(U,F)$ oraz $g := f^{-1} \in \mathcal{F}(V,E)$.

Obserwacja 9.12.2. Jeżeli $f : U \longrightarrow V$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{D}^1$, to różniczkując związki $g \circ f = \mathrm{id}_U$, $f \circ g = \mathrm{id}_V$, łatwo wnioskujemy, że $f'(x) \in \operatorname{Isom}(E,F)$, $x \in U$, oraz $g'(y) = (f'(g(y))^{-1} \in \operatorname{Isom}(F,E)$, $y \in V$. Innymi słowy, $g' = \Lambda \circ f' \circ g$, gdzie $\Lambda : \operatorname{Isom}(E,F) \longrightarrow \operatorname{Isom}(F,E)$ oznacza operator odwracania (Twierdzenie 6.5.4).

Twierdzenie 9.12.3. *Załóżmy, że $U \in \operatorname{top} E$, $V \in \operatorname{top} F$ i $f : U \longrightarrow V$ jest homeomorfizmem takim, że $f \in \mathcal{D}(\Omega,F)$ i $f'(x) \in \operatorname{Isom}(E,F)$, $x \in U$. Wtedy:*

(a) *Jeżeli f jest klasy $\mathcal{D}^k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, to f jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{D}^k$.*
(b) *Jeżeli f jest klasy $\mathcal{C}^k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, to f jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$.*
(c) *Jeżeli f jest klasy $\mathcal{C}^\omega$, to f jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^\omega$.*
(d) *Jeżeli f jest klasy $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, to f jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^{k,\alpha}$.*

Dowód. (a) Na podstawie Twierdzenia 9.2.9 f jest $\mathcal{D}^1$-dyfeomorfizmem oraz $g' = \Lambda \circ f' \circ g$. Przypuśćmy, że g jest klasy $\mathcal{D}^\ell$ dla $\ell \leqslant k-1$. Wtedy ze wzoru $g' = \Lambda \circ f' \circ g$ wynika, że g' jest klasy $\mathcal{D}^\ell$. Znaczy to, że g jest klasy $\mathcal{D}^{\ell+1}$.

(b) Dowód jest analogiczny jak w (a) — Ćwiczenie.

(c) Mając Twierdzenia 9.11.5, 9.11.8, 9.11.9 i 9.12.3, możemy skorzystać z metody dowodu Twierdzenia 6.11.5 — Ćwiczenie.

(d) Na podstawie (b) wiemy, że g jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$. Wiemy, że $g' = \Lambda \circ f' \circ g$. Wiemy również, że dla dowolnego $\ell \in \mathbb{N}$ lokalnie $\Lambda \in \mathcal{C}^{\ell,1}$.

$k = 1$: Mamy $g' = \Lambda \circ f' \circ g$, gdzie $\Lambda \in \mathcal{C}^{0,1}$, $f' \in \mathcal{C}^{0,\alpha}$, $g \in \mathcal{C}^{0,1}$. Stąd $g' \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(V, \mathcal{L}(F,E))$ (por. Twierdzenie 4.6.12(b)). W konsekwencji, $g \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(V,E)$.

Dalej rozumujemy tak jak w (a), korzystając z Wniosku 9.7.10 — Ćwiczenie. $\square$

9.13. Twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym i twierdzenie o odwzorowaniu uwikłanym

Twierdzenie 9.13.1 (Twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym). *Załóżmy, że E, F są przestrzeniami Banacha, $\Omega \in \operatorname{top} E$ i $f \in \mathcal{C}^k(\Omega,F)$ dla pewnego $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty,\omega\}$. Załóżmy, że punkt $a \in \Omega$ jest taki, że $f'(a) \in \operatorname{Isom}(E,F)$. Wtedy istnieje otoczenie otwarte $U \subset \Omega$ punktu a takie, że:*
$V := f(U)$ jest zbiorem otwartym,
$f|_U : U \longrightarrow V$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$.
Ponadto, jeżeli $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega,F)$, to $g \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(V,E)$.

Obserwacja 9.13.2. Rozważmy dla treningu przypadek $E = F = \mathbb{R}$. Założenie $f'(a) \in \operatorname{Isom}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ oznacza oczywiście, że $f'(a) \neq 0$. Istnieje więc przedział otwarty $U \subset \Omega$ taki, że $a \in U$ oraz $f'(x) \neq 0$ dla dowolnego $x \in U$ (w szczególności, funkcja $f|_U$ jest ściśle monotoniczna). Zbiór $V := f(U)$ jest wtedy przedziałem otwartym. Na podstawie Twierdzenia 5.5.6, $f|U$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$ dla $k \leqslant +\infty$. Przypadek $k = \omega$ wynika z Twierdzenia 6.11.5.

Twierdzenie 9.13.3 (Twierdzenie o odwzorowaniu uwikłanym). *Załóżmy, że E_1, E_2, F są przestrzeniami Banacha, $\Omega \in \operatorname{top} E_1 \times E_2$ i $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$ dla pewnego $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. Załóżmy, że punkt $a = (a_1, a_2) \in \Omega$ jest taki, że $\frac{\partial f}{\partial E_2}(a) \in \operatorname{Isom}(E_2, F)$. Wtedy istnieją otoczenia otwarte $U_1 \subset E_1$, $U_2 \subset E_2$ punktów a_1 i a_2 oraz odwzorowanie $\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$ klasy $\mathcal{C}^k$ takie, że $U_1 \times U_2 \subset \Omega$, $\{x \in U_1 \times U_2 : f(x) = f(a)\} = \{(t, \varphi(t)) : t \in U_1\}$.*
Ponadto, jeżeli $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega, F)$, to $\varphi \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(U_1, E_2)$.

Obserwacja 9.13.4. Zauważmy, że $\varphi'(t) = -\Big(\frac{\partial f}{\partial E_2}(t, \varphi(t))\Big)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial E_1}(t, \varphi(t))$ dla $t \in U_1$ takich, że $\frac{\partial f}{\partial E_2}(t, \varphi(t)) \in \operatorname{Isom}(E_2, F)$. Istotnie, mamy $f(t, \varphi(t)) = f(a)$ dla dowolnego $t \in U_1$. Różniczkując dostajemy

$$\frac{\partial f}{\partial E_1}(t, \varphi(t)) + \frac{\partial f}{\partial E_2}(t, \varphi(t)) \circ \varphi'(t) = 0.$$

Obserwacja 9.13.5. Rozważmy dla treningu przypadek $E_1 = E_2 = F = \mathbb{R}$. Niech $(a, b) \in \Omega$ będzie ustalonym punktem takim, że $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Możemy założyć, że $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0$ dla dowolnego $(x, y) \in \Omega$ oraz, że Ω jest prostokątem. Ustalmy $\varepsilon > 0$ takie, że $(a, b \pm \varepsilon) \in \Omega$. Oczywiście

$$f(a, b - \varepsilon) < f(a, b) < f(a, b + \varepsilon).$$

Niech $\delta > 0$ będzie takie, że $f(x, b - \varepsilon) < f(a, b) < f(x, b + \varepsilon)$, $x \in (a - \delta, a + \delta)$. Wynika stąd, że dla dowolnego $x \in (a - \delta, a + \delta)$ istnieje dokładnie jeden punkt $y = \varphi(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ taki, że $f(x, \varphi(x)) = f(a, b)$.

Pozostaje sprawdzić, że $\varphi : (a - \delta, a + \delta) \longrightarrow (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ jest klasy $\mathcal{C}^k$. Na wstępie zauważmy, że powtarzając powyższe rozumowanie dla dowolnego punktu $(x_0, y_0) \in P := (a - \delta, a + \delta) \times (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ i dowolnego $0 < \varepsilon^* \ll 1$, wnioskujemy, że istnieje $\delta^* > 0$ oraz funkcja

$$\varphi^* : (x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*) \longrightarrow (y_0 - \varepsilon^*, y_0 + \varepsilon^*)$$

takie, że $P^* := (x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*) \times (y_0 - \varepsilon^*, y_0 + \varepsilon^*) \subset P$ oraz $y = \varphi^*(x)$ jest jedynym rozwiązaniem równania $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ w prostokącie P^*. Jeżeli $y_0 = \varphi(x_0)$, to oczywiście $\varphi^* = \varphi$ na $(x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*)$, co w szczególności, wobec dowolności ε^*, oznacza, że φ jest funkcją ciągłą.

Zauważmy, że cały problem leży w różniczkowalności φ. Jeżeli bowiem φ jest różniczkowalna, to równość $f(x, \varphi(x)) = f(a, b)$ implikuje, że

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\, \varphi'(x) = 0, \text{ a stąd} \tag{*}$$

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}, \quad x \in (a - \delta, a + \delta),$$

co z kolei pokazuje, że φ' jest funkcją ciągłą, a więc φ jest klasy $\mathcal{C}^1$. Jeżeli już wiemy, że φ jest klasy $\mathcal{C}^\ell$ dla pewnego $\ell \in \{1, \dots, k - 1\}$, to powyższa równość pokazuje, że φ jest klasy $\mathcal{C}^{\ell+1}$.

Przechodzimy do różniczkowalności. Ustalmy $x_0 \in (a - \delta, a + \delta)$. Dla małych $h \in \mathbb{R}$ mamy:

$$0 = f(x_0 + h, \varphi(x_0 + h)) - f(x_0, \varphi(x_0)) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(h), \varphi(x_0 + h))h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta(h))(\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)),$$

gdzie $\xi(h) \in [x_0, x_0 + h]$ i $\eta(h) \in [\varphi(x_0), \varphi(x_0 + h)]$. Wynika stąd, że

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(h), \varphi(x_0 + h)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta(h))\frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h}.$$

Teraz przechodząc z h do 0 (i korzystając z ciągłości φ) otrzymujemy różniczkowalność funkcji φ w punkcie x_0.

Jeżeli $k \geqslant 2$, to różniczkując (*), dostajemy

$$f''_{x,x}(x, \varphi(x)) + 2f''_{x,y}(x, \varphi(x))\, \varphi'(x) + f''_{y,y}(x, \varphi(x))(\varphi'(x))^2 + f'_y(x, \varphi(x))\, \varphi''(x) = 0;$$

stosujemy tu tradycyjne oznaczenia $f'_x := \frac{\partial f}{\partial x}$, $f''_{x,y} := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ itd. Stąd, po uwzględnieniu (*), mamy (dla uproszczenia zapisu pomijamy argument funkcji φ):

$$\varphi''(x) = -\frac{f''_{x,x}(x,\varphi)(f'_y(x,\varphi))^2 - 2f''_{x,y}(x,\varphi)f'_x(x,\varphi)f'_y(x,\varphi) + f''_{y,y}(x,\varphi)(f'_x(x,\varphi))^2}{(f'_y(x,\varphi))^3}$$

(Ćwiczenie). W szczególności, jeżeli $\varphi'(x_0) = 0$ dla pewnego x_0, to

$$\varphi''(x_0) = -\frac{f''_{x,x}(x_0,\varphi(x_0))}{f'_y(x_0,\varphi(x_0))}.$$

Prowadzi to do następującego warunku dostatecznego na ekstrema lokalne funkcji $y = \varphi(x)$ uwikłanej równaniem $f(x,y) = 0$, gdzie $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (Ćwiczenie):

Jeżeli $f'_y(a,b) \neq 0$, $f'_x(a,b) = 0$, $f''_{x,x}(a,b) \neq 0$, to równanie $f(x,y) = 0$ da się w otoczeniu punktu (a,b) rozwikłać oraz funkcja uwikłana $y = \varphi(x)$, $\varphi(a) = b$, ma w punkcie a ekstremum lokalne; ponadto, jeżeli $f''_{x,x}(a,b)f'_y(a,b) < 0$, to jest to minimum, a w przypadku przeciwnym — maksimum.

Ćwiczenie 9.13.6. Korzystając z metody użytej w poprzedniej obserwacji, przeprowadzić dowód twierdzenia o odwzorowaniu uwikłanym w przypadku, gdy $E_1 = \mathbb{R}^n$, $E_2 = F = \mathbb{R}$. W przypadku, gdy $k \geqslant 2$, wyprowadzić wzór na $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}$. Korzystając z tych wzorów, sformułować warunek dostateczny na ekstrema lokalne funkcji $y = \varphi(x_1,\dots,x_n)$ uwikłanej równaniem $f(x_1,\dots,x_n,y) = 0$, gdzie $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Dowód tego, że twierdzenie o odwzorowaniu uwikłanym implikuje twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym. Niech E, F, Ω, f, a będą takie, jak w założeniach twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym. Zdefiniujmy

$$E_1 := F, \quad E_2 := E, \quad \widetilde{\Omega} := F \times \Omega, \quad \widetilde{a} := (f(a), a), \quad \widetilde{f} : \widetilde{\Omega} \longrightarrow F, \quad \widetilde{f}(y,x) := f(x) - y.$$

Zauważmy, że $\widetilde{f}$ jest klasy $\mathcal{C}^k$, $\widetilde{f}(\widetilde{a}) = 0$ oraz $\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial E_2}(\widetilde{a}) = f'(a) \in \operatorname{Isom}(E_2, F)$. Niech $\widetilde{U}_1$, $\widetilde{U}_2$ i g będą takie, jak w twierdzeniu o odwzorowaniu uwikłanym dla $E_1, E_2, F, \widetilde{\Omega}, \widetilde{f}, \widetilde{a}$, tzn. $\widetilde{U}_1 \subset F$, $\widetilde{U}_2 \subset \Omega$ są otwarte, $g : \widetilde{U}_1 \longrightarrow \widetilde{U}_2$ jest klasy $\mathcal{C}^k$ oraz

$$\{(y,x) \in \widetilde{U}_1 \times \widetilde{U}_2 : y = f(x)\} = \{(y, g(y)) : y \in \widetilde{U}_1\}. \tag{†}$$

Niech $U := \widetilde{U}_2 \cap f^{-1}(\widetilde{U}_1)$, $V := \widetilde{U}_1$. Wobec (†) wnioskujemy, że $f|_U : U \longrightarrow V$ jest bijekcją oraz $(f|_U)^{-1} = g$. □

Dowód tego, że twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym implikuje twierdzenie o odwzorowaniu uwikłanym. Niech $E_1, E_2, F, \Omega, f, a$ będą takie, jak w założeniach twierdzenia o odwzorowaniu uwikłanym. Zdefiniujmy

$$\widetilde{E} := E_1 \times E_2, \quad \widetilde{F} := E_1 \times F, \quad \widetilde{f} : \Omega \longrightarrow \widetilde{F}, \quad \widetilde{f}(x_1, x_2) := (x_1, f(x_1, x_2)).$$

Oczywiście, $\widetilde{f}$ jest klasy $\mathcal{C}^k$, $\widetilde{f}(a) = (a_1, f(a))$ oraz

$$\widetilde{f}'(a)(X_1, X_2) = \Big(X_1, \frac{\partial f}{\partial E_1}(a)(X_1) + \frac{\partial f}{\partial E_2}(a)(X_2)\Big) =: (X_1, A(a)(X_1) + B(a)(X_2)),\ (X_1, X_2) \in E_1 \times E_2.$$

W szczególności, $\widetilde{f}'(a) \in \operatorname{Isom}(\widetilde{E}, \widetilde{F})$ ponieważ

$$(\widetilde{f}'(a))^{-1}(Y_1, Y_2) = (Y_1, (B(a))^{-1}(Y_2 - A(a)(Y_1))), \quad (Y_1, Y_2) \in E_1 \times F.$$

Niech teraz $\widetilde{U}, \widetilde{V}$ będą takie, jak w twierdzeniu o odwzorowaniu odwrotnym dla $\widetilde{E}, \widetilde{F}, \Omega, \widetilde{f}$ i a, tzn. $\widetilde{U} \subset \Omega$ jest otwartym otoczeniem a, $\widetilde{V} \subset \widetilde{F}$ jest otwarty i $\widetilde{f}|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \longrightarrow \widetilde{V}$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$. Oczywiście $\widetilde{f}'(x) \in \operatorname{Isom}(\widetilde{E}, \widetilde{F})$ dla dowolnego $x \in \widetilde{U}$. Wynika stąd, że $\frac{\partial f}{\partial E_2}(x) \in \operatorname{Isom}(E_2, F)$, $\quad x \in \widetilde{U}$. Istotnie, ponieważ

$$\begin{aligned}\widetilde{f}'(x)(X_1, X_2) = \Big(X_1, &\frac{\partial f}{\partial E_1}(x)(X_1) + \frac{\partial f}{\partial E_2}(x)(X_2)\Big) \\ &=: (X_1, A(x)(X_1) + B(x)(X_2)), \quad (X_1, X_2) \in E_1 \times E_2,\end{aligned}$$

zatem dla $x \in \widetilde{U}$ mamy: $(B(x))^{-1}(Y) = \operatorname{pr}_{E_2}((\widetilde{f}'(x))^{-1}(0, Y))$, $Y \in F$. Niech $\widetilde{g} := (\widetilde{f}|_{\widetilde{U}})^{-1}$. Z postaci odwzorowania $\widetilde{f}$ wynika, że $\widetilde{g}(x_1, y) = (x_1, h(x_1, y))$, $(x_1, y) \in \widetilde{V}$, gdzie $h : \widetilde{V} \longrightarrow E_2$ jest pewnym odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^k$, dla którego $h(a_1, f(a)) = a_2$. Zdefiniujmy

$$W := \{x_1 \in E_1 : (x_1, f(a)) \in \widetilde{V}\}, \quad \varphi(x_1) := h(x_1, f(a)).$$

Zauważmy, że $\varphi(a_1) = a_2$. Dobierzmy teraz otoczenia otwarte $U_1 \subset E_1$ i $U_2 \subset E_2$ punktów a_1 i a_2 tak, że $U_1 \times U_2 \subset \widetilde{U}$, $U_1 \subset W$ i $\varphi(U_1) \subset U_2$. Liczymy

$$\begin{aligned}\{(t, \varphi(t)) : t \in U_1\} &= \{(x_1, h(x_1, f(a))) : x_1 \in U_1\} = \{\widetilde{g}(x_1, f(a)) : x_1 \in U_1\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \widetilde{U} : x_1 \in U_1,\ f(x_1, x_2) = f(a)\} = \{x \in U_1 \times U_2 : f(x) = f(a)\}. \quad \square\end{aligned}$$

Dowód twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym.

Lemat 9.13.7. *Niech E, F będą przestrzeniami Banacha, niech $\Omega \subset E$ będzie zbiorem otwartym i niech $f : \Omega \longrightarrow F$ będzie odwzorowaniem różniczkowalnym takim, że f' jest ciągła w x_0 oraz $f'(x_0) \in$* $\operatorname{Isom}(E, F)$ *dla pewnego $x_0 \in \Omega$. Wtedy, dla dostatecznie małych $\tau > 0$, zbiór $f(B(x_0, \tau))$ jest otoczeniem punktu $f(x_0)$.*

Dowód. Niech $P : \widetilde{E} \longrightarrow E$, $Q : F \longrightarrow \widetilde{F}$ będą dowolnymi dyfeomorfizmami klasy $\mathcal{C}^1$, gdzie $\widetilde{E}$ i $\widetilde{F}$ są przestrzeniami Banacha. Zdefiniujmy

$$\widetilde{\Omega} := P^{-1}(\Omega), \quad \widetilde{f} := Q \circ f \circ P : \widetilde{\Omega} \longrightarrow \widetilde{F}, \quad \widetilde{x}_0 := P^{-1}(x_0).$$

Zauważmy, że $\widetilde{f}'(\widetilde{x}_0) \in \operatorname{Isom}(\widetilde{E}, \widetilde{F})$. Jest rzeczą widoczną, że wystarczy pokazać, że dla dostatecznie małych $\widetilde{\tau} > 0$ zbiór $\widetilde{f}(B(\widetilde{x}_0, \widetilde{\tau}))$ zawiera pewne otoczenie punktu $\widetilde{f}(\widetilde{x}_0)$.

Powyższa uwaga pozwala najpierw zredukować problem do przypadku $x_0 = 0$ i $f(x_0) = 0$ (poprzez translacje: $\widetilde{E} := E$, $P(x) = x + x_0$, $\widetilde{F} := F$, $Q(y) := y - f(x_0)$), a następnie do przypadku $F = E$ i $f'(0) = -\operatorname{id}_E$ (biorąc $\widetilde{E} := E$, $P := \operatorname{id}_E$, $\widetilde{F} := E$, $Q := -(f'(0))^{-1}$).

Ustalmy $\tau > 0$ takie, że $X := \overline{B}(\tau) \subset \Omega$ oraz $\|f'(x) + \operatorname{id}_E\| \leqslant \frac{1}{2}$, $\quad x \in X$. Pokażemy, że $B(\frac{\tau}{2}) \subset f(X)$. Ustalmy $y^* \in B(\frac{\tau}{2})$ i niech $T : X \longrightarrow E$, $T(x) := f(x) - y^* + x$. Zauważmy, że jeżeli $T(x^*) = x^*$, to $f(x^*) = y^*$. Będziemy chcieli zastosować twierdzenie Banacha o punkcie stałym Na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, dla $x', x'' \in X$, mamy

$$\begin{aligned}\|T(x') - T(x'')\| &= \|f(x') - f(x'') + (x' - x'')\| \\ &\leqslant \sup\{\|f'(x) + \operatorname{id}_E\| : x \in [x', x'']\}\|x' - x''\| \leqslant \tfrac{1}{2}\|x' - x''\|.\end{aligned}$$

Stąd, dla $x \in X$, mamy $\|T(x)\| \leqslant \|T(x) - T(0)\| + \|T(0)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x\| + \|y^*\| \leqslant \tau$. $\square$

Przechodzimy do zasadniczego dowodu twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym. Niech E, F, Ω, f, a będą takie, jak w założeniach. Ponieważ zbiór $\operatorname{Isom}(E, F)$ jest otwarty w $\mathcal{L}(E, F)$, a operator odwracania Λ jest homeomorfizmem, możemy założyć, że $f'(x) \in \operatorname{Isom}(E, F)$ dla dowolnego $x \in \Omega$. Niech $A := f'(a)$, $\eta := 1/\|A^{-1}\|$. Ustalmy dowolną kulę $B(a, r) \subset \Omega$ tak małą, by $\|f'(x) - A\| \leqslant \frac{\eta}{2}$, $x \in B(a, r)$. Teraz, na podstawie twierdzenia o przyrostach skończonych, dla dowolnych $x', x'' \in B(a, r)$ mamy:

$$\begin{aligned}\|f(x') - f(x'')\| &\geqslant \|A(x' - x'')\| - \|f(x') - f(x'') - A(x' - x'')\| \\ &\geqslant \eta\|x' - x''\| - \sup\{\|f'(x) - A\| : x \in [x', x'']\}\|x' - x''\| \geqslant \frac{\eta}{2}\|x' - x''\|.\end{aligned}$$

Wynika stąd, że $f|_{B(a,r)}$ jest odwzorowaniem injektywnym oraz, że odwzorowanie

$$g := (f|_{B(a,r)})^{-1} : f(B(a, r)) \longrightarrow B(a, r)$$

jest ciągłe (spełnia warunek Lipschitza). Wobec Twierdzenia 9.2.9, pozostaje jeszcze zauważyć, że $f(B(a, r))$ jest zbiorem otwartym, co wynika z Lematu 9.13.7. $\square$ $\square$

W przypadku, gdy $E = F = \mathbb{R}^n$, twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym można istotnie wzmocnić.

Twierdzenie 9.13.8 (Twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym)**.** *Załóżmy, że $\varOmega \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n$, $a \in \varOmega$ i $f : \varOmega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym takim, że:*

- *pochodna f' jest ciągła w punkcie $a \in \varOmega$,*
- *$f'(a) \in \operatorname{Isom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ (tzn. $\det Jf(a) \neq 0$).*

Wtedy istnieje otoczenie otwarte $U \subset \varOmega$ punktu a takie, że

- *$V := f(U)$ jest zbiorem otwartym,*
- *$f|_U : U \longrightarrow V$ jest $\mathcal{D}^1$-dyfeomorfizmem.*

Dowód. Zachowajmy oznaczenia z dowodu Twierdzenia 9.13.1. Tak jak poprzednio, znajdujemy $r > 0$ takie, że $\det Jf(x) \neq 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{B}(a, r) \subset\subset \varOmega$ oraz

$$\|f(x') - f(x'')\| \geqslant \frac{\eta}{2}\|x' - x''\|, \quad x', x'' \in \mathbb{B}(a, r)$$

(wszystkie obliczenia wykonujemy w normie euklidesowej), gdzie $0 < \eta \leqslant \min\{1/\|A^{-1}\|,\ 1\}$, $A := f'(a)$. W szczególności, $f|_{\mathbb{B}(a,r)}$ jest odwzorowaniem injektywnym oraz odwzorowanie $g := (f|_{\mathbb{B}(a,r)})^{-1} : f(\mathbb{B}(a, r)) \longrightarrow \mathbb{B}(a, r)$ jest ciągłe. Podobnie jak poprzednio, pozostaje jeszcze pokazać, że zbiór $f(\mathbb{B}(a, r))$ jest otwarty. Poprzednio robiliśmy to w oparciu o Lemat 9.13.7 (którego użycie wymagało założenia, że f' jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in \mathbb{B}(a, r)$). Obecnie zastosujemy inną metodę.

Ustalmy punkt $x_0 \in \mathbb{B}(a, r)$. Wystarczy pokazać, że $\mathbb{B}(f(x_0), \tau) \subset f(\mathbb{B}(x_0, r_0))$, gdzie

$$r_0 := r - \|x_0 - a\|, \quad \tau := (\eta/4)r_0.$$

Ustalmy $y^* \in \mathbb{B}(f(x_0), \tau)$. Szukamy $x^* \in \mathbb{B}(x_0, r_0)$ tak, by $f(x^*) = y^*$.

Niech $T(x) := \|f(x) - y^*\|$, $x \in \varOmega$. Odnotujmy, że T^2 jest odwzorowaniem różniczkowalnym oraz

$$(T^2)'(x)(X) = 2\langle f(x) - y^*, f'(x)(X)\rangle, \quad x \in \varOmega,\ X \in \mathbb{R}^n.$$

Wynika stąd w szczególności, że jeżeli $(T^2)'(x) = 0$ i $\det Jf(x) \neq 0$, to $f(x) = y^*$.

Ustalmy $0 < s < r_0$ tak, by $y^* \in \mathbb{B}(f(x_0), (\eta/4)s)$. Ponieważ $\overline{\mathbb{B}}(x_0, s)$ jest zbiorem zwartym (tu korzystamy istotnie z założenia, iż $E = F = \mathbb{R}^n$), zatem istnieje punkt $x^* \in \overline{\mathbb{B}}(x_0, s)$ taki, że $T(x^*) = \min\{T(x) : x \in \overline{\mathbb{B}}(x_0, s)\}$. Zauważmy, że $T(x_0) < (\eta/4)s$, a więc $T(x^*) < (\eta/4)s$. Pokażemy, że $x^* \in \mathbb{B}(x_0, s)$. Przypuśćmy, że $\|x^* - x_0\| = s$. Wtedy

$$T(x^*) = \|f(x^*) - f(x_0) - (y^* - f(x_0))\| \geqslant \|f(x^*) - f(x_0)\| - \|y^* - f(x_0)\| > (\eta/2)\|x^* - x_0\| - (\eta/4)s = (\eta/4)s;$$

sprzeczność.

Tak więc $x^* \in \mathbb{B}(x_0, s)$, a stąd $(T^2)'(x^*) = 0$, co wobec poprzedniej obserwacji, daje $f(x^*) = y^*$. $\square$

9.14. Twierdzenie o rzędzie

Twierdzenie 9.14.1 (Twierdzenie o rzędzie)**.** *Niech $\varOmega \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n$ i niech $f \in \mathcal{C}^k(\varOmega, \mathbb{R}^m)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$, będzie odwzorowaniem takim, że $\operatorname{rank} f'(x) = r$, $x \in \varOmega$, dla pewnego $r \in \{0, \dots, \min\{n, m\}\}$. Niech $\varDelta := (-1, 1) \subset \mathbb{R}$. Wtedy dla dowolnego punktu $a \in \varOmega$ istnieje:*

- *otoczenie otwarte $U \subset \varOmega$ punktu a,*
- *otoczenie otwarte $V \subset \mathbb{R}^m$ punktu $f(a)$, $f(U) \subset V$,*
- *dyfeomorfizm klasy $\mathcal{C}^k$ $\varPhi : \varDelta^n \longrightarrow U$, $\varPhi(0) = a$,*
- *dyfeomorfizm klasy $\mathcal{C}^k$ $\varPsi : V \longrightarrow \varDelta^m$, $\varPsi(f(a)) = 0$,*

takie, że $(\varPsi \circ f \circ \varPhi)(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_r, 0, \dots, 0)$, $(t_1, \dots, t_n) \in \varDelta^n$.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] & V \arrow[d, "\varPsi"] \\
\varDelta^n \arrow[u, "\varPhi"] \arrow[r, "(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^r}, 0)"] & \varDelta^m
\end{tikzcd}$$

Dowód. Przypadek $r = 0$: Wtedy $f \equiv f(a) = \text{const}$ w składowej spójnej zbioru $\varOmega$, do której należy punkt a. Dobierzmy $\tau > 0$ takie, że $U := a + \tau\varDelta^n \subset \varOmega$ i zdefiniujmy $V := f(a) + \varDelta^m$, $\varPhi(t) := a + \tau t$, $\varPsi(u) := u - f(a)$.

Przypadek $r \geqslant 1$: Niech $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ i $Q : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ będą dowolnymi izomorfizmami afinicznymi. Zdefiniujmy $\widetilde{\varOmega} := P^{-1}(\varOmega)$, $\widetilde{f} := Q \circ f \circ P : \widetilde{\varOmega} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\widetilde{a} := P^{-1}(a)$. Zauważmy, że odwzorowanie $\widetilde{f}$ jest klasy $\mathcal{C}^k$ oraz $\operatorname{rank} \widetilde{f}'(x) = r$ dla dowolnego $x \in \widetilde{\varOmega}$. Przypuśćmy, że twierdzenie o rzędzie zachodzi dla odwzorowania $\widetilde{f}$ w punkcie $\widetilde{a}$ i niech $\widetilde{U}$, $\widetilde{V}$, $\widetilde{\Phi}$ i $\widetilde{\Psi}$ będą dobrane do odwzorowania $\widetilde{f}$ zgodnie z tym twierdzeniem. Niech $U := P(\widetilde{U})$, $V := Q^{-1}(\widetilde{V})$, $\Phi := P \circ \widetilde{\Phi}$, $\Psi := \widetilde{\Psi} \circ Q$.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] & V \arrow[d, "Q"] \\
\widetilde{U} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "\widetilde{f}"] & \widetilde{V} \arrow[d, "\widetilde{\Psi}"] \\
\Delta^n \arrow[u, "\widetilde{\Phi}"] \arrow[r, "(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^r}{,}0)"] & \Delta^m
\end{tikzcd}$$

Mamy $(\Psi \circ f \circ \Phi)(t) = ((\widetilde{\Psi} \circ Q) \circ f \circ (P \circ \widetilde{\Phi}))(t) = (\widetilde{\Psi} \circ \widetilde{f} \circ \widetilde{\Phi})(t) = (t_1, \dots, t_r, 0, \dots, 0)$, czyli twierdzenie o rzędzie zachodzi dla odwzorowania f w punkcie a.

Stosując powyższe rozumowanie do $P(x) := x+a$ i $Q(y) := y - f(a)$, redukujemy dowód do przypadku $a = 0$ i $f(0) = 0$. Z algebry liniowej wiadomo, że istnieją izomorfizmy liniowe $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ i $Q : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ takie, że $Q \circ f'(0) \circ P = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (13). Dowód redukuje się więc do przypadku, gdy $f'(0) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Niech $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $g(x) := (f_1(x), \dots, f_r(x), x_{r+1}, \dots, x_n)$. Oczywiście g jest klasy $\mathcal{C}^k$, $g(0) = 0$ oraz $g'(0) = \mathbb{I}_n$. Na podstawie twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym istnieje otoczenie otwarte zera $U \subset \Omega$ oraz $\tau > 0$ takie, że odwzorowanie $g|_U : U \longrightarrow \tau\Delta^n$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$. Niech $\widetilde{\Phi} := (g|_U)^{-1} : \tau\Delta^n \longrightarrow U$, $\varphi := f \circ \widetilde{\Phi} : \tau\Delta^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Zauważmy, że φ jest klasy $\mathcal{C}^k$, $\varphi(0) = 0$ oraz $\operatorname{rank} \varphi'(t) = r$ dla dowolnego $t \in \tau\Delta^n$. Ponadto, $\varphi(t) = (t_1, \dots, t_r, \varphi_{r+1}(t), \dots, \varphi_m(t))$, a więc w szczególności $\varphi(\tau\Delta^n) \subset (\tau\Delta)^r \times \mathbb{R}^{m-r}$ oraz

$$\varphi'(t) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_r & 0_{r,n-r} \\ *_{m-r,r} & \left[\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial t_\nu}(t)\right]_{\substack{\mu=r+1,\dots,m \\ \nu=r+1,\dots,n}} \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\operatorname{rank} \varphi'(t) = r$, wnioskujemy stąd, że $\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial t_\nu}(t) = 0$, $t \in \tau\Delta^n$, $\mu = r+1, \dots, m$, $\nu = r+1, \dots, n$. Innymi słowy, funkcje $\varphi_{r+1}, \dots, \varphi_m$ zależą jedynie od $t_1, \dots, t_r$. Niech

$$\widetilde{\Psi} : (\tau\Delta^r) \times \mathbb{R}^{m-r} \longrightarrow (\tau\Delta^r) \times \mathbb{R}^{m-r}, \quad \widetilde{\Psi}(u', u_{r+1}, \dots, u_m) := (u', u_{r+1} - \varphi_{r+1}(u'), \dots, u_m - \varphi_m(u')).$$

Widać, że $\widetilde{\Psi}$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$ (14) i $\widetilde{\Psi}(0) = 0$. Ponadto,

$$(\widetilde{\Psi} \circ \varphi)(t) = (\widetilde{\Psi} \circ f \circ \widetilde{\Phi})(t) = (t', 0), \quad t = (t', t'') \in (\tau\Delta^r) \times (\tau\Delta^{n-r}).$$

Niech teraz $\Phi : \Delta^n \longrightarrow U$, $\Phi(t) := \widetilde{\Phi}(\tau t)$, $V := \widetilde{\Psi}^{-1}(\tau\Delta^m)$, $\Psi : V \longrightarrow \Delta^m$, $\Psi(y) := \frac{1}{\tau}\widetilde{\Psi}(y)$. Odwzorowania Φ i Ψ są dyfeomorfizmami klasy $\mathcal{C}^k$ oraz

$$(\Psi \circ f \circ \Phi)(t) = \frac{1}{\tau}(\widetilde{\Psi} \circ f \circ \widetilde{\Phi})(\tau t) = \frac{1}{\tau}(\tau t', 0) = (t', 0), \quad t = (t', t'') \in \Delta^r \times \Delta^{n-r}. \qquad \square$$

---

(13) $\mathbb{I}_r$ oznacza $(r \times r)$–wymiarową macierz jednostkową.

(14) $\widetilde{\Psi}^{-1}(v', v_{r+1}, \dots, v_m) := (v', v_{r+1} + \varphi_{r+1}(v'), \dots, v_m + \varphi_m(v'))$.

ROZDZIAŁ 10

Podrozmaitości

10.1. Podrozmaitości lokalne

Definicja 10.1.1. Niech $\varnothing \neq M \subset \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{N}_0 \cap [0, n]$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty,\ \omega\}$. Mówimy, że zbiór M jest *d–wymiarową podrozmaitością lokalną klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$* (1), jeżeli:

– dla $d = 0$: M jest zbiorem dyskretnym, tzn. dowolny punkt $a \in M$ ma otoczenie otwarte $U \subset \mathbb{R}^n$ takie, że $M \cap U = \{a\}$; zauważmy, że $\#M \leqslant \aleph_0$ — Ćwiczenie; w szczególności, dla $d = 0$ klasa $\mathcal{C}^k$ jest obojętna;

– dla $1 \leqslant d \leqslant n$: spełniony jest następujący warunek: $\forall_{a \in M}\ \exists_{P \in \operatorname{top} \mathbb{R}^d}\ \exists_{U \in \operatorname{top} M:\ a \in U}\ \exists_{p: P \to U}$:
- $p : P \longrightarrow U$ jest homeomorfizmem,
- $p \in \mathcal{C}^k(P, \mathbb{R}^n)$,
- $\operatorname{rank} p'(t) = d$, $t \in P$.

Zwykle będziemy pomijać słowo „lokalna" i będziemy mówić o *d–wymiarowej podrozmaitości klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$* lub też pisać krótko $M \in \mathcal{M}_d^k(\mathbb{R}^n)$ (oznaczenie to ma charakter lokalny).

W powyższej sytuacji mówimy, że $p : P \longrightarrow U$ jest *lokalną parametryzacją* (dla U), zaś $p^{-1} : U \longrightarrow P$ jest *mapą* (na U). Każdą rodzinę map $p_i^{-1} : U_i \longrightarrow P_i$, $i \in I$, taką że $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ nazywamy *atlasem na M*. Zauważmy, że na podstawie twierdzenia Lindelöfa (2), z dowolnego atlasu na M można wybrać podatlas przeliczalny.

Dla $d = n$, na podstawie twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym, powyższe warunki oznaczają, że $M \in \operatorname{top} \mathbb{R}^n$. W szczególności, dla $d = n$ klasa $\mathcal{C}^k$ jest obojętna.

Obserwacja 10.1.2. (a) W $\mathbb{R}$ nie ma nietrywialnych podrozmaitości.

(b) Jeżeli $M \in \mathcal{M}_d^k(\mathbb{R}^n)$ i $\varnothing \neq N \in \operatorname{top} M$, to $N \in \mathcal{M}_d^k(\mathbb{R}^n)$.

(c) Jeżeli $p : P \longrightarrow U$ jest lokalną parametryzacją, zaś $\varphi : Q \longrightarrow P$ jest dowolnym dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$ ($Q \in \operatorname{top} \mathbb{R}^d$), to $p \circ \varphi : Q \longrightarrow U$ jest również lokalną parametryzacją.

(d) Jeżeli $M \in \mathcal{M}_d^k(\mathbb{R}^n)$, $d \geqslant 1$, to dla każdego punktu $a \in M$ istnieje lokalna parametryzacja $p : \Delta^d \longrightarrow U$ ($\Delta := (-1, 1)$) taka, że $p(0) = a$.

(e) Każda podrozmaitość klasy $\mathcal{C}^k$ jest klasy $\mathcal{C}^\ell$ dla dowolnego $1 \leqslant \ell \leqslant k - 1$.

(f) Jeżeli $M := \{(t, \varphi(t)) : t \in P\}$, gdzie $1 \leqslant d \leqslant n - 1$, $P \in \operatorname{top} \mathbb{R}^d$ i $\varphi \in \mathcal{C}^k(P, \mathbb{R}^{n-d})$, to $M \in \mathcal{M}_d^k(\mathbb{R}^n)$.

(g) Jeżeli $M \in \mathcal{M}_d^k(\mathbb{R}^n)$ oraz $\Phi : \Omega \longrightarrow \Omega'$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$, gdzie $M \subset \Omega$, to $\Phi(M) \in \mathcal{M}_d^k(\mathbb{R}^n)$.

Istotnie, przypadki $d = 0$ i $d = n$ są trywialne. Dla $1 \leqslant d \leqslant n - 1$, wystarczy pokazać, że jeżeli $p : P \longrightarrow U$ jest lokalną parametryzacją dla $U \in \operatorname{top} M$, to $\Phi \circ p : P \longrightarrow \Phi(U)$ jest lokalną parametryzacją dla $\Phi(U)$. Jedyną wątpliwość może budzić ostatni warunek z rzędem. Mamy: $(\Phi \circ p)'(t) = \Phi'(p(t)) \circ p'(t)$. Ponadto, $\Phi'(x)$ jest macierzą nieosobliwą dla dowolnego $x \in \Omega$. Stąd $\operatorname{rank}(\Phi \circ p)'(t) = \operatorname{rank} p'(t) = d$ dla dowolnego $t \in P$.

(h) Każda d–wymiarowa płaszczyzna afiniczna $M \subset \mathbb{R}^n$ jest d–wymiarową podrozmaitością w $\mathbb{R}^n$ klasy $\mathcal{C}^\omega$. Istotnie, przypadki $d = 0$ i $d = n$ są trywialne. Dla $1 \leqslant d \leqslant n - 1$, jeżeli $M = x_0 + V$, gdzie V jest d–wymiarową podprzestrzenią wektorową $\mathbb{R}^n$, to dla dowolnej bazy $v_1, \dots, v_d$ przestrzeni V odwzorowanie $\mathbb{R}^d \ni (t_1, \dots, t_d) \longmapsto x_0 + t_1 v_1 + \dots + t_d v_d \in M$ jest (globalną) parametryzacją M klasy $\mathcal{C}^\omega$ — Ćwiczenie.

---

(1) Można również mówić o rozmaitościach klasy $\mathcal{C}^{k,\alpha}$.

(2) Ernst Lindelöf (1870–1946).

(i) $(n-1)$–wymiarowa jednostkowa sfera euklidesowa $\mathbb{S}_{n-1}$ $\mathbb{S}_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} = \partial\mathbb{B}_n$ jest $(n-1)$–wymiarową podrozmaitością w $\mathbb{R}^n$ klasy $\mathcal{C}^\omega$. Istotnie, jeżeli np. $U_n^+ := \{x \in \mathbb{S}_{n-1} : x_n > 0\}$, to odwzorowanie $\mathbb{B}_{n-1} \ni x' \longmapsto (x', \sqrt{1 - \|x'\|^2}) \in U_n^+$ jest lokalną parametryzacją U_n^+ klasy $\mathcal{C}^\omega$. Podobnie możemy sparametryzować każdy z $2n$ zbiorów $U_j^\pm := \{x \in \mathbb{S}_{n-1} : \pm x_j > 0\}$, $j = 1, \dots, n$.

Zauważmy, do parametryzacji $\mathbb{S}_2$ wystarczą dwa rzuty stereograficzne z przeciwnych biegunów.

(j) Zbiór $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 = y^2\}$ nie jest jednowymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^2$, ale odwzorowanie $p : \mathbb{R} \longrightarrow M$, $p(t) := (t^2, t^3)$, jest homeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^\omega$. Zauważmy, że $p'(0) = (0,0)$, a więc p nie jest lokalną parametryzacją.

Istotnie, przypuśćmy, że $q = (f,g) : \varDelta \longrightarrow M$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym w $t = 0$ takim, że $q(0) = (0,0)$. Wtedy $f^3 \equiv g^2$. Po podzieleniu przez t^2 i przejściu z t do zera dostajemy $(f'(0))^2 f(0) = (g'(0))^2$, co daje $g'(0) = 0$. Dzieląc z kolei przez t^3 mamy: $(f(t)/t)^3 = (g(t)/t)^2(\frac{1}{t})$. Przy $t \longrightarrow 0$ lewa strona zmierza do $(f'(0))^3$, zaś prawa jest $\leqslant 0$ dla $t < 0$ i $\geqslant 0$ dla $t > 0$. Stąd: $f'(0) = 0$. Tak więc $q'(0) = (0,0)$, a zatem q nie może być parametryzacją.

Twierdzenie 10.1.3. *Niech $\varOmega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $f : \varOmega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$) o stałym rzędzie d. Wtedy dowolny punkt $a \in \varOmega$ ma otoczenie otwarte $U \subset \varOmega$ takie, że $f(U)$ jest d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^m$.*

Dowód. Przypadek $d = 0$ jest trywialny, bowiem wtedy f jest stałe na każdej składowej zbioru $\varOmega$. Niech $1 \leqslant d \leqslant \min\{m,n\}$. Ustalmy $a \in \varOmega$. Na podstawie twierdzenia o rzędzie istnieją zbiory otwarte $U \subset \varOmega$, $V \subset \mathbb{R}^m$ i dyfeomorfizmy klasy $\mathcal{C}^k$ $\alpha : \varDelta^n \longrightarrow U$, $\beta : V \longrightarrow \varDelta^m$ takie, że $\alpha(0) = a$, $\beta(f(a)) = 0$, $f(U) \subset V$, $\beta \circ f \circ \alpha(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_d, \underbrace{0, \dots, 0}_{(m-d)\times})$, $t = (t_1, \dots, t_n) \in \varDelta^n$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] & V \arrow[d, "\beta"] \\ \varDelta^n \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^d}, 0)"] & \varDelta^m \end{tikzcd}$$

W tej sytuacji $f(U) = \beta^{-1}(\varDelta^d \times \{0\}^{m-d})$, a zatem odwzorowanie $\varDelta^d \ni t \longmapsto \beta^{-1}(t_1, \dots, t_d, 0, \dots, 0)$ jest parametryzacją $f(U)$ klasy $\mathcal{C}^k$. $\square$

Twierdzenie 10.1.4 (Opisy podrozmaitości). *Niech $M \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leqslant d \leqslant n-1$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *M jest d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$;*

(ii) $\forall_{a \in M}\ \exists_{d' \geqslant d}\ \exists_{P \in \operatorname{top}\mathbb{R}^{d'}}\ \exists_{U \in \operatorname{top} M:\, a \in U}\ \exists_{p : P \to U} : p : P \longrightarrow U$ *jest odwzorowaniem otwartym* ([3]), $p(P) = U$, $p \in \mathcal{C}^k(P, \mathbb{R}^n)$, $\operatorname{rank} p'(t) = d$, $t \in P$;

(iii) $\forall_{a \in M}\ \exists_{\varOmega \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n:\, a \in \varOmega}\ \exists_{\varPhi : \varOmega \longrightarrow \varDelta^n} : \varPhi$ *jest dyfeomorfizmem klasy* $\mathcal{C}^k$, $\varPhi(M \cap \varOmega) = \varDelta^d \times \{0\}^{n-d}$ ([4]);

(iv) $\forall_{a \in M}\ \exists_{\varOmega \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n:\, a \in \varOmega}\ \exists_{Q \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n}\ \exists_{V \subset \mathbb{R}^n}\ \exists_{\varPhi : \varOmega \longrightarrow Q} : V$ *jest d–wymiarową podprzestrzenią wektorową* $\mathbb{R}^n$, $\varPhi$ *jest dyfeomorfizmem klasy* $\mathcal{C}^k$, $\varPhi(M \cap \varOmega) = V \cap Q$;

(v) $\forall_{a \in M}\ \exists_{\ell \geqslant n-d}\ \exists_{\varOmega \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n:\, a \in \varOmega}\ \exists_{f \in \mathcal{C}^k(\varOmega, \mathbb{R}^\ell)} : M \cap \varOmega = f^{-1}(0)$, $\operatorname{rank} f'(x) = n-d$, $x \in \varOmega$;

(vi) $\forall_{a \in M}\ \exists_{\varOmega \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n:\, a \in \varOmega}\ \exists_{f \in \mathcal{C}^k(\varOmega, \mathbb{R}^{n-d})} : M \cap \varOmega = f^{-1}(0)$, $\operatorname{rank} f'(x) = n-d$, $x \in \varOmega$;

(vii) $\forall_{a \in M}\ \exists_{\varOmega \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n:\, a \in \varOmega}\ \exists_{P \in \operatorname{top}\mathbb{R}^d}\ \exists_{\varphi \in \mathcal{C}^k(P, \mathbb{R}^{n-d})}\ \exists_{\sigma \in S_n} : P$ *jest wypukły*, $\sigma(M \cap \varOmega) = \{(t, \varphi(t)) : t \in P\}$, *gdzie* $\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma(x_1, \dots, x_n) := (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$;

(viii) $\forall_{a \in M}\ \exists_{\varOmega \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n:\, a \in \varOmega}\ \exists_{P \in \operatorname{top}\mathbb{R}^d}\ \exists_{p : P \longrightarrow M \cap \varOmega}\ \exists_{s : \varOmega \longrightarrow P} : P$ *jest wypukły*, $p \in \mathcal{C}^k(P, \mathbb{R}^n)$, $s \in \mathcal{C}^k(\varOmega, \mathbb{R}^d)$, $M \cap \varOmega = p(P)$, $s \circ p = \mathrm{id}_P$.

Zauważmy, że w warunku (viii) odwzorowanie $r := p \circ s : \varOmega \longrightarrow M \cap \varOmega$ jest retrakcją klasy $\mathcal{C}^k$.

Dowód. Implikacje (i) $\Longrightarrow$ (ii), (iii) $\Longrightarrow$ (iv) są oczywiste. Implikacja (ii) $\Longrightarrow$ (iii) wynika z dowodu Twierdzenia 10.1.3.

(iv) $\Longrightarrow$ (v): Niech $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie izomorfizmem liniowym takim, że $L(V) = \{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d$. Zdefiniujmy $g := L \circ \varPhi$, $f := (g_1, \dots, g_{n-d}) : \varOmega \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d} = \mathbb{R}^\ell$.

([3]) Tzn. $p(\operatorname{top} P) \subset \operatorname{top} U$.

([4]) Takie odwzorowanie $\varPhi$ będziemy nazywać *odwzorowaniem rozpłaszczającym*.

(v) $\Longrightarrow$ (vi): Na podstawie twierdzenia o rzędzie istnieją zbiory otwarte $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^\ell$ oraz dyfeomorfizmy klasy $\mathcal{C}^k$ $\alpha : \varDelta^n \longrightarrow A$, $\beta : B \longrightarrow \varDelta^\ell$ takie, że $a \in A \subset \varOmega$, $\alpha(0) = a$, $f(A) \subset B$, $\beta(0) = 0$, $\beta \circ f \circ \alpha(t) = (t_1, \dots, t_{n-d}, 0, \dots, 0)$, $t \in \varDelta^n$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad f \quad} & B \\ \alpha \Big\uparrow & & \Big\downarrow \beta \\ \varDelta^n & \xrightarrow{(\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{n-d}}, 0)} & \varDelta^m \end{array}$$

Niech $g := \alpha^{-1}$, $h := (g_1, \dots, g_{n-d}) : A \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d}$. Oczywiście $\operatorname{rank} h'(x) = n - d$, $x \in \varDelta^n$, oraz $M \cap A = \{x \in A : f(x) = 0\} = \{x \in A : \beta \circ f(x) = 0\} = \{x \in A : (\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{n-d}}, 0) \circ \alpha^{-1}(x) = 0\} = h^{-1}(0)$.

(vi) $\Longrightarrow$ (vii): Po permutacji zmiennych, można założyć, że $\det \big[\frac{\partial f_i}{\partial x_{d+j}}(a)\big]_{i,j=1,\dots,n-d} \neq 0$. Teraz wystarczy tylko skorzystać z twierdzenia o odwzorowaniu uwikłanym (zbiór U_1 w twierdzeniu o odwzorowaniu uwikłanym (a więc P w (vii)) można zawsze wybrać w klasie obszarów wypukłych).

(vii) $\Longrightarrow$ (viii): Niech $p(t) := \sigma^{-1}(t, \varphi(t))$, $t \in P$, $s(x) := \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^d}(\sigma(x))$, $x \in \mathbb{R}^n$. Oczywiście, $M \cap \varOmega = p(P)$ oraz $s \circ p = \mathrm{id}_P$. Pozostaje tylko zmodyfikować zbiór $\varOmega$ i zastąpić go przez $s^{-1}(P)$.

(viii) $\Longrightarrow$ (i): Niech $U := M \cap \varOmega$. Oczywiście $p : P \longrightarrow U$ jest homeomorfizmem ($p^{-1} = s|_U$). Pozostaje zauważyć, że ze związku $s'(p(t)) \circ p'(t) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}$, $t \in P$, wynika łatwo, że $\operatorname{rank} p'(t) = d$ dla $t \in P$. $\square$

Przykład 10.1.5. Niech $\varOmega := (\mathbb{R}^n)_*$, $f(x) := \|x\|^2 - 1$, $x \in \varOmega$. Wtedy $\operatorname{rank} f'(x) = 1$, $x \in \varOmega$, oraz $f^{-1}(0) = \mathbb{S}_{n-1}$, a zatem na podstawie Twierdzenia 10.1.4(vi), $\mathbb{S}_{n-1}$ jest $(n-1)$–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^\omega$ (por. Obserwacja 10.1.2(i)).

Odnotujmy, że prawdziwe jest następujące wysoce nietrywialne twierdzenie (zob. również Twierdzenie 10.1.22).

Twierdzenie* 10.1.6 (Twierdzenie o retrakcji [5][6])**.** *Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie niepustym zbiorem spójnym i niech $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Wtedy M jest podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją zbiór otwarty $\varOmega \supset M$ oraz retrakcja $r : \varOmega \longrightarrow M$ klasy $\mathcal{C}^k$.*

Dowód implikacji ($\Longleftarrow$) w Twierdzeniu 10.1.6. Niech $d := \max\{\operatorname{rank} r'(x) : x \in \varOmega\}$. Jeżeli $d = 0$, to r jest odwzorowaniem stałym na składowej spójnej zbioru $\varOmega$ zawierającej M, a wtedy M musi być punktem.

Załóżmy, że $1 \leqslant d \leqslant n$. Ponieważ, $r \circ r = r$, zatem $r'(r(a)) \circ r'(a) = r'(a)$ dla dowolnego $a \in \varOmega$. W szczególności, $r'(a) \circ r'(a) = r'(a)$ dla dowolnego $a \in M$, a stąd $r'(a)(X) = X$ dla dowolnego wektora $X \in V_a := r'(a)(\mathbb{R}^n)$, $a \in M$. Niech $\varOmega_0 := \{x \in \varOmega : \operatorname{rank} r'(x) = d\}$, $M_0 := M \cap \varOmega_0$. Zauważmy, że $\varOmega_0$ jest niepustym zbiorem otwartym. Na wstępie zauważmy, że $r(\varOmega_0) = M_0$. Istotnie, dla $a \in \varOmega_0$ mamy $d \geqslant \operatorname{rank} r'(r(a)) = \dim r'(r(a))(\mathbb{R}^n) \geqslant \dim r'(r(a))(r'(a)(\mathbb{R}^n)) = \dim r'(a)(\mathbb{R}^n) = d$.

Na podstawie Twierdzenia 10.1.3, każdy punkt $a \in M_0$ posiada otoczenie $U \subset \varOmega_0$ takie, że $r(U)$ jest d-wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$. Wtedy również $U \cap r(U)$ jest d–wymiarową rozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$. Z drugiej strony, $U \cap r(U) = U \cap M_0$, co pokazuje, że $U \cap r(U)$ jest otwarty w M_0. W takim razie M_0 jest d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$.

Teraz pokażemy, że $M_0 = M$ (co zakończy dowód). Ponieważ M_0 jest niepustym podzbiorem otwartym M, a M jest spójne, więc wystarczy pokazać, że M_0 jest domknięte w M. Przypomnijmy, że $r'(a)(V_a) = V_a$, $a \in M$, oraz $\dim V_a = d$, $a \in M_0$. Dla $a \in M_0$ niech $L_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie izometrią ($L_a L_a^t = \mathbb{I}_n$) taką, że $L_a(V_a) = \mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}$ i niech $W_a := L_a r'(a) L_a^{-1}$. Wtedy $W_a(X) = X$ dla $X \in \mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}$, co oznacza, że $W_a = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_d & , & *_{d \times (n-d)} \\ 0_{(n-d)\times d} & , & *_{(n-d)\times(n-d)} \end{bmatrix}$.

Niech teraz $M_0 \ni a_s \longrightarrow a_0 \in M$. Ponieważ macierze L_{a_s} są ortogonalne, możemy (przechodząc do podciągu) załozyć, że $L_{a_s} \longrightarrow L$, gdzie L jest ortogonalna. Wtedy $W_{a_s} = L_{a_s} r'(a_s) L_{a_s}^{-1} \longrightarrow L r'(a) L^{-1}$, co oznacza, że $\operatorname{rank} V_a = d$, a więc $a \in M_0$. $\square$

Twierdzenie 10.1.7. *Niech $M \in \mathcal{M}_d^k(\mathbb{R}^n)$, $d \geqslant 1$ i niech $p : P \longrightarrow U$, $q : Q \longrightarrow V$ będą dwiema lokalnymi parametryzacjami takimi, że $U \cap V \neq \varnothing$. Wtedy odwzorowanie $\varphi := p^{-1} \circ q : q^{-1}(U \cap V) \longrightarrow p^{-1}(U \cap V)$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$; odwzorowanie φ nosi nazwę* funkcji przejścia.

(5) Zob. H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer Verlag, Berlin, 1969, Theorem 3.1.20.

(6) Herbert Federer (1920–2010).

Dowód. Przypadek $d = n$ jest oczywisty. Załóżmy, że $d \leqslant n-1$. Oczywiście, φ jest homeomorfizmem. Wystarczy więc sprawdzić, że jest klasy $\mathcal{C}^k$ (a następnie zamienić rolami p i q). Problem ma teraz charakter lokalny. Ustalmy $a \in U \cap V$ i niech $p(t_0) = a = q(u_0)$. Na podstawie twierdzenia o rzędzie istnieją otoczenie A_1 punktu t_0 w P, otoczenie A_2 punktu u_0 w Q, otoczenia B_1, B_2 punktu a w $\mathbb{R}^n$, dyfeomorfizmy klasy $\mathcal{C}^k$ $\alpha_j : \varDelta^d \longrightarrow A_j$, $\beta_j : B_j \longrightarrow \varDelta^n$, $j = 1, 2$, takie, że: $p(A_1) \subset B_1$, $q(A_2) \subset B_2$, $\alpha_1(0) = t_0$, $\alpha_2(0) = u_0$, $\beta_j(a) = 0$, $j = 1, 2$, $\beta_1 \circ p \circ \alpha_1(\xi) = (\xi, 0)$, $\xi \in \varDelta^d$, $\beta_2 \circ q \circ \alpha_2(\eta) = (\eta, 0)$, $\eta \in \varDelta^d$.

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "p"] & B_1\ B_2 \arrow[d, "\beta_1"', "\beta_2"] & A_2 \arrow[l, "q"'] \\
\varDelta^d \arrow[u, "\alpha_1"] \arrow[r, "(\mathrm{id},0)"] & \varDelta^n & \varDelta^d \arrow[u, "\alpha_2"'] \arrow[l, "(\mathrm{id},0)"']
\end{tikzcd}
$$

Stąd wynika, że na zbiorze $q^{-1}(p(A_1) \cap B_2)$ zachodzi równość

$$\varphi = p^{-1} \circ q = \alpha_1 \circ \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^d} \circ \beta_1 \circ \beta_2^{-1} \circ (\alpha_2^{-1}, 0),$$

która dowodzi, że φ jest klasy $\mathcal{C}^k$ w otoczeniu u_0. $\square$

Definicja 10.1.8. Niech $M \in \mathcal{M}_d^k(\mathbb{R}^n)$, $d \geqslant 1$ i niech F będzie dowolną przestrzenią unormowaną. Powiemy, że odwzorowanie $f : M \longrightarrow F$ jest *k–krotnie różniczkowalne w punkcie* $a \in M$ ($f \in \mathcal{D}^k(M, F; a)$), jeżeli dla dowolnej parametryzacji lokalnej $p : P \longrightarrow U$ takiej, że $a \in U$, mamy $f \circ p \in \mathcal{D}^k(P, F; p^{-1}(a))$. Podobnie, powiemy, że odwzorowanie $f : M \longrightarrow F$ jest *klasy $\mathcal{C}^k$ na M* ($f \in \mathcal{C}^k(M, F)$), jeżeli dla dowolnej parametryzacji lokalnej $p : P \longrightarrow U$ odwzorowanie $f \circ p$ jest klasy $\mathcal{C}^k(P, F)$.

Obserwacja 10.1.9. (a) Zauważmy, że definiujemy tylko pojęcie różniczkowalności, ale nie definiujemy $f^{(k)}(a)$.

(b) Dla $d = n$ wprowadzone powyżej pojęcia są zgodne ze standardowymi definicjami.

(c) $\mathcal{D}^k(M, F; a)$ i $\mathcal{C}^k(M, F)$ są przestrzeniami wektorowymi.

(d) Jeżeli $f \in \mathcal{D}^k(M, F; a)$ i $\psi \in \mathcal{D}^k(\varOmega, G; f(a))$, gdzie $\varOmega$ jest zbiorem otwartym w F, G jest przestrzenią unormowaną i $f(M) \subset \varOmega$, to $\psi \circ f \in \mathcal{D}^k(M, G; a)$.

(e) Jeżeli $f \in \mathcal{C}^k(M, F)$, $f(M) \subset \varOmega$ i $\psi \in \mathcal{C}^k(\varOmega, G)$, to $\psi \circ f \in \mathcal{C}^k(M, G)$.

Twierdzenie 10.1.10. *Dla dowolnego odwzorowania $f : M \longrightarrow F$ i punktu $a \in M$ następujące warunki są równoważne:*

(i) *$f \in \mathcal{D}^k(M, F; a)$;*

(ii) *istnieje lokalna parametryzacja $p : P \longrightarrow U$ taka, że $a \in U$ i $f \circ p \in \mathcal{D}^k(P, F; p^{-1}(a))$;*

(iii) *istnieje otoczenie $\varOmega \subset \mathbb{R}^n$ punktu a oraz $\widetilde{f} : \varOmega \longrightarrow F$ takie, że $\widetilde{f} \in \mathcal{D}^k(\varOmega, F; a)$ oraz $\widetilde{f} = f$ na $M \cap \varOmega$.*

Dowód. To, że (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) wynika wprost z Twierdzenia 10.1.7.

(i) $\Longrightarrow$ (iii): Niech $\varOmega$, P, p, s będą takie, jak w Twierdzeniu 10.1.4(viii). Przypomnijmy, że $p : P \longrightarrow M \cap \varOmega$ jest lokalną parametryzacją (por. dowód implikacji (viii) $\Longrightarrow$ (i) w Twierdzeniu 10.1.4). Zdefiniujmy $\widetilde{f} := (f \circ p) \circ s$. Oczywiście, $\widetilde{f} = f$ na $M \cap \varOmega$ oraz $\widetilde{f} \in \mathcal{D}^k(\varOmega, F; a)$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Rozważmy dowolną parametryzację lokalną $p : P \longrightarrow U$ ($a \in U$) i niech $p(t_0) = a$. Niech $\varOmega$, $\widetilde{f}$ będą jak w (iii). Możemy założyć, że $U \subset \varOmega$. Wtedy $f \circ p = \widetilde{f} \circ p$, a stąd oczywiście wynika, że $f \circ p \in \mathcal{D}^k(P, F; t_0)$. $\square$

W ten sam sposób można wykazać następujący wynik (Ćwiczenie).

Twierdzenie 10.1.11. *Dla dowolnego odwzorowania $f : M \longrightarrow F$ następujące warunki są równoważne:*

(i) *$f \in \mathcal{C}^k(M, F)$;*

(ii) *dla dowolnego punktu $a \in M$ istnieje lokalna parametryzacja $p : P \longrightarrow U$ taka, że $a \in U$ i $f \circ p \in \mathcal{C}^k(P, F)$;*

(iii) *dla dowolnego punktu $a \in M$ istnieje otoczenie $\varOmega \subset \mathbb{R}^n$ oraz $\widetilde{f} \in \mathcal{C}^k(\varOmega, F)$ takie, że $\widetilde{f} = f$ na $M \cap \varOmega$.*

Obserwacja 10.1.12. (a) Jeżeli $p : P \longrightarrow U$ jest lokalną parametryzacją klasy $\mathcal{C}^k$, to $p^{-1} \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^d)$.

(b) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{D}^k(\Omega, \mathbb{R}^n; u_0)$ ($\Omega \in \operatorname{top} E$, zaś E jest przestrzenią unormowaną), $\varphi(\Omega) \subset M$ i $f \in \mathcal{D}^k(M, F; \varphi(u_0))$, to $f \circ \varphi \in \mathcal{D}^k(\Omega, F; u_0)$.

Istotnie, wystarczy wykorzystać Twierdzenie 10.1.10(iii) i zauważyć, że w otoczeniu punktu u_0 mamy $f \circ \varphi = \widetilde{f} \circ \varphi$.

(c) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\varphi(\Omega) \subset M$ i $f \in \mathcal{C}^k(M, F)$, to $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^k(\Omega, F)$.

Istotnie, wystarczy wykorzystać lokalnie Twierdzenie 10.1.11(iii).

Definicja 10.1.13. Niech M będzie d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^n$ ($1 \leqslant d \leqslant n$). Niech $a \in M$ i niech $p : P \longrightarrow U$ będzie dowolną lokalną parametryzacją taką, że $a \in U$. Przyjmijmy, że $a = p(t_0)$. Przestrzeń $T_a M := p'(t_0)(\mathbb{R}^d)$ nazywamy *przestrzenią styczną do M w punkcie a*.

Oczywiście, jeżeli $d = n$, to $T_a M = \mathbb{R}^n$.

Zauważmy, że definicja jest poprawna, bowiem na podstawie Twierdzenia 10.1.7, jeżeli $q : Q \longrightarrow V$ jest jakąś inną parametryzacją taką, że $q(u_0) = a$, to $q = p \circ \varphi$, gdzie φ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^1$, $\varphi(u_0) = t_0$. W szczególności, ponieważ $\varphi'(u_0)$ jest izomorfizmem, zatem $q'(u_0)(\mathbb{R}^d) = p'(t_0)(\varphi'(u_0)(\mathbb{R}^d)) = p'(t_0)(\mathbb{R}^d)$.

Przyjmujemy ponadto, że $T_a M := \{0\}$, jeżeli $d = 0$.

Oczywiście $\dim T_a M = d$.

Twierdzenie 10.1.14. *Niech M będzie d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^n$ ($1 \leqslant d \leqslant n-1$), $a \in M$ i niech $\Omega \in \operatorname{top} \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^\ell)$ będzie takie, że $a \in \Omega$, $M \cap \Omega = f^{-1}(0)$ i $\operatorname{rank} f'(x) = n - d$, $x \in \Omega$ (7). Wtedy $T_a M = \operatorname{Ker} f'(a)$.*

Dowód. Niech $V := \operatorname{Ker} f'(a)$. Odnotujmy, że $\dim V = d$. Niech $p : P \longrightarrow U$, $U \subset \Omega$, będzie dowolną lokalną parametryzacją, $p(t_0) = a$. Ponieważ $f \circ p \equiv 0$, zatem $f'(a) \circ p'(t_0) = 0$, a stąd $T_a M \subset V$, co wobec równości wymiarów, daje żądaną równość. □

Twierdzenie 10.1.15 (Równoważne opisy przestrzeni stycznej). *Niech M będzie d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$ ($1 \leqslant d \leqslant n-1$), $a \in M$, $X \in \mathbb{R}^n$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) *$X \in T_a M$;*

(ii) *istnieje $\varepsilon > 0$ oraz odwzorowanie $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ klasy $\mathcal{C}^k$ (8) takie, że $\gamma(0) = a$, $\gamma'(0) = X$;*

(iii) *istnieją ciągi $(a_\nu)_{\nu=1}^\infty \subset M$, $(r_\nu)_{\nu=1}^\infty \subset (0, +\infty)$ takie, że $a_\nu \longrightarrow a$, $r_\nu(a_\nu - a) \longrightarrow X$ (9).*

Dowód. Dla $X = 0$ równoważność warunków jest oczywista. Przyjmujemy dalej, że $X \neq 0$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Niech $p : P \longrightarrow U$ będzie lokalną parametryzacją, $p(t_0) = a$. Niech $Y \in \mathbb{R}^d$ będzie taki, że $X = p'(t_0)(Y)$. Wtedy $X = \gamma'(0)$, gdzie $\gamma(\tau) := p(t_0 + \tau Y)$, $|\tau| < \varepsilon$ (ε małe).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Wystarczy przyjąć $a_\nu := \gamma(\frac{1}{\nu})$, $r_\nu := \nu$, $\nu \gg 1$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Niech $p : P \longrightarrow U$ będzie lokalną parametryzacją, $p(t_0) = a$. Możemy założyć, że $a_\nu = p(t_\nu)$, $t_\nu \in P$, $\nu \geqslant 1$. Oczywiście $t_\nu \longrightarrow t_0$ (10). Możemy również założyć, że $t_\nu \neq t_0$, $\nu \geqslant 1$, oraz (przechodząc do podciągu), że $Y_\nu := \frac{t_\nu - t_0}{\|t_\nu - t_0\|} \longrightarrow Y$ dla pewnego $Y \in \mathbb{R}^d$.

Zauważmy, że $r_\nu \|a_\nu - a\| \longrightarrow \|X\|$, a zatem $\frac{a_\nu - a}{\|a_\nu - a\|} \longrightarrow \frac{X}{\|X\|}$. Niech $p(t) = p(t_0) + p'(t_0)(t - t_0) + \alpha(t)\|t - t_0\|$, gdzie $\alpha(t) \longrightarrow 0$ przy $t \longrightarrow t_0$. Ostatecznie mamy:

$$\frac{X}{\|X\|} = \lim_{\nu \to +\infty} \frac{p'(t_0)(Y_\nu) + \alpha(t_\nu)}{\|p'(t_0)(Y_\nu) + \alpha(t_\nu)\|} = \frac{p'(t_0)(Y)}{\|p'(t_0)(Y)\|},$$

co kończy dowód (bo $T_a M$ jest przestrzenią wektorową). □

Twierdzenie 10.1.16. *Niech M będzie d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^n$ ($1 \leqslant d \leqslant n-1$), $a \in M$ i niech $f \in \mathcal{D}(M, F; a)$. Wtedy $\widetilde{f}'(a)|_{T_a M}$ nie zależy od wyboru lokalnego przedłużenia $\widetilde{f}$ różniczkowalnego w punkcie a (11).*

---

(7) Por. Twierdzenie 10.1.4(v).

(8) Jako odwzorowanie $(-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

(9) Odnotujmy czysto geometryczny charakter warunku (iii).

(10) Ponieważ p jest homeomorfizmem.

(11) Przedłużenie takie istnieje na mocy Twierdzenia 10.1.10((iii).

Dowód. Wystarczy pokazać, że jeżeli $g : \Omega \longrightarrow F$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym w punkcie a i takim, że $g = 0$ na $M \cap \Omega$, to $g'(a)|_{T_a M} \equiv 0$.

Istotnie, niech $p : P \longrightarrow U$ będzie dowolną parametryzacją lokalną, $a = p(t_0) \in U \subset \Omega$. Mamy $g \circ p \equiv 0$. Zatem $g'(a) \circ p'(t_0) = 0$, co daje żądaną równość. □

Definicja 10.1.17. W powyższej sytuacji kładziemy

$$f'(a) : T_a M \longrightarrow F, \quad f'(a) := \widetilde{f}'(a)|_{T_a M}.$$

Odnotujmy, że $f'(a) \in \mathcal{L}(T_a M, F)$. Odwzorowanie $f'(a)$ nazywamy *różniczką odwzorowania f w punkcie a*.

Twierdzenie 10.1.18. *Niech M będzie d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^n$ i niech M' będzie d'–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^{n'}$. Niech $f : M \longrightarrow M'$ będzie różniczkowalne w punkcie $a \in M$. Wtedy $f'(a)(T_a M) \subset T_{f(a)} M'$. W szczególności, $f'(a) \in \mathcal{L}(T_a M, T_{f(a)} M')$.*

Jeżeli ponadto f jest bijektywne i f^{-1} jest klasy $\mathcal{C}^1$ (tzn. f jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^1$*), to $f'(a) \in \operatorname{Isom}(T_a M, T_{f(a)} M')$.*

Dowód. Załóżmy, że $M' \cap \Omega' = g^{-1}(0)$, gdzie $\Omega' \in \operatorname{top} \mathbb{R}^{n'}$, $g \in \mathcal{C}^1(\Omega', \mathbb{R}^{n'-d'})$, $\operatorname{rank} g'(y) = n' - d'$, $y \in \Omega'$, $f(a) \in \Omega'$ (por. Twierdzenie 10.1.4(vi)). Niech $\widetilde{f}$ będzie lokalnym przedłużeniem odwzorowania f na otoczenie Ω punktu a. Możemy założyć, że $\widetilde{f}(\Omega) \subset \Omega'$. Wtedy $g \circ \widetilde{f} = 0$ na $M \cap \Omega$, zatem $(g \circ \widetilde{f})'(a) = 0$ na $T_a M$ (por. Twierdzenie 10.1.16). Oznacza to, że $g'(f(a)) \circ \widetilde{f}'(a) = 0$ na $T_a M$, co wobec Twierdzenia 10.1.14, daje żądany wynik. □

Prawdziwe jest następujące fundamentalne twierdzenie

Twierdzenie* 10.1.19 (Whitney, [12])**.** *Dla dowolnej d-wymiarowej ($d \geqslant 1$) podrozmaitości $M \subset \mathbb{R}^n$ klasy $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, istnieje d-wymiarowa podrozmaitość $M' \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ klasy $\mathcal{C}^\omega$ taka, że M i M' są $\mathcal{C}^k$-dyfeomorficzne.*

Uwaga 10.1.20. Dla rozmaitości klasy $\mathcal{C}^2$ i odwzorowań $f : M \longrightarrow F$ mających drugą pochodną w punkcie a należy oprzeć się pokusie zdefiniowania drugiej różniczki w punkcie a jako odwzorowania $f''(a) : T_a M \times T_a M \longrightarrow F$ danego wzorem $f''(a) = \widetilde{f}''(a)|_{T_a M \times T_a M}$, gdzie $\widetilde{f}$ jest lokalnym przedłużeniem f takim, że $\widetilde{f}''(a)$ istnieje.

Istotnie, $\widetilde{f}''(a)|_{T_a M \times T_a M}$ może zależeć od wyboru przedłużenia.

Niech np. $M := \{(t, t^2) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$, $F := \mathbb{R}$, $f := 0$, $a := (0,0)$. Zauważmy, że $T_a M = \mathbb{R} \times \{0\}$. Niech $\widetilde{f}(x,y) := x^2 - y$. Oczywiście $\widetilde{f}$ jest przedłużeniem f, ale $\widetilde{f}''(a)((h_1,0),(h_2,0)) = 2h_1h_2$, $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$.

Lemat 10.1.21 (Lemat o jednoczesnej parametryzacji)**.** *Niech M będzie d–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$ i niech M' będzie d'–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^n$ taką, że $M' \subset M$. Wtedy*

(a) *$d' \leqslant d$;*

(b) *jeżeli $d' = d$, to M' jest podzbiorem otwartym w M;*

(c) *jeżeli $d' < d \leqslant n$, to dla dowolnego punktu $a \in M'$ istnieje lokalna parametryzacja $p : \Delta^d \longrightarrow U$ podrozmaitości M, $a \in U$, taka, że $p(0) = a$ i $p(\Delta^{d'} \times \{0\}^{d-d'}) = M' \cap U$* [13]*.*

W szczególności, jeżeli $d' \geqslant 1$, to odwzorowanie $\widetilde{p} : \Delta^{d'} \longrightarrow M' \cap U$, $\widetilde{p}(v) := p(v, 0)$, jest lokalną parametryzacją dla M' [14]*.*

Dowód. Dla $d' = 0$ twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy, że $d' \geqslant 1$. W szczególności, $d \geqslant 1$.

(a) Wobec Twierdzenia 10.1.15(ii) mamy: $T_a M' \subset T_a M$, $a \in M'$. Stąd $d' = \dim T_a M' \leqslant \dim T_a M = d$.

(b) Weźmy dowolny punkt $a \in M'$ i niech $p : P \longrightarrow U$, $q : Q \longrightarrow V$ będą parametryzacjami lokalnymi dla M i M' takimi, że $a \in U \cap V$ ($P, Q \in \operatorname{top} \mathbb{R}^d$). Możemy założyć, że $V = U \cap M'$. Rozważmy homeomorfizm $\varphi := p^{-1} \circ q : Q \longrightarrow p^{-1}(V)$. Na podstawie Obserwacji 10.1.12 jest to odwzorowanie klasy $\mathcal{C}^k$. Mamy $p \circ \varphi = q$. W szczególności, $p'(\varphi(u)) \circ \varphi'(u) = q'(u)$, skąd wynika, że $\operatorname{rank} \varphi'(u) = d$, $u \in Q$.

---

[12] Zob. H. Whitney, *Differentiable manifolds*, Annals Math. 37 (1936), 645–680, Ch. II, § 8.

[13] Dla $d' = 0$ warunek ten oznacza, że $p(0) = M' \cap U$.

[14] Uwaga na warunek: $\operatorname{rank} \widetilde{p}'(v) = d'$, $v \in \Delta^{d'}$.

Teraz, na podstawie np. twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym, $p^{-1}(V)$ jest podzbiorem otwartym w P, a więc $U \cap M'$ jest zbiorem otwartym w M.

(c) Weźmy dowolną parametryzację lokalną $p : P \longrightarrow U$ podrozmaitości M taką, że $a = p(t_0) \in U$. Niech $N := p^{-1}(M' \cap U)$. Zauważmy, że N jest d'–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^k$ w $\mathbb{R}^d$. Istotnie, dla dowolnego $u_0 \in N$, niech $q : Q \longrightarrow V$ będzie lokalną parametryzacją klasy $\mathcal{C}^k$ podrozmaitości M' i $p(u_0) \in V \subset M' \cap U$. Niech $\varphi := p^{-1} \circ q : Q \longrightarrow p^{-1}(V)$. Oczywiście, tak jak w (b), φ jest homeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$ i $p'(\varphi(u)) \circ \varphi'(u) = q'(u)$, $u \in Q$. Stąd $\operatorname{rank} \varphi'(u) = d'$, $u \in Q$. Tak więc φ jest lokalną parametryzacją podrozmaitości N w otoczeniu u_0.

Teraz, na podstawie Twierdzenia 10.1.4(iii) (zastosowanego do podrozmaitości N) istnieją zbiór otwarty $\Omega \in \operatorname{top} P$, $t_0 \in \Omega$, oraz $\mathcal{C}^k$–dyfeomorfizm $\Phi : \Omega \longrightarrow \Delta^d$ takie, że $\Phi(N \cap \Omega) = \Delta^{d'} \times \{0\}^{d-d'}$.

Poszukiwaną parametryzacją będzie: $p \circ \Phi^{-1} : \Delta^d \longrightarrow p(\Omega)$. □

Obecnie pokażemy następującą prostszą wersję twierdzenia o globalnej retrakcji.

Twierdzenie 10.1.22. *Dla dowolnej d–wymiarowej podrozmaitości M klasy $\mathcal{C}^k$ $(k \in \mathbb{N}_2 \cup \{\infty, \omega\})$ istnieje otoczenie otwarte $M \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ oraz globalna retrakcja $\pi : \Omega \longrightarrow M$ klasy $\mathcal{C}^{k-1}$ taka, że dla dowolnego $x \in \Omega$ mamy $\|x - \pi(x)\| = \operatorname{dist}(x, M)$, przy czy punkt $\pi(x)$ jest jedynym punktem realizującym tę odległość (norma i odległość są euklidesowe).*

Dowód. Możemy założyć, że $1 \leqslant d \leqslant n-1$. Rozpocznijmy od elementarnej obserwacji, że dla $a \in M$ oraz $x \in \mathbb{B}(a, r)$ mamy $\operatorname{dist}(x, M) = \operatorname{dist}(x, M \cap \mathbb{B}(a, 3r))$ (Ćwiczenie). Pozwala to na lokalizację problemu. Ponadto, problem jest oczywiście niezmienniczy względem izometrii euklidesowych. Pozwala to dla dowolnego $a \in M$ na przejście do następującego zagadnienia lokalnego. Najpierw redukujemy sytuację do $a = 0$ oraz $T_a M = \mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}$. Niech $p : P \longrightarrow U$ będzie dowolną lokalną parametryzacją, $0 \in P$, $p(0) = 0 \in U$. Warunek $p'(0)(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}$ oznacza, że $\frac{\partial p_j}{\partial u_k}(0) = 0$, $j = d+1, \dots, n$, $k = 1, \dots, d$. Wynika stąd, że $\det[\frac{\partial p_j}{\partial u_k}(0)]_{j,k=1,\dots,d} \neq 0$. Wobec twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym, możemy więc założyć, że $\psi := (p_1, \dots, p_d) : P \longrightarrow Q$ jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^k$. Wtedy $q := p \circ \psi^{-1} : Q \longrightarrow U$ oraz $q(t) = (t, f(t))$, przy czym $f(0) = 0$ oraz $f'(0) = 0$ [15]. Ostatecznie więc mamy:

$M := \{(t, f(t)) : t \in \Delta^d(r)\}$, gdzie $\Delta^\ell(r) := (-r, r)^\ell \subset \mathbb{R}^\ell$, $f : \Delta^d(r) \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ jest klasy $\mathcal{C}^k$ oraz $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$.

W konsekwencji, dla $x = (x', x'') \in \Delta^d(s) \times \Delta^{n-d}(s)$ przy $0 < s \ll 1$ mamy

$$\operatorname{dist}^2(x, M) = \min\{\|t - x'\|^2 + \|f(t) - x''\|^2 : t \in \Delta^d(r)\} =: \min\{g(x, t) : t \in \Delta^d(r)\}.$$

Jedynego punktu realizującego odległość będziemy szukać w postaci $(\varphi(x), f(\varphi(x)))$, gdzie $\varphi : \Delta^n(s) \longrightarrow \Delta^d(r)$ jest klasy $\mathcal{C}^{k-1}$ (wtedy będziemy mogli przyjąć $\pi(x) := (\varphi(x), f(\varphi(x)))$, $x \in \Delta^n(s)$, $0 < s \ll 1$). Zauważmy, że

$$\frac{\partial g}{\partial t_k}(x, t) = 2\Big(t_k - x_k + \sum_{j=1}^{n-d} (f_j(t) - x_{d+j}) \frac{\partial f_j}{\partial t_k}(t)\Big) =: 2F_k(x, t), \quad k = 1, \dots, d.$$

Tak więc, w otoczeniu punktu $(0, 0)$, $t = \varphi(x)$ powinno być jedynym rozwiązaniem układu równań $F_k(x, t) = 0$, $k = 1, \dots, d$. Oczywiście F_k jest klasy $\mathcal{C}^{k-1}$. Ponadto, $F(0, 0) = 0$ oraz

$$\frac{\partial F_k}{\partial t_\ell}(x, t) = \delta_{k,\ell} + \sum_{j=1}^{n-d} \Big(\frac{\partial f_j}{\partial t_\ell}(t) \frac{\partial f_j}{\partial t_k}(t) + (f_j(t) - x_{d+j}) \frac{\partial^2 f_j}{\partial t_\ell \partial t_k}(t)\Big).$$

W szczególności,

$$\Big[\frac{\partial F_k}{\partial t_\ell}(0, 0)\Big]_{k,\ell=1,\dots,d} = \mathbb{I}_d.$$

W takim razie, na podstawie twierdzenia o odwzorowaniu uwikłanym, istnieją $0 < s_1, r_1 \ll 1$ oraz odwzorowanie $\varphi : \Delta^n(s_1) \longrightarrow \Delta^d(r_1)$ klasy $\mathcal{C}^{k-1}$ takie, że $t = \varphi(x)$ jest jedynym rozwiązaniem naszego układu dla $(x, t) \in \Delta^n(s_1) \times \Delta^d(r_1)$. Teraz wystarczy jeszcze tylko dobrać $0 < s < s_1$ tak by dla $x \in \Delta^n(s)$ było $\operatorname{dist}(x, M) = \operatorname{dist}(x, M \cap (\Delta^d(r_1) \times \mathbb{R}^{n-d}))$. □

---

(15) Zauważmy, że nasza konstrukcja pokazuje, że lokalnie M jest wykresem nad afiniczną przestrzenią styczną $a + T_a M$ (dla dowolnego $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$).

Przykład 10.1.23. Twierdzenie 10.1.22 nie jest prawdziwe dla $k = 1$. Niech $\theta \in (0,1)$,

$$M := \{(t, |t|^{1+\theta}) : t \in \mathbb{R}\};$$

M jest jednowymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$, przy czym $T_0M = \mathbb{R} \times \{0\}$ (Ćwiczenie). Pokażemy, że dla dowolnego $y > 0$ istnieje $t > 0$ takie, że

$$\operatorname{dist}^2((0,y), M) \leqslant \|(0,y) - (t, t^{1+\theta})\|^2 = t^2 + (y - t^{1+\theta})^2 < y^2 = \|(0,y) - (0,0)\|^2.$$

Oznacza to, że istnieją co najmniej dwa punkty rozmaitości M realizujące odległość. W konsekwencji ciągła retrakcja $\pi : \Omega \longrightarrow M$ taka, jak w Twierdzeniu 10.1.22 nie może istnieć.

Istotnie, warunek $t^2 + (y - t^{1+\theta})^2 < y^2$ oznacza, że $y > \frac{1}{2}(t^{1-\theta} + t^{1+\theta})$, co pozwala zawsze dobrać t.

10.2. Ekstrema warunkowe

Rozważmy następujący problem. Dane są: $M \in \mathcal{M}_d^k(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leqslant d \leqslant n-1)$, punkt $a \in M$ i funkcja $f \in \mathcal{D}^k(M; a)$. Problem polega na znalezieniu (różniczkowych) warunków koniecznych i dostatecznych na to, by f miała w punkcie a ekstremum lokalne, zwane *ekstremum warunkowym*. Nazwa bierze się stąd, że ponieważ problem ma charakter lokalny, to możemy założyć (korzystając z Twierdzenia 10.1.10 i zmniejszając ewentualnie M), że $f = \widetilde{f}|_M$, gdzie $\widetilde{f} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \Omega \in \operatorname{top} \mathbb{R}^n$ i $\widetilde{f}$ jest k–krotnie różniczkowalne w punkcie a, a zatem szukamy ekstremów lokalnych funkcji $\widetilde{f}$ przy warunku „punkt leży na M".

Twierdzenie 10.2.1 (Warunek konieczny na ekstremum warunkowe)**.** *Jeżeli f ma w punkcie a ekstremum warunkowe, to $f'(a) = 0$.*

Dowód. Niech $p : P \longrightarrow U$ będzie lokalną parametryzacją, $p(t_0) = a$. Wtedy $\widetilde{f} \circ p$ ma ekstremum lokalne w punkcie t_0, a zatem $f'(a) \circ p'(t_0) = 0$, co daje żądany wynik. $\square$

Twierdzenie 10.2.2 (Warunek dostateczny na ekstremum warunkowe)**.** *Załóżmy, że dla pewnego $k \geqslant 2$ mamy:*

$$\widetilde{f}'(a) = 0 \text{ na } \mathbb{R}^n, \dots, \widetilde{f}^{(k-1)}(a) = 0 \text{ na } \mathbb{R}^n, \quad \widetilde{f}^{(k)}(a) \not\equiv 0 \text{ na } T_aM.$$

Wtedy:

(a) *jeżeli $\widetilde{f}^{(k)}(a)(X) > 0$ dla $X \in (T_aM)_*$ (16), to f ma w punkcie a silne minimum warunkowe;*

(b) *jeżeli $\widetilde{f}^{(k)}(a)(X) < 0$ dla $X \in (T_aM)_*$, to f ma w punkcie a silne maksimum warunkowe;*

(c) *jeżeli $\widetilde{f}^{(k)}(a)$ przyjmuje na T_aM wartości różnych znaków (17), to f nie ma w punkcie a lokalnego ekstremum warunkowego.*

Dowód. Niech $p : P \longrightarrow U$ będzie dowolną lokalną parametryzacją, $p(t_0) = a$. Niech $g := \widetilde{f} \circ p$. Musimy zbadać ekstremum lokalne (w sensie klasycznym) funkcji g w punkcie t_0. Ze wzoru na pochodną złożenia (Twierdzenie 9.8.6), dla $j = 1, \dots, k$, mamy

$$\begin{aligned} g^{(j)}(t_0)(Y) &= (\widetilde{f} \circ p)^{(j)}(t_0)(Y) \\ &= \sum_{\alpha \in \Pi_j} \frac{j!}{\alpha!} \widetilde{f}^{(\alpha_1 + \dots + \alpha_j)}(a)\Big(\underbrace{\frac{p'(t_0)(Y)}{1!}, \dots, \frac{p'(t_0)(Y)}{1!}}_{\alpha_1 \times}, \dots, \underbrace{\frac{p^{(j)}(t_0)(Y)}{j!}, \dots, \frac{p^{(j)}(t_0)(Y)}{j!}}_{\alpha_j \times}\Big), \quad Y \in \mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

co wobec naszych założeń daje

$$g^{(j)}(t_0) = 0, \quad j = 1, \dots, k-1, \qquad g^{(k)}(t_0)(Y) = \widetilde{f}^{(k)}(a)(p'(t_0)(Y)), \quad Y \in \mathbb{R}^d.$$

Przypomnijmy, że $p'(t_0)(Y) \in (T_aM)_*$ dla $Y \in (\mathbb{R}^d)_*$, a zatem $g^{(k)}(t_0)$ zachowuje się (w sensie określoności) tak, jak $\widetilde{f}^{(k)}(a)$ na T_aM. Teraz wystarczy już tylko zastosować klasyczne twierdzenie o ekstremach lokalnych. $\square$

---

(16) W szczególności, k musi być parzyste.

(17) W szczególności, gdy k jest nieparzyste.

Obserwacja 10.2.3. (a) Z dowodu Twierdzenia 10.2.2 wynika, że odwzorowanie $\widetilde{f}^{(k)}(a)|_{(T_aM)^k}$ nie zależy od wyboru rozszerzenia $\widetilde{f}$ (w klasie rozszerzeń spełniających założenia twierdzenia). Tak więc wystarczy zbadać określoność $\widetilde{f}^{(k)}(a)$ na T_aM dla jednego ustalonego rozszerzenia $\widetilde{f}$ funkcji f takiego, że $\widetilde{f}^{(j)}(a) = 0$, $j = 1, \dots, k-1$ (k parzyste).

(b) Niech $k = 2$. Zauważmy, że warunek $\widetilde{f}'(a) = 0$ nie może zostać zastąpiony warunkiem $f'(a) = 0$. Niech np. $n = 2$, $M := \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$, $a = (0, 0)$, $f(x, x^2) := x^3$ (oczywiście f nie ma ekstremum warunkowego w punkcie a). Niech $\widetilde{f}(x, y) = x^2 - y + x^3$. Widać, że $\widetilde{f} = f$ na M. Ponadto, $f'(a) = 0$ na $T_aM = \mathbb{R} \times \{0\}$ i $\widetilde{f}''(a)((h, 0)) = 2h^2$, $h \in \mathbb{R}$ (a więc spełniony jest warunek (a) z Twierdzenia 10.2.2).

(c) Patrząc na Twierdzenie 10.2.2 (i pamiętając o (a)) widzimy, iż przeszkodą w stosowaniu Twierdzenia 10.2.2 będzie następująca sytuacja: Dla pewnego $1 \leqslant m \leqslant k-1$ znaleźliśmy rozszerzenie $\widetilde{f}$ takie, że:

- $\widetilde{f}$ jest k–krotnie różniczkowalne w punkcie a,
- $\widetilde{f}^{(j)}(a) = 0$, $j = 1, \dots, m-1$ (warunek ten jest pusty dla $m = 1$),
- $\widetilde{f}^{(m)}(a) \neq 0$,
- $\widetilde{f}^{(m)}(a) = 0$ na T_aM (dla $m = 1$ jest to po prostu warunek konieczny na ekstremum warunkowe).

Rozszerzenie takie na nic się nam nie przyda. Pytamy więc, czy możemy znaleźć inne rozszerzenie takie, że $\widetilde{f}^{(j)}(a) = 0$, $j = 1, \dots, m$. Jeżeli tak, to będziemy mieli pewną szansę, że Twierdzenie 10.2.2 rozstrzygnie o ekstremum.

Możemy zawsze założyć, że $M \cap \Omega = g^{-1}(0)$, gdzie $g \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^\ell)$ i $\operatorname{rank} g'(x) = n - d$, $x \in \Omega$. Zauważmy, że dla dowolnego odwzorowania $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_\ell) \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^\ell)$, odwzorowanie

$$\widetilde{f}_\varphi := \widetilde{f} - \varphi_1 g_1 - \dots - \varphi_\ell g_\ell$$

jest przedłużeniem f oraz, że jest ono k–krotnie różniczkowalne w punkcie a.

Twierdzenie 10.2.4 (Metoda mnożników Lagrange'a)**.** (a) *Dla $m = 1$, jeżeli $f'(a) = 0$ na T_aM, to istnieje $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$ takie, że dla funkcji $\widetilde{f}_\lambda := \widetilde{f} - \lambda_1 g_1 - \dots - \lambda_\ell g_\ell$ spełniony jest związek $\widetilde{f}_\lambda'(a) = 0$ na $\mathbb{R}^n$. Liczby $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ noszą nazwę* mnożników Lagrange'a.

(b) *Dla $2 \leqslant m \leqslant k-1$, jeżeli*

- *$\widetilde{f}$ jest k–krotnie różniczkowalne w punkcie a,*
- *$\widetilde{f}^{(j)}(a) = 0$, $j = 1, \dots, m-1$,*
- *$\widetilde{f}^{(m)}(a) = 0$ na T_aM,*

to istnieją wielomiany jednorodne $Q_1, \dots, Q_\ell \in \mathcal{H}^{m-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ takie, że dla odwzorowania

$$\widetilde{f}_Q(x) := \widetilde{f}(x) - \frac{1}{m!} \sum_{i=1}^{\ell} Q_i(x - a) g_i(x), \quad x \in \Omega,$$

mamy: $\widetilde{f}_Q^{(j)}(a) = 0$, $j = 1, \dots, m$.

Dowód. (a) Przypomnijmy, że $T_aM = \operatorname{Ker} g'(a)$ (Twierdzenie 10.1.14). W tej sytuacji warunek $\widetilde{f}'(a) = 0$ na T_aM oznacza, że $\operatorname{Ker} g_1'(a) \cap \dots \cap \operatorname{Ker} g_\ell'(a) \subset \operatorname{Ker} \widetilde{f}'(a)$, a to, na podstawie znanych wyników z algebry, implikuje istnienie λ (zob. dowód (b)).

(b) Na wstępie zauważmy, że dla dowolnych $Q_1, \dots, Q_\ell \in \mathcal{H}^{m-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, na podstawie wzoru Leibniza, mamy:

$$\widetilde{f}_Q^{(j)}(a)(h) = \widetilde{f}^{(j)}(a)(h) - \frac{1}{m!} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} Q_i^{(s)}(0)(h) g_i^{(j-s)}(a)(h), \quad h \in \mathbb{R}^n,\ j = 1, \dots, m.$$

Przypomnijmy, że $Q_i^{(s)} \in \mathcal{H}^{m-1-s}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$. W szczególności, mamy $Q_i^{(s)}(0) = 0$ dla $s = 0, \dots, m-2$. Z drugiej strony $g_i(a) = 0$. Tak więc dla $j = 1, \dots, m-1$, otrzymujemy $\widetilde{f}_Q^{(j)}(a)(h) = 0$. Wiemy, że $Q_i^{(m-1)}(0) = (m-1)! Q_i$. Stąd dla $j = m$ mamy:

$$\widetilde{f}_Q^{(m)}(a)(h) = \widetilde{f}^{(m)}(a)(h) - \frac{1}{m!} \sum_{i=1}^{\ell} \binom{m}{m-1} Q_i^{(m-1)}(0)(h) g_i'(a)(h) = \widetilde{f}^{(m)}(a)(h) - \sum_{i=1}^{\ell} Q_i(h) g_i'(a)(h),$$
$$h \in \mathbb{R}^n.$$

Tak więc cały problem sprowadza się do doboru $Q_i \in \mathcal{H}^{m-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, \ell$, w ten sposób by

$$\widetilde{f}^{(m)}(a)(h) = \sum_{i=1}^{\ell} Q_i(h) g_i'(a)(h), \quad h \in \mathbb{R}^n.$$

Ponieważ $W := \widetilde{f}^{(m)}(a) \in \mathcal{H}^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ i $W = 0$ na T_aM, zatem wystarczy już tylko wykorzystać znane wyniki z algebry, aby stwierdzić, że W da się przedstawić w żądanej postaci. Możemy skorzystać np. z takiego rozumowania: Niech $L_1, \dots, L_{n-d}$ będzie dowolnym liniowo niezależnym podukładem układu $g_1'(a), \dots, g_\ell'(a)$. Wybierzmy d form liniowych $L_{n-d+1}, \dots, L_n$ w ten sposób, że odwzorowanie $L := (L_1, \dots, L_n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jest izomorfizmem. Niech $V := W \circ L^{-1}$. Wtedy $V \in \mathcal{H}^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ i $V = 0$ na $\{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d$. Oznacza to, że wielomian V można zapisać w postaci $V(x) = x_1 V_1(x) + \dots + x_{n-d} V_{n-d}(x)$, gdzie $V_i \in \mathcal{H}^{m-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n-d$ (postać tę łatwo uzyskać przez zwykłe grupowanie wyrazów z wykorzystaniem warunku $V(0, \dots, 0, x_{n-d+1}, \dots, x_n) \equiv 0$). Zdefiniujmy $Q_i := V_i \circ L$, $i = 1, \dots, n-d$. Ostatecznie $W = Q_1 L_1 + \dots + Q_{n-d} L_{n-d}$. □

Przykład 10.2.5. Niech $M := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \dots + x_n = c,\ x_1, \dots, x_n > 0\}$, gdzie $n \geqslant 2$ i $c > 0$ jest ustaloną stałą (M jest $(n-1)$–wymiarową podrozmaitością w $\mathbb{R}^n$). Niech dalej $\widetilde{f}(x_1, \dots, x_n) := x_1 \cdots x_n$. Szukamy ekstremów warunkowych $\widetilde{f}$ na M.

Stosujemy metodę mnożników Lagrange'a. Niech $\widetilde{f}_\lambda(x) := \widetilde{f}(x) - \lambda(x_1 + \dots + x_n - c)$. Punkt podejrzany o ekstremum warunkowe, to punkt $a \in M$ taki, że

$$\frac{\partial \widetilde{f}_\lambda}{\partial x_j}(a) = \prod_{k \neq j} a_k - \lambda = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Dostajemy stąd łatwo $a = (c/n, \dots, c/n)$ i $\lambda = (c/n)^{n-1}$. Teraz przechodzimy do badania zachowania się $\widetilde{f}_\lambda''(a)$ na T_aM. Oczywiście $T_aM = \{(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n : X_1 + \dots + X_n = 0\}$, zaś

$$\widetilde{f}_\lambda''(a)(X) = \sum_{j \neq k} \Big(\frac{c}{n}\Big)^{n-2} X_j X_k, \quad X \in \mathbb{R}^n.$$

Wynika stąd, że

$$\widetilde{f}_\lambda''(a)(X) = -\Big(\frac{c}{n}\Big)^{n-2} \|X\|^2 < 0, \quad X \in (T_aM)_*,$$

a więc $\widetilde{f}$ ma w punkcie a maksimum warunkowe, czyli

$$x_1 \cdots x_n \leqslant \Big(\frac{c}{n}\Big)^n = \Big(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\Big)^n, \quad x_1, \dots, x_n \geqslant 0.$$

10.3. Orientacja

Definicja 10.3.1. Niech E będzie n–wymiarową rzeczywistą przestrzenią wektorową ($1 \leqslant n < \infty$) i niech $\boldsymbol{B}(E)$ oznacza rodzinę wszystkich baz E. Dla dowolnych dwóch baz $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$, $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_n) \in \boldsymbol{B}(E)$ niech $A = A(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})$ oznacza macierz przejścia od $\boldsymbol{e}$ do $\boldsymbol{f}$, tzn. $f_j = \sum_{k=1}^{n} A_{k,j} e_k$, $j = 1, \dots, n$.

Oczywiście $A(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}) = \mathrm{id}$, $A(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}) = A(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})^{-1}$, $A(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{g}) = A(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}) \cdot A(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g})$. W zbiorze $\boldsymbol{B}(E)$ wprowadzamy relację $\boldsymbol{e} \sim \boldsymbol{f} :\Longleftrightarrow \det A(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}) > 0$. Jest to relacja równoważnościowa. Niech $\mathcal{O}(E) := \boldsymbol{B}(E)/\sim$. Każdą klasę równoważności z $\mathcal{O}(E)$ nazywamy *orientacją* E.

Dla bazy $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ niech $\widehat{\boldsymbol{e}} := (-e_1, e_2, \dots e_n)$. Zauważmy, że $\det A(\boldsymbol{e}, \widehat{\boldsymbol{e}}) = -1 < 0$, a więc $\boldsymbol{e} \not\sim \widehat{\boldsymbol{e}}$, czyli $[\boldsymbol{e}]_\sim \neq [\widehat{\boldsymbol{e}}]_\sim$. Ponadto, dla dowolnej bazy $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{B}(E)$ albo $\boldsymbol{f} \sim \boldsymbol{e}$ albo $\boldsymbol{f} \sim \widehat{\boldsymbol{e}}$. Oznacza to, że na E istnieją dokładnie dwie orientacje. Żadna z nich nie jest wyróżniona. Jeżeli ustalimy jedną, np. O, to drugą oznaczamy przez $-O$.

W przypadku gdy $E = \mathbb{R}^n$, możemy wyróżnić orientację wyznaczoną przez bazę kanoniczną. Orientację tę oznaczamy przez $[\mathbb{R}^n]_+$ i nazywamy *orientacją kanoniczną*. Niech $[\mathbb{R}^n]_- := -[\mathbb{R}^n]_+$. Dla $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n) \in \boldsymbol{B}(\mathbb{R}^n)$, $e_j = (e_{j,1}, \dots, e_{j,n})$, $j = 1, \dots, n$ mamy: $[\boldsymbol{e}]_\sim = [\mathbb{R}^n]_+ \iff \det[e_{j,k}] > 0$.

Jest oczywiste, że dowolny izomorfizm $L : E \longrightarrow F$ generuje bijekcję $\mathcal{O}(E) \longrightarrow \mathcal{O}(F)$, $[\boldsymbol{e}]_\sim \longmapsto [L(\boldsymbol{e})]_\sim$.

Jeżeli $E = F \oplus G$, $\dim F = p$, $\dim G = q$, $p, q \geqslant 1$, $p + q = n$, to mamy naturalne odwzorowanie $\Theta : \boldsymbol{B}(F) \times \boldsymbol{B}(G) \longrightarrow \boldsymbol{B}(E)$ dane wzorem $\Theta((f_1, \dots, f_p), (g_1, \dots, g_q)) := (e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$. Jeżeli ustalimy jakąś orientację $O_0 \in \mathcal{O}(E)$, to Θ indukuje odwzorowanie $\Phi : \mathcal{O}(F) \longrightarrow \mathcal{O}(G)$ poprzez relację $\Phi([\boldsymbol{f}]_\sim) = [\boldsymbol{g}]_\sim :\iff [\Theta(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g})]_\sim = O_0$. Zauważmy, że $A(\Theta(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}), \Theta(\boldsymbol{f}', \boldsymbol{g}')) = \begin{bmatrix} A(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}') & 0 \\ 0 & A(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}') \end{bmatrix}$, a więc Φ jest dobrze określone i injektywne. Ponadto, dla dowolnych $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{B}(F)$ i $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{B}(G)$ albo $\Phi([\boldsymbol{f}]_\sim) = [\boldsymbol{g}]_\sim$ albo $\Phi([\widehat{\boldsymbol{f}}]_\sim) = [\boldsymbol{g}]_\sim$, a więc Φ jest bijekcją. W tym sensie „zadać orientację F" to to samo, co „zadać orientację G" (przy ustalonej orientacji O_0).

Powyższą konstrukcję będziemy stosować do sytuacji: $E = \mathbb{R}^n$, $F = V$, $1 \leqslant \dim V = d \leqslant n - 1$, $G = V^\perp := \{a \in \mathbb{R}^n : \forall_{x \in V} : \langle a, x \rangle = 0\}$, gdzie $\langle\ ,\ \rangle$ oznacza standardowy iloczyn skalarny, $O_0 = [\mathbb{R}^n]_+$. Dla $O \in \mathcal{O}(V)$ będziemy krótko pisać $O^\perp := \Phi(O)$.

Definicja 10.3.2. Niech teraz $M \in \mathcal{M}_d^1(\mathbb{R}^n)$. Jeżeli $d = 0$, to przez *orientację* M rozumiemy dowolne odwzorowanie $O : M \longrightarrow \{-1, +1\}$.

Jeżeli $d \geqslant 1$, to przez *orientację* M rozumiemy dowolne odwzorowanie $M \ni x \overset{O}{\longmapsto} O(x) \in \mathcal{O}(T_x M)$ takie, że dla dowolnego punktu $a \in M$ istnieje lokalna parametryzacja $p : P \longrightarrow U$, $a \in U$, taka, że $O(p(t)) = p'(t)([\mathbb{R}^d]_+)$, $t \in P$. W tej sytuacji mówimy, że parametryzacja $p : P \longrightarrow U$ jest *zgodna z orientacją* O.

Niech $\mathcal{O}(M)$ oznacza zbiór wszystkich orientacji M. Powiemy, że rozmaitość jest *orientowalna*, jeżeli $\mathcal{O}(M) \neq \varnothing$. Dalej zajmować się będziemy jedynie przypadkiem $d \geqslant 1$.

Obserwacja 10.3.3. (a) Niech $p : P \longrightarrow U$, $q : Q \longrightarrow U$ będą dwiema parametryzacjami i niech $\varphi := p^{-1} \circ q : Q \longrightarrow P$. Wiadomo, że $\det \varphi'(u) \neq 0$, $u \in Q$. Niech $\varepsilon(u) := \operatorname{sgn}(\det \varphi'(u))$, $u \in Q$. Ponieważ $q = p \circ \varphi$, zatem $q'(u)([\mathbb{R}^d]_+) = p'(\varphi(u))(\varphi'(u)([\mathbb{R}^d]_+)) = p'(\varphi(u))(\varepsilon(u)[\mathbb{R}^d]_+) = \varepsilon(u) p'(\varphi(u))([\mathbb{R}^d]_+)$, $u \in Q$.

(b) Dla dowolnej parametryzacji $p : P \longrightarrow U$ niech $\widehat{p} : \widehat{P} \longrightarrow U$ będzie dane wzorem: $\widehat{p} := p \circ \widehat{I}$, $\widehat{P} := \widehat{I}^{-1}(P)$, gdzie $\widehat{I} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $\widehat{I}(t) = \widehat{t} := (-t_1, t_2, \dots, t_d)$. Widać, że $\widehat{p} : \widehat{P} \longrightarrow U$ jest również lokalną parametryzacją. Ponadto, na podstawie (a), jeżeli $p : P \longrightarrow U$ jest zgodna z O, to $\widehat{p}'(t)([\mathbb{R}^d]_+) = -p'(\widehat{t})([\mathbb{R}^d]_+) = -O(p(\widehat{t}))$, $t \in \widehat{P}$. Wynika stąd, że $-O \in \mathcal{O}(M)$, gdzie $(-O)(x) := -O(x)$, $x \in M$.

(c) Jeżeli $p : P \longrightarrow U$ jest parametryzacją zgodną z O taką, że P jest obszarem, to, na podstawie (a), dowolna parametryzacja $q : Q \longrightarrow U$ jest zgodna albo z O albo z $-O$ (bowiem funkcja ε, jako funkcja ciągła o wartościach w $\{-1, +1\}$, jest stała).

Definicja 10.3.4. Niech $\mathcal{A} = (p_i : P_i \longrightarrow U_i)_{i \in I}$ będzie dowolnym *atlasem na* M. Jeżeli każda z parametryzacji $p_i : P_i \longrightarrow U_i$ jest zgodna z orientacją O, to mówimy, że atlas $\mathcal{A}$ jest *zgodny z* O.

Na podstawie Obserwacji 10.3.3(a) otrzymujemy bez trudu następujący wynik.

Twierdzenie 10.3.5. *Jeżeli $\mathcal{A} = (p_i : P_i \longrightarrow U_i)_{i \in I}$ jest atlasem zgodnym z orientacją O, to dla odwzorowań przejścia $\varphi_{i,j} := p_i^{-1} \circ p_j : p_j^{-1}(U_i \cap U_j) \longrightarrow p_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ mamy:*

$$\det \varphi'_{i,j}(u) > 0, \quad u \in p_j^{-1}(U_i \cap U_j), \quad i, j \in I. \tag{†}$$

Twierdzenie 10.3.6. *Niech $\mathcal{A} = (p_i : P_i \longrightarrow U_i)_{i \in I}$ będzie atlasem na M takim, że dla wszystkich odwzorowań przejścia mamy (†). Wtedy na M istnieje orientacja O taka, że atlas $\mathcal{A}$ jest zgodny z O.*

Oznacza to, że „zadać orientację M" to to samo, co „zadać atlas spełniający (†)". Takie atlasy będziemy nazywać *orientującymi*.

Dowód. Niech $O(x) := p_i'(p_i^{-1}(x))([\mathbb{R}^d]_+)$ o ile $x \in U_i$. Jedyny problem to poprawność definicji. Przypuśćmy, że $x \in U_i \cap U_j$ i $x = p_i(t) = p_j(u)$, zatem $t = \varphi_{i,j}(u)$. Wtedy

$$p_j'(u)([\mathbb{R}^d]_+) = p_i'(\varphi_{i,j}(u))(\varphi'_{i,j}(u)([\mathbb{R}^d]_+)) = p_i'(t)([\mathbb{R}^d]_+). \qquad \square$$

Twierdzenie 10.3.7. *Jeżeli M jest podrozmaitością spójną i orientowalną, to na M istnieją dokładnie dwie różne orientacje. W szczególności, jeżeli M ma s składowych spójnych i jest orientowalna, to na M istnieje dokładnie 2^s różnych orientacji.*

Dowód. Niech O będzie ustaloną orientacją M. Wtedy $-O$ jest również orientacją i $-O \neq O$. Pozostaje pokazać, że dla każdej innej orientacji O' mamy albo $O' = O$ albo $O' = -O$. Niech

$$M_+ := \{x \in M : O'(x) = O(x)\}, \quad M_- := \{x \in M : O'(x) = -O(x)\}.$$

Oczywiście $M_+ \cap M_- = \varnothing$ i $M = M_+ \cup M_-$. Na podstawie Obserwacji 10.3.3(a) oba te zbiory są otwarte. Stąd, wobec spójności, albo $M_+ = M$ albo $M_- = M$. $\square$

Twierdzenie 10.3.8. *Jeżeli $d = 1$, to M jest orientowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie ciągłe $\boldsymbol{s} : M \longrightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ takie, że $\boldsymbol{s}(x) \in T_xM$, $x \in M$. Ponadto, dla dowolnej orientacji O rozmaitości M istnieje odwzorowanie ciągłe $\boldsymbol{s} : M \longrightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ takie, że $\boldsymbol{s}(x) \in T_xM$ i $O(x) = [\boldsymbol{s}(x)]_\sim$, $x \in M$.*

W powyższej sytuacji mówimy, że $\boldsymbol{s}$ jest *orientującym polem wektorów stycznych.*

Można pokazać, że dowolna jednowymiarowa podrozmaitość jest orientowalna. Z tego też powodu, powyższa propozycja nie stanowi, w gruncie rzeczy, kryterium na orientowalność, ale daje jedynie opis orientacji.

Dowód. Niech O będzie pewną orientacją na podrozmaitości M. Jeżeli $\mathcal{A} = (p_i : P_i \longrightarrow U_i)_{i\in I}$ jest atlasem zgodnym z O, to definiujemy $\boldsymbol{s}(x) := \boldsymbol{v}(p_i'(p_i^{-1}(x)))$, gdy $x \in U_i$, gdzie $\boldsymbol{v}(X) := X/\|X\|$ oznacza wersor wektora $X \in (\mathbb{R}^n)_*$. Jedyny problem to, czy definicja jest poprawna. Rozumujemy lokalnie: jeżeli $p : P \longrightarrow U$ i $q : Q \longrightarrow U$ są parametryzacjami zgodnymi z O oraz $q = p \circ \varphi$, to (korzystając z tego, że $\varphi'(u) > 0$, $u \in Q$) mamy: $\boldsymbol{v}(q'(u)) = \boldsymbol{v}(p'(\varphi(u))\varphi'(u)) = \boldsymbol{v}(p'(\varphi(u)))$.

W drugą stronę: kładziemy $O(x) := [\boldsymbol{s}(x)]_\sim \in \mathcal{O}(T_xM)$, $x \in M$. Trzeba sprawdzić, że O jest orientacją. Ustalmy punkt $a \in M$ oraz dowolną parametryzację $p : P \longrightarrow U$, $a = p(t_0)$, taką, że P jest przedziałem i $p'(t_0)([\mathbb{R}]_+) = O(a)$ (taka parametryzacja zawsze istnieje — pamiętajmy, że możemy zastąpić wyjściową parametryzację przez $\widehat{p} : \widehat{P} \longrightarrow U$). Mamy $\boldsymbol{s}(p(t)) = \varepsilon(t)\boldsymbol{v}(p'(t))$, $t \in P$, gdzie $\varepsilon : P \longrightarrow \{-1, +1\}$ jest funkcją ciągłą (bo $\boldsymbol{s}$ jest odwzorowaniem ciągłym) i $\varepsilon(t_0) = +1$. Zatem $\varepsilon \equiv +1$, co kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 10.3.9. *Jeżeli $d = n-1$, to M jest orientowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje odwzorowanie ciągłe $\boldsymbol{n} : M \longrightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ takie, że $\boldsymbol{n}(x) \in (T_xM)^\perp$, $x \in M$. Ponadto, dla dowolnej orientacji O rozmaitości M istnieje odwzorowanie ciągłe $\boldsymbol{n} : M \longrightarrow \mathbb{S}_{n-1}$ takie, że $\boldsymbol{n}(x) \in (T_xM)^\perp$ i $O(x) = ([\boldsymbol{n}(x)]_\sim)^\perp$, $x \in M$.*

W powyższej sytuacji mówimy, że $\boldsymbol{n}$ jest *orientującym polem wektorów normalnych.*

Przypadek podrozmaitości wymiaru $2 \leqslant d \leqslant n-2$ zostanie scharakteryzowany w Obserwacji **??**.

Dowód. Niech O będzie pewną orientacją na M. Ustalmy $x \in M$. Zauważmy, że układ warunków: $w \in \mathbb{R}^n$, $\|w\| = 1$, $w \perp T_xM$ i $([w]_\sim)^\perp = O(x)$ wyznacza jednoznacznie wektor w. Kładziemy $\boldsymbol{n}(x) := w$. Pozostaje sprawdzić ciągłość odwzorowania $x \longmapsto \boldsymbol{n}(x)$. Ustalmy punkt $a \in M$ oraz parametryzację $p : P \longrightarrow U$, $a = p(t_0)$, zgodną z O. Zauważmy, że dla $t \in P$ wektor $w = \boldsymbol{n}(p(t))$ jest wyznaczony (jednoznacznie) przez układ warunków [18]: $w \in \mathbb{R}^n$, $\|w\| = 1$, $w \perp T_{p(t)}M$, $\det\big[w, \frac{\partial p}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial p}{\partial t_{n-1}}(t)\big] > 0$. Niech teraz $t_\nu \longrightarrow t_0$ i przypuśćmy, że $w_\nu := \boldsymbol{n}(p(t_\nu)) \longrightarrow w_0$. Wtedy w_0 spełnia powyższy układ z $t = t_0$, a więc $w_0 = \boldsymbol{n}(p(t_0))$.

W drugą stronę: kładziemy $O(x) := ([\boldsymbol{n}(x)]_\sim)^\perp \in \mathcal{O}(T_xM)$, $x \in M$. Trzeba sprawdzić, że O jest orientacją. Ustalmy punkt $a \in M$ oraz dowolną parametryzację $p : P \longrightarrow U$, $a = p(t_0)$, taką, że P jest obszarem i $p'(t_0)([\mathbb{R}^{n-1}]_+) = O(a)$. Mamy $p'(t)([\mathbb{R}^{n-1}]_+) = \varepsilon(t)O(p(t))$, $t \in P$, gdzie $\varepsilon : P \longrightarrow \{-1, +1\}$ i $\varepsilon(t_0) = +1$. Pozostaje wykazać, że ε jest funkcją ciągłą. W tym celu wystarczy tylko zauważyć, że wprost z definicji $([\boldsymbol{n}(x)]_\sim)^\perp$ mamy:

$$\varepsilon(t) = \operatorname{sgn}\Big(\det\Big[\boldsymbol{n}(p(t)), \frac{\partial p}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial p}{\partial t_{n-1}}(t)\Big]\Big), \quad t \in P. \qquad \square$$

Obserwacja 10.3.10 (Iloczyn wektorowy)**.** Niech $a_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, n-1$. Z wektorów tych utwórzmy $(n-1)\times n$–wymiarową macierz A poprzez ustawienie ich jako wiersze. Dla $k \in \{1, \dots, n\}$ niech A_k oznacza podmacierz macierzy A powstałą poprzez opuszczenie k-tej kolumny. Niech $w_k := (-1)^{k+1}\det A_k$, $w = (w_1, \dots, w_n)$. Zauważmy, że wektory $a_1, \dots, a_{n-1}$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy $w = 0$. Dla $j \in \{1, \dots, n-1\}$ niech B_j oznacza $n \times n$–wymiarową macierz postałą z A poprzez dołożenie a_j jako pierwszego wiersza. Stosując do tej macierzy rozwinięcie Laplace'a [19] (względem pierwszego wiersza)

[18] Uwaga: jeżeli $w \in \mathbb{R}^n$, $\|w\| = 1$, $w \perp T_{p(t)}M$, to $\det\big[w, \frac{\partial p}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial p}{\partial t_{n-1}}(t)\big] \neq 0$.

[19] Pierre Simon de Laplace (1749–1827).

wnioskujemy, że:

$$\langle w, a_j\rangle = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} a_{j,k} \det A_k = \det B_j = 0,$$

tak więc $w \perp a_j$, $j = 1, \dots, n-1$. Dalej mamy:

$$\det[w, a_1, \dots, a_{n-1}] = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} w_k \det A_k = \sum_{k=1}^{n}(\det A_k)^2 = \|v\|^2.$$

Wektor w nazywamy *iloczynem wektorowym* wektorów $a_1, \dots, a_{n-1}$ i oznaczamy $a_1 \times \dots \times a_{n-1}$. Zauważmy, że operacja $(\mathbb{R}^n)^{n-1} \ni (a_1, \dots, a_{n-1}) \longmapsto a_1 \times \dots \times a_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ jest $(n-1)$–liniowa.

Jeżeli układ $(a_1, \dots, a_{n-1})$ jest bazą pewnej podprzestrzeni V przestrzeni $\mathbb{R}^n$, wyznaczającą na V orientację O, to $([W]_\sim)^\perp = O$. W szczególności, w sytuacji opisanej w Twierdzeniu 10.3.9 mamy:

$$\boldsymbol{n}(p(t)) = \boldsymbol{v}\Big(\frac{\partial p}{\partial t_1}(t) \times \dots \times \frac{\partial p}{\partial t_{n-1}}(t)\Big).$$

Obserwacja 10.3.11. Istnieją podrozmaitości nieorientowalne, np. *wstęga Möbiusa* (20):
$M := p((-1,1) \times [0,\pi])$, gdzie $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $p(t,u) := \big((2 + t\cos u)\cos 2u, (2 + t\cos u)\sin 2u, t\sin u\big)$.
Mamy

$$p'(t,u) = \begin{bmatrix} \cos u\cos 2u, & -4\sin 2u - t(\sin u\cos 2u + 2\cos u\sin 2u) \\ \cos u\sin 2u, & 4\cos 2u - t(\sin u\sin 2u - 2\cos u\cos 2u) \\ \sin u, & t\cos u \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t}(t,u) \times \frac{\partial p}{\partial u}(t,u) = \Big(&\begin{vmatrix} \cos u\sin 2u, & 4\cos 2u - t(\sin u\sin 2u - 2\cos u\cos 2u) \\ \sin u, & t\cos u \end{vmatrix}, \\ -&\begin{vmatrix} \cos u\cos 2u, & -4\sin 2u - t(\sin u\cos 2u + 2\cos u\sin 2u) \\ \sin u, & t\cos u \end{vmatrix}, \\ &\begin{vmatrix} \cos u\cos 2u, & -4\sin 2u - t(\sin u\cos 2u + 2\cos u\sin 2u) \\ \cos u\sin 2u, & 4\cos 2u - t(\sin u\sin 2u - 2\cos u\cos 2u) \end{vmatrix}\Big)\end{aligned}$$

$$= (-4\sin u\cos 2u + t\sin 2u(1 + \cos 2u), -4\sin u\sin 2u - t(\cos 2u + \sin^2 2u), 4\cos u + 2t\cos^2 u).$$

Stąd

$$\Big\|\frac{\partial p}{\partial t}(t,u) \times \frac{\partial p}{\partial u}(t,u)\Big\|^2 = 16 + 16t\cos u + 4t^2(1 + \cos^2 u).$$

W szczególności, $\|\frac{\partial p}{\partial t}(t,u) \times \frac{\partial p}{\partial u}(t,u)\| > 0$, $-1 < t < 1$, $0 \leqslant u \leqslant \pi$. Wynika stąd w szczególności, że M jest 2–wymiarową podrozmaitością w $\mathbb{R}^3$ klasy $\mathcal{C}^\infty$ (por. Twierdzenie 10.1.3). Dla $t = 0$ dostajemy

$$\boldsymbol{n}(p(0,u)) = \boldsymbol{n}(2\cos 2u, 2\sin 2u, 0) := \boldsymbol{v}\Big(\frac{\partial p}{\partial t}(0,u) \times \frac{\partial p}{\partial u}(0,u)\Big) = (-\sin u\cos 2u, -\sin u\sin 2u, \cos u).$$

Zauważmy, że $(2,0,0) = p(0,0) = p(0,\pi)$, ale $\boldsymbol{n}(p(0,0)) = (0,0,1)$, zaś $\boldsymbol{n}(p(0,\pi)) = (0,0,-1)$. Oznacza to, że nie istnieje ciągłe pole wersorów normalnych $M \supset p(\{0\} \times [0,\pi]) \ni (x,y,z) \longmapsto \boldsymbol{n}(x,y,z)$, a więc, na podstawie Twierdzenia 10.3.9, M nie jest orientowalna.

Obserwacja 10.3.12. Załóżmy, że M jest d–wymiarową orientowalną podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^n$ i niech $D \subset M$ będzie obszarem (w sensie topologii indukowanej) takim, że $\operatorname{int}_M(\operatorname{cl}_M D) = D$, tzn. D jest *tłusty* (cały czas w sensie topologii indukowanej). Załóżmy dalej, że $\partial_M D =: M'$ jest $(d-1)$–wymiarową podrozmaitością klasy $\mathcal{C}^1$ w $\mathbb{R}^n$. Ustalmy pewną orientację $O \in \mathcal{O}(M)$. Pokażemy, że orientacja ta indukuje w sposób naturalny pewną orientację O' rozmaitości M'.

Postępujemy następująco: ustalmy punkt $a \in M'$. Na podstawie Lematu 10.1.21, istnieje parametryzacja $p : P \longrightarrow U$ podrozmaitości M, $a \in U$, taka, że P jest otwartą kostką w $\mathbb{R}^d$ i jeżeli $\widetilde{P} := \operatorname{pr}_{\mathbb{R}^{d-1}}(P)$, to $\{0\} \times \widetilde{P} \subset P$ i $p(\{0\} \times \widetilde{P}) = M' \cap U$. Dla $d = 1$ oznacza to, że $P \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem otwartym, $0 \in P$ i $\{p(0)\} = M' \cap U$.

Na wstępie rozważymy przypadek $d \geqslant 2$. Zbiór $\{0\} \times \widetilde{P}$ dzieli P na dwie składowe spójne $P_- := P \cap \{t_1 < 0\}$ i $P_+ := P \cap \{t_1 > 0\}$. Ponieważ p jest homeomorfizmem, zatem $M' \cap U$ dzieli U na dwie składowe

(20) August Möbius (1790–1868).

$V_\pm := p(P_\pm)$. Każdy punkt składowej $V_\pm$ należy albo do $D_- := D \cap U$ albo do $D_+ := (M \setminus \mathrm{cl}_M D) \cap U$. Zauważmy, że tłustość zbioru gwarantuje, że $D_+ \neq \varnothing$. Wobec spójności, oznacza to, że mamy jedną z dwóch możliwości:

(a) $V_- = D_-$ i $V_+ = D_+$,

(b) $V_- = D_+$ i $V_+ = D_-$: w tym przypadku zastępujemy wyjściową parametryzację przez parametryzację $t \longmapsto p(-t_1, t_2, \dots, t_d)$ i sprowadzamy sytuację do (a).

Tak więc możemy przyjąć, że $V_\pm = D_\pm$. Teraz, zastępując ewentualnie wyjściową parametryzację przez $t \longmapsto p(t_1, -t_2, t_3, \dots, t_d)$ (tu jest istotne, że $d \geqslant 2$), możemy założyć, że parametryzacja jest zgodna z O (wystarczy ją uzgodnić w jednym punkcie i skorzystać ze spójności P). Dostajemy w ten sposób pewną parametryzację $\widetilde{p} : \widetilde{P} \longrightarrow M' \cap U$, $\widetilde{p}(u) := p(0, u)$.

Przypuśćmy teraz, że analogiczną konstrukcję przeprowadziliśmy dla jakiejś innej parametryzacji $q : Q \longrightarrow U$, która spełnia te same warunki, co p i w efekcie konstrukcji dostaliśmy nową parametryzację $\widetilde{q} : \widetilde{Q} \longrightarrow M' \cap U$. Wiemy, że $q = p \circ \varphi$ i $\det \varphi'(u) > 0$, $u \in Q$ (bo obie parametryzacje są zgodne z O). Niech $\widetilde{\varphi} := \widetilde{p}^{-1} \circ \widetilde{q} : \widetilde{Q} \longrightarrow \widetilde{P}$. Pokażemy, że $\det \widetilde{\varphi}'(v) > 0$ dla $v \in \widetilde{Q}$. Mamy: $\widetilde{q}(v) = q(0, v) = p(\varphi(0, v)) = \widetilde{p}(\widetilde{\varphi}(v)) = p(0, \widetilde{\varphi}(v))$, a więc $\varphi_1(0, v) = 0$ i $\widetilde{\varphi}(v) = (\varphi_2(0, v), \dots, \varphi_d(0, v))$. Zauważmy, że $\varphi(Q_\pm) = P_\pm$, a stąd: $\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}(0, v) \geqslant 0$. Ponadto, $\varphi'(0, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}(0, v) & 0 \\ * & \widetilde{\varphi}'(v) \end{bmatrix}$, a stąd $\det \varphi'(0, v) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}(0, v) \det \widetilde{\varphi}'(v)$, co kończy dowód.

Oznacza to, że potrafimy skonstruować rodzinę lokalnych parametryzacji $(p_i : P_i \longrightarrow U_i)_{i \in I}$ zgodną z O taką, że rodzina $(\widetilde{p}_i : \widetilde{P}_i \longrightarrow M' \cap U_i)_{i \in I}$ jest atlasem orientującym na M'. Atlas ten wprowadza na M' pewną orientację O'. Z konstrukcji wynika, że O' zależy wyłącznie od O. Orientację O' nazywamy *orientacją indukowaną przez* O.

Teraz przypadek $d = 1$. W tej sytuacji nie zajmujemy się uzyskaniem zgodności $V_\pm = D_\pm$, ale jedynie, poprzez ewentualną zamianę parametryzacji p na parametryzację $t \longmapsto p(-t)$, uzyskujemy zgodność parametryzacji z orientacją O. Mamy dwa możliwe przypadki:

(a) $V_- = D_-$ i $V_+ = D_+$: wtedy przyjmujemy $O'(p(0)) := +1$,

(b) $V_- = D_+$ i $V_+ = D_-$: wtedy przyjmujemy $O'(p(0)) := -1$.

Musimy jeszcze sprawdzić, że O' nie zależy od wyboru parametryzacji. Niech $q : Q \longrightarrow U$ będzie inną parametryzacją zgodną z O. Wiemy, że $q = p \circ \varphi$, $\varphi : Q \longrightarrow P$, $\varphi'(u) > 0$, $u \in Q$. Oznacza to, że $\varphi(P_\pm) = Q_\pm$, skąd od razu wynika, że (a) zachodzi dla p wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi dla q.

Ponownie uzyskaliśmy *orientację indukowaną przez* O na M'.

ROZDZIAŁ 11

Całka Riemanna

Zasadniczym celem rozdziału jest przeniesienie wyników przedstawionych w Rozdziale 7 na przypadek wielowymiarowy. Te dowody, które są prostym uogólnieniem przypadku jednowymiarowego pozostawiamy jako Ćwiczenie.

11.1. Całka Riemanna na kostce

Definicja 11.1.1. *Kostką* (domkniętą) nazywamy dowolny zbiór postaci $P := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$, gdzie $a_j < b_j$, $j = 1, \dots, n$ (rozważamy tylko kostki niezdegenerowane).

Objętością kostki P nazywamy liczbę $|P| := (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$; zauważmy, że $|P| > 0$ oraz, że $|x_0 + P| = |P|$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Podziałem kostki P nazywamy dowolną skończoną rodzinę kostek $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ taką, że $P = P_1 \cup \dots \cup P_m$ oraz $\operatorname{int} P_j \cap \operatorname{int} P_k = \varnothing$ dla $j \neq k$; dla $n = 1$ podział kostki $P = [a, b]$ możemy utożsamiać z ciągiem $\pi = (x_0, \dots, x_m)$, gdzie $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$.

Podziałem prostym kostki P nazywamy podział postaci $\{P_{k_1,\dots,k_n} : 1 \leqslant k_j \leqslant m_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$, gdzie $P_{k_1,\dots,k_n} = [x_{1,k_1-1}, x_{1,k_1}] \times \dots \times [x_{n,k_n-1}, x_{n,k_n}]$, zaś $(x_{j,0}, \dots, x_{j,m_j})$ jest podziałem $[a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, n$. Podział ten składa się z $m_1 \cdots m_n$ kostek. Typowym przypadkiem jest sytuacja, gdy $x_{j,k} := a_j + (k/m_j)(b_j - a_j)$ (tzn. dzielimy krawędzie na równe części).

Niech $\pi_1 = \{P_1, \dots, P_m\}$, $\pi_2 = \{Q_1, \dots, Q_r\}$ będą podziałami kostki P. Powiemy, że π_2 *jest wpisany w* π_1 lub też, że π_2 *jest zagęszczeniem* π_1, jeżeli dla dowolnego $j \in \{1, \dots, m\}$ rodzina $\{Q_k : Q_k \subset P_j\}$ jest podziałem P_j; innymi słowy, jeżeli $\operatorname{int} P_j \cap \operatorname{int} Q_k \neq \varnothing$, to $Q_k \subset P_j$. W tej sytuacji piszemy $\pi_2 \preccurlyeq \pi_1$.

Średnicą podziału $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ nazywamy liczbę $\operatorname{diam} \pi := \max\{\operatorname{diam} P_1, \dots, \operatorname{diam} P_m\}$.

Niech $(\pi_k)_{k=1}^{\infty}$ będzie ciągiem podziałów kostki P. Powiemy, że jest to *normalny ciąg podziałów*, jeżeli $\operatorname{diam} \pi_k \longrightarrow 0$.

Obserwacja 11.1.2. (a) Relacja $\preccurlyeq$ jest przechodnia.

(b) Dla dowolnych podziałów π_1, π_2 kostki P istnieje podział prosty π taki, że $\pi \preccurlyeq \pi_j$, $j = 1, 2$, tzn. π jest *wspólnym zagęszczeniem podziałów* π_1 *i* π_2.

(c) Dla dowolnego podziału $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ mamy $|P| = |P_1| + \dots + |P_m|$.

Istotnie, najpierw sprawdzamy przypadek podziału prostego:

$$\sum_{k_1=1}^{m_1} \dots \sum_{k_n=1}^{m_n} |P_{k_1,\dots,k_n}| = \sum_{k_1=1}^{m_1} \dots \sum_{k_n=1}^{m_n} \prod_{j=1}^{n} (x_{j,k_j} - x_{j,k_j-1}) = \prod_{j=1}^{n} \sum_{k_j=1}^{m_j} (x_{j,k_j} - x_{j,k_j-1}) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) = |P|.$$

Dla dowolnego podziału znajdujemy najpierw wpisany podział prosty $\pi' = \{Q_1, \dots, Q_r\}$, a następnie rozumujemy następująco: $|P| = \sum_{k=1}^{r} |Q_k| = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{k \in \{1,\dots,r\}: \\ Q_k \subset P_j}} |Q_k| = \sum_{j=1}^{m} |P_j|$.

Definicja 11.1.3. Niech $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją ograniczoną. Zdefiniujmy:

$$m(f, P) := \inf f(P), \quad M(f, P) := \sup f(P).$$

Niech teraz $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ będzie dowolnym podziałem kostki P. Połóżmy:

$$L(f, \pi) := \sum_{j=1}^{m} m(f, P_j)|P_j|, \quad U(f, \pi) := \sum_{j=1}^{m} M(f, P_j)|P_j|.$$

Liczbę $L(f,\pi)$ nazywamy *sumą aproksymacyjną dolną dla funkcji f przy podziale* π. Analogicznie, $U(f,\pi)$ nazywamy *sumą aproksymacyjną górną*. Czasami mówi się o *sumach Darboux*. Niech

$$\int_{*P} f := \sup_{\pi} L(f,\pi), \qquad \int_P^* f := \inf_{\pi} U(f,\pi),$$

gdzie supremum i infimum bierzemy po wszystkich podziałach kostki P. Liczbę $\int_{*P} f$ nazywamy *całką dolną z funkcji f po kostce P*. Analogicznie, liczbę $\int_P^* f$ nazywamy *całką górną*.

Powiemy, że funkcja f jest *całkowalna w sensie Riemanna na kostce P* ($f \in \mathcal{R}(P)$), jeżeli $\int_{*P} f = \int_P^* f$. Wtedy wspólną wartość tych całek oznaczamy przez $\int_P f$ i nazywamy *całką Riemanna z funkcji f po kostce P*.

Niech teraz $\varphi : P \longrightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją ograniczoną. Powiemy, że φ *jest całkowalna w sensie Riemanna na P* ($\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$), jeżeli $\operatorname{Re}\varphi, \operatorname{Im}\varphi \in \mathcal{R}(P)$. Kładziemy wtedy $\int_P \varphi := \int_P \operatorname{Re}\varphi + i\int_P \operatorname{Im}\varphi$ i nazywamy tę liczbę *całką Riemanna z funkcji φ po kostce P*.

Oczywiście każda funkcja stała $c \in \mathbb{C}$ jest całkowalna w sensie Riemanna i $\int_P c = c|P|$.

Przykład 11.1.4. Niech $f := \chi_{P\cap\mathbb{Q}^n}$. Przypomnijmy, że χ_A oznacza funkcję charakterystyczną zbioru $A \subset P$. Funkcję f nazywamy *funkcją Dirichleta* w kostce P. Wtedy $L(f,\pi) = 0$ oraz $U(f,\pi) = |P|$ dla dowolnego podziału π. Tak więc $\int_{*P} f = 0$ oraz $\int_P^* f = |P|$, czyli $f \notin \mathcal{R}(P)$.

Poniżej przedstawimy szereg (mniej lub bardziej elementarnych) własności całki Riemanna; $f, g : P \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi, \psi : P \longrightarrow \mathbb{C}$ oznaczają funkcje ograniczone, π, π_1, π_2 — podziały kostki P. Większość dowodów przebiega analogicznie, jak dla $n = 1$ i te pozostawiamy jako Ćwiczenie.

Obserwacja 11.1.5. (a) Dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$ mamy: $L(f+c,\pi) = L(f,\pi)+c|P|$ oraz $U(f+c,\pi) = U(f,\pi)+c|P|$. Wynika stąd natychmiast, że $\int_{*P}(f+c) = \int_{*P} f + c|P|$ oraz $\int_P^*(f+c) = \int_P^* f + c|P|$. W szczególności, $f \in \mathcal{R}(P) \iff f+c \in \mathcal{R}(P)$ oraz $\int_P(f+c) = \int_P f + \int_P c$. Wynik przenosi się natychmiast na funkcje ograniczone $\varphi : P \longrightarrow \mathbb{C}$ i $c \in \mathbb{C}$: $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \iff \varphi+c \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$ oraz $\int_P(\varphi+c) = \int_P \varphi + \int_P c$.

(b) Jeżeli $f \leqslant g$, to $L(f,\pi) \leqslant L(g,\pi)$ i $U(f,\pi) \leqslant U(g,\pi)$. W szczególności, $\int_{*P} f \leqslant \int_{*P} g$ oraz $\int_P^* f \leqslant \int_P^* g$. Jeżeli ponadto $f, g \in \mathcal{R}(P)$, to $\int_P f \leqslant \int_P g$ *(monotoniczność całki)*.

(c) $L(-f,\pi) = -U(f,\pi)$. W szczególności,
- $\int_{*P}(-f) = -\int_P^* f$,
- $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \iff (-\varphi) \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$ oraz $\int_P(-\varphi) = -\int_P \varphi$,
- $\varphi \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C}) \iff \overline{\varphi} \in \mathcal{R}(P,\mathbb{C})$ i $\int_P \overline{\varphi} = \overline{\int_P \varphi}$.

(d) Jeżeli $\pi_1 \preccurlyeq \pi_2$, to $L(f,\pi_1) \geqslant L(f,\pi_2)$, $U(f,\pi_1) \leqslant U(f,\pi_2)$. W szczególności,
- $L(f,\pi_1) \leqslant U(f,\pi_2)$ dla dowolnych π_1, π_2,
- $\int_{*P} f \leqslant \int_P^* f$.

(e) $f \in \mathcal{R}(P) \iff \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\pi} : U(f,\pi) - L(f,\pi) \leqslant \varepsilon$.

(f) Dla każdego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^{\infty}$ mamy: $L(f,\pi_k) \longrightarrow \int_{*P} f$, $U(f,\pi_k) \longrightarrow \int_P^* f$.

Ograniczymy się do sum górnych. Można założyć, że $f \geqslant 0$. Weźmy $\varepsilon > 0$ i niech $\pi = \{Q_1,\dots,Q_m\}$ będzie podziałem takim, że $U(f,\pi) - \int_P^* f \leqslant \varepsilon$. Niech $\pi_k = \{P_{k,1},\dots,P_{k,m_k}\}$. Wtedy

$$U(f,\pi_k) = \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,m_k\}\\ \exists_{i\in\{1,\dots,m\}}: P_{k,j}\subset Q_i}} M(f,P_{k,j})|P_{k,j}| + \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,m_k\}\\ \forall_{i\in\{1,\dots,m\}}: P_{k,j}\not\subset Q_i}} M(f,P_{k,j})|P_{k,j}| \leqslant U(f,\pi) + M(f,P)\eta_k, \text{ gdzie}$$

$$\eta_k := \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,m_k\}\\ \forall_{i\in\{1,\dots,m\}}:\\ P_{k,j}\not\subset Q_i}} |P_{k,j}|, \quad k \geqslant 1.$$

Zauważmy, że $\eta_k \longrightarrow 0$. Istotnie, jeżeli $P_{k,j} \not\subset Q_i$, $i = 1,\dots,m$, to $P_{k,j}$ musi przecinać którąś ze ścian którejś z kostek $Q_1,\dots, Q_m$. Stąd $\eta_k \leqslant c\operatorname{diam}\pi_k$, $k \geqslant 1$, gdzie $c > 0$ jest pewną stałą (Ćwiczenie). Ostatecznie

$$\int_P^* f \leqslant \liminf_{k\to+\infty} U(f,\pi_k) \leqslant \limsup_{k\to+\infty} U(f,\pi_k) \leqslant \int_P^* f + \varepsilon,$$

co, wobec dowolności $\varepsilon > 0$, kończy dowód.

Definicja 11.1.6. Niech $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ będzie podziałem kostki P i niech $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$, $\xi_j \in P_j$, $j = 1, \dots, m$. Dla $\varphi : P \longrightarrow \mathbb{C}$, sumę $M(\varphi, \pi, \xi) := \sum_{j=1}^{m} \varphi(\xi_j)|P_j|$ nazywamy *sumą aproksymacyjną pośrednią dla funkcji φ przy podziale π i punktach pośrednich ξ*. Czasami mówimy o *sumie Cauchy'ego–Riemanna*.

Obserwacja 11.1.7. (a) Jest rzeczą widoczną, iż:
- $M(\alpha\varphi + \beta\psi, \pi, \xi) = \alpha M(\varphi, \pi, \xi) + \beta M(\psi, \pi, \xi)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
- $M(\varphi, \pi, \xi) = M(\operatorname{Re}\varphi, \pi, \xi) + iM(\operatorname{Im}\varphi, \pi, \xi)$.
- $|M(\varphi, \pi, \xi)| \leqslant M(|\varphi|, \pi, \xi)$.
- dla $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ mamy: $L(f, \pi) \leqslant M(f, \pi, \xi) \leqslant U(f, \pi)$.

(b) Następujące warunki są równoważne:

(i) $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$;

(ii) istnieje $c \in \mathbb{C}$ takie, że dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^{\infty}$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ (tzn. ξ_k jest zbiorem punktów pośrednich dla π_k) mamy $M(\varphi, \pi_k, \xi_k) \longrightarrow c$;
równoważnie: dla dowolnego normalnego ciągu podziałów $(\pi_k)_{k=1}^{\infty}$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ istnieje $c \in \mathbb{C}$ takie, że $M(\varphi, \pi_k, \xi_k) \longrightarrow c$;

(iii) istnieje $c \in \mathbb{C}$ takie, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnego podziału π o średnicy $\leqslant \delta$ oraz dla dowolnego wyboru punktów pośrednich ξ mamy $|M(\varphi, \pi, \xi) - c| \leqslant \varepsilon$;

(iv) istnieje $c \in \mathbb{C}$ oraz normalny ciąg podziałów $(\pi_k)_{k=1}^{\infty}$ takie, że dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^{\infty}$, mamy $M(\varphi, \pi_k, \xi_k) \longrightarrow c$;
równoważnie: istnieje normalny ciąg podziałów $(\pi_k)_{k=1}^{\infty}$ taki, że dla dowolnego wyboru punktów pośrednich $(\xi_k)_{k=1}^{\infty}$, istnieje $c \in \mathbb{C}$ takie, że $M(\varphi, \pi_k, \xi_k) \longrightarrow c$.

(c) $\mathcal{R}(P, \mathbb{C})$ jest zespoloną przestrzenią wektorową, a operator $\mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \ni \varphi \longmapsto \int_P \varphi \in \mathbb{C}$ jest $\mathbb{C}$–liniowy.

(d) Jeżeli $\psi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$ oraz $|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leqslant |\psi(x') - \psi(x'')|$, $x', x'' \in P$, to $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$.

(e) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$, to $|\varphi| \in \mathcal{R}(P)$ oraz $\left|\int_P \varphi\right| \leqslant \int_P |\varphi|$.

(f) Jeżeli φ, $\psi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$, to $\varphi \cdot \psi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$.

(g) Operator $\mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \times \mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \ni (\varphi, \psi) \overset{\Phi}{\longmapsto} \int_P \varphi\overline{\psi} \in \mathbb{C}$ jest semi-iloczynem skalarnym. W szczególności, na podstawie nierówności Schwarza, mamy $\left|\int_P \varphi\overline{\psi}\right|^2 \leqslant \left(\int_P |\varphi|^2\right)\left(\int_P |\psi|^2\right)$, $\varphi, \psi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$. Ponadto, funkcja $\mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \ni \varphi \longmapsto \left(\int_P |\varphi|^2\right)^{1/2}$ jest *seminormą*.

(h) $\mathcal{C}(P, \mathbb{C}) \subset \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$.

(i) (Twierdzenie o wartości średniej) Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{C}(P)$ istnieje $\xi \in P$ taki, że $f(\xi) = \frac{1}{|P|}\int_P f$.

Definicja 11.1.8. Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ ma *objętość zero* ($|A| = 0$), jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje skończona rodzina kostek $P_1, \dots, P_m$ taka, że $A \subset P_1 \cup \dots \cup P_m$ i $|P_1| + \dots + |P_m| \leqslant \varepsilon$.

Obserwacja 11.1.9. (a) Każdy zbiór o objętości zero jest ograniczony.

(b) Każdy zbiór skończony ma objętość zero.

(c) Jeżeli $|A| = 0$, to $|\overline{A}| = 0$.

(d) Podzbiór zbioru o objętości zero ma objętość zero.

(e) Suma skończonej liczby zbiorów o objętości zero ma objętość zero.

(f) Jeżeli $\mathbb{R}^n \ni a_\nu \longrightarrow a_0 \in \mathbb{R}^n$, to zbiór $\{a_\nu : \nu \geqslant 0\}$ ma objętość zero.

(g) Jeżeli $A \subset \mathbb{R}^n$ ma objętość zero, to dla dowolnego zbioru ograniczonego $B \subset \mathbb{R}^m$ zbiór $A \times B$ ma objętość zero.

Twierdzenie 11.1.10. (a) *Niech $Q \subset \mathbb{R}^d$ będzie kostką i niech $\varphi : Q \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ będzie dowolnym odwzorowaniem ciągłym, $1 \leqslant d \leqslant n-1$. Wtedy wykres $A := \{(t, \varphi(t)) : t \in Q\}$ ma objętość zero.*

W szczególności, dla dowolnej kostki ograniczonej $R \subset \mathbb{R}^n$ (1) *mamy $|\partial R| = 0$.*

(b) *Niech $Q \subset \mathbb{R}^d$ będzie kostką i niech $p : Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem spełniającym warunek Höldera z wykładnikiem α. Wówczas:*

---

(1) Tzn. zbioru R takiego, że istnieje kostka P, dla której $\operatorname{int} P \subset R \subset P$.

(b$_1$) *Jeżeli $\alpha n > d$, to zbiór $A := p(Q)$ ma objętość zero.* (2)
(b$_2$) *Jeżeli $\alpha n \geqslant d$, to zbiór $A := p(Z)$ ma objętość zero dla dowolnego zbioru $Z \subset Q$ o objętości zero.*
(b$_3$) *Jeżeli p spełnia warunek Lipschitza (np. $p \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, gdzie Ω jest otoczeniem Q), to:*
- *jeżeli $n > d$, to $|p(Q)| = 0$,*
- *jeżeli $n \geqslant d$, to $|p(Z)| = 0$ dla dowolnego zbioru $Z \subset Q$ o objętości zero.* (3)

(c) *Jeżeli $M \in \mathcal{M}^1_d(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant d \leqslant n-1$, to każdy zwarty podzbiór $A \subset M$ ma objętość zero* (4).

Dowód. (a) Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wobec jednostajnej ciągłości odwzorowania φ istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\|\varphi(t') - \varphi(t'')\|_\infty \leqslant \varepsilon \text{ o ile } \|t' - t''\| \leqslant \delta.$$

Niech $\pi = \{Q_1, \dots, Q_m\}$ będzie podziałem kostki Q takim, że $\operatorname{diam} \pi \leqslant \delta$. Ustalmy $t_j \in Q_j$ i niech

$$P_j := Q_j \times (\varphi(t_j) + [-\varepsilon, \varepsilon]^{n-d}).$$

Oczywiście $A \subset P_1 \cup \dots \cup P_m$ oraz $|P_1| + \dots + |P_m| = |Q_1|(2\varepsilon)^{n-d} + \dots + |Q_m|(2\varepsilon)^{n-d} = |Q|(2\varepsilon)^{n-d}$.

(b) Przypuśćmy, że $\|p(t') - p(t''))\|_\infty \leqslant C\|t' - t''\|^\alpha$, $t', t'' \in Q$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Przypadki (b$_1$) i (b$_2$) rozpatrzymy jednocześnie. Niech $X := Q$ (odp. $X := Z$) i niech $\varkappa := 2|Q|$ (odp. $\varkappa > 0$, gdzie $\varkappa$ jest dowolne). Niech $\pi = \{Q_1, \dots, Q_m\}$ będzie układem kostek takim, że
- $Q_j = u_j + [-\eta, \eta]^d$, gdzie $u_j \in \mathbb{R}^d$, $j = 1, \dots, m$, $\eta \in (0, 1]$,
- $X \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_m$, $Q_j \cap Q \neq \varnothing$, $j = 1, \dots, m$,
- $m(2\eta)^d = |Q_1| + \dots + |Q_m| \leqslant \varkappa$.

Niech $\delta := C(2\sqrt{d}\eta)^\alpha$. Ustalmy $t_j \in Q_j \cap Q$ i niech $P_j := p(t_j) + [-\delta, \delta]^n$, $j = 1, \dots, m$. Oczywiście $A \subset P_1 \cup \dots \cup P_m$ oraz $|P_1| + \dots + |P_m| = m(2C(2\sqrt{d}\eta)^\alpha)^n \leqslant \big(2^{(\alpha+1)n-d}\varkappa(Cd^{\alpha/2})^n\big)\eta^{\alpha n - d}$.

Gdy $\alpha n > d$, to dla małych $\eta > 0$ ostatnia liczba będzie dowolnie mała (odp. gdy $\alpha n = d$, to dobierając $\varkappa > 0$ stosownie małe, możemy uczynić tę ostatnią liczbę dowolnie małą).

(b$_3$) wynika z (b$_1$) i (b$_2$).

(c) wynika z (b). $\square$

Obserwacja 11.1.11. (a) Jeżeli zbiór $N_P(\varphi) := \{a \in P : \varphi \text{ nie jest ciągła w punkcie } a\}$ ma objętość zero, to $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$ (por. Obserwacja 11.1.7(g)).

(b) Niech $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ będzie ustalonym podziałem. Wtedy $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \iff \varphi|_{P_j} \in \mathcal{R}(P_j, \mathbb{C})$, $j = 1, \dots, m$. Ponadto, $\int_P \varphi = \int_{P_1} \varphi + \dots + \int_{P_m} \varphi$.

(c) Jeżeli zbiór $D_P(\varphi, \psi) := \{a \in P : \varphi(a) \neq \psi(a)\}$ ma objętość zero, to $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \iff \psi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$. Ponadto, $\int_P \varphi = \int_P \psi$.

(d) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$, to $\varphi|_Q \in \mathcal{R}(Q, \mathbb{C})$ dla dowolnej kostki $Q \subset P$ oraz $\int_Q \varphi = \int_P \varphi_0$, gdzie $\varphi_0 := \varphi$ na Q i $\varphi_0 := 0$ na $P \setminus Q$.

(e) Relacja $\varphi \sim \psi \overset{\text{df}}{\iff} |D_P(\varphi, \psi)| = 0$ jest relacją równoważnościową w $\mathcal{R}(P, \mathbb{C})$; całka Riemanna jest dobrze określonym operatorem liniowym $\mathcal{R}(P, \mathbb{C})/\sim \longrightarrow \mathbb{C}$.

(f) Jeżeli $\mathcal{R}(P, \mathbb{C}) \ni \varphi_\nu \longrightarrow \varphi$ jednostajnie na P, to $\varphi \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$ i $\int_P \varphi_\nu \longrightarrow \int_P \varphi$.

(g) Jeżeli $0 \leqslant f \in \mathcal{C}(P)$ i $\int_P f = 0$, to $f \equiv 0$. W szczególności, odwzorowanie

$$\mathcal{C}(P, \mathbb{C}) \times \mathcal{C}(P, \mathbb{C}) \ni (\varphi, \psi) \longmapsto \int_P \varphi\overline{\psi}$$

jest iloczynem skalarnym. Niestety przestrzeń $\mathcal{C}(P, \mathbb{C})$ z tym iloczynem skalarnym nie jest przestrzenią Hilberta.

(h) Jeżeli $0 \leqslant f \in \mathcal{R}(P)$ i $\int_P f = 0$, to zbiór $Z_f := \{x \in P : f(x) > 0\}$ jest przeliczalną sumą zbiorów o objętości zero. Zbiór Z_f może nie mieć objętości zero.

Definicja 11.1.12. Mówimy, że zbiór ograniczony $A \subset \mathbb{R}^n$ jest *mierzalny w sensie Jordana (regularny dla całki Riemanna)* ($A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$), jeżeli $\chi_A \in \mathcal{R}(P)$ dla pewnej kostki $P \supset A$. Liczbę $|A| := \int_P \chi_A$ nazywamy *miarą Jordana (objętością) zbioru A*

---

(2) Warto w tym miejscu przypomnieć o istnieniu krzywej $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ takiej, że $\gamma([0, 1]) = [0, 1] \times [0, 1]$. Z (b$_1$) wynika, że γ nie może spełniać warunku Höldera z wykładnikiem $\alpha > 1/2$.

(3) Jeżeli $n < d$, to biorąc jako p projekcję $\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^{d-n}}$, zaś jako Z zbiór postaci $A \times B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{d-n}$, gdzie $|A| = 0$, a B jest ograniczony, widzimy, że $p(Z) = B$ nie musi być zbiorem o objętości zero nawet, gdy p jest liniowe.

(4) Dla przykładu, $|\mathbb{S}_{n-1}| = 0$.

Obserwacja 11.1.13. (a) Jeżeli $\chi_A \in \mathcal{R}(P)$ dla pewnej kostki $P \supset A$, to $\chi_A \in \mathcal{R}(Q)$ dla dowolnej kostki $Q \supset A$. Ponadto, $\int_P \chi_A = \int_Q \chi_A$ (por. Obserwacja 11.1.11(b)).

(b) Dla zbioru ograniczonego $A \subset \mathbb{R}^n$ mamy: $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|\partial A| = 0$.

Niech P będzie dowolną kostką taką, że $A \subset\subset P$. Ponieważ $N_P(\chi_A) \subset \partial A$, implikacja ($\Longleftarrow$) wynika z Obserwacji 11.1.11(a)).

Dla dowodu ($\Longrightarrow$), przypuśćmy, że $\chi_A \in \mathcal{R}(P)$. Chcemy pokazać, że $|\partial A| = 0$. Ustalmy dowolne $\varepsilon > 0$. Z całkowalności funkcji χ_A wynika, że istnieje podział $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ kostki P taki, że $U(\chi_A, \pi) - L(\chi_A, \pi) \leqslant \varepsilon/2$. Warunek ten oznacza, że $\sum\limits_{i \in I} |P_i| \leqslant \varepsilon/2$, gdzie $I := \{i \in \{1, \dots, m\} : P_i \cap A \neq \varnothing,\ P_i \not\subset A\}$. Niech $B := \bigcup\limits_{j=1}^{m} \partial P_j$. Wiemy, że $|B| = 0$. W szczególności, istnieje skończone pokrycie zbioru B kostkami $Q_1, \dots, Q_r$ takie, że $|Q_1| + \dots + |Q_r| \leqslant \varepsilon/2$. Wystarczy jeszcze pokazać, że $(\partial A) \setminus B \subset \bigcup\limits_{i \in I} P_i$. Niech $a \in (\partial A) \setminus B$. Wtedy istnieje i_0 takie, że $a \in \operatorname{int} P_{i_0}$. Stąd $P_{i_0} \cap A \neq \varnothing$. Gdyby $P_{i_0} \subset A$, to mielibyśmy $a \in \operatorname{int} A$. Tak więc $i_0 \in I$, co kończy dowód.

(c) Jeżeli $|A| = 0$ w sensie Definicji 11.1.8, to $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ oraz $|A| = 0$ (wystarczy skorzystać z Obserwacji 11.1.11(a)).

(d) Każda kostka jest regularna.

(e) Jeżeli $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, to $\operatorname{int} A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$; implikacja przeciwna nie jest prawdziwa (Ćwiczenie).

(f) Jeżeli $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, to zbiór $\overline{A} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$; implikacja przeciwna nie jest prawdziwa (Ćwiczenie).

(g) Jeżeli $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, to $A \cup B,\ A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, tzn. $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ jest *algebrą zbiorów.*

(h) Jeżeli $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^m)$, to $A \times B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{n+m})$ (por. Obserwacja 11.1.9(g)).

11.2. Całka Riemanna na zbiorze mierzalnym w sensie Jordana

Naszym najbliższym celem jest zbudowanie teorii całki Riemanna na zbiorach regularnych.

Definicja 11.2.1. Niech $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $A \subset P$, gdzie P jest kostką. Dla funkcji ograniczonej $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ niech $\varphi_0 := \begin{cases} \varphi, & \text{na } A \\ 0, & \text{na } P \setminus A \end{cases}$. Powiemy, że φ jest *całkowalna w sensie Riemanna na* A ($\varphi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C})$), jeżeli $\varphi_0 \in \mathcal{R}(P, \mathbb{C})$. Kładziemy wtedy $\int_A \varphi := \int_P \varphi_0$. Jak zwykle, $\mathcal{R}(A) := \{\varphi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C}) : \varphi(A) \subset \mathbb{R}\}$.

Bez trudu widać, że taka definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru kostki $P \supset A$.

Poniżej przedstawimy listę podstawowych własności tak zdefiniowanej całki Riemanna. Dowody poszczególnych własności polegają na wykorzystaniu znanych własności całki Riemanna na kostce.

Obserwacja 11.2.2. (a) Jeżeli $|A| = 0$, to każda funkcja ograniczona $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ jest całkowalna oraz $\int_A \varphi = 0$.

(b) Jeżeli zbiór $N_A(\varphi) := \{a \in A : \varphi \text{ nie jest ciągła w } a\}$ ma objętość zero, to $\varphi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C})$. W szczególności, $\mathcal{C}_b(A, \mathbb{C}) \subset \mathcal{R}(A, \mathbb{C})$.

(c) $1 \in \mathcal{R}(A)$ oraz $\int_A 1 = |A|$, gdzie $|A|$ oznacza miarę Jordana zbioru A (w sensie Definicji 11.1.12).

(d) $\mathcal{R}(A, \mathbb{C})$ jest algebrą, operator $\mathcal{R}(A) \ni \varphi \longmapsto \int_A \varphi \in \mathbb{C}$ jest liniowy i monotoniczny. W szczególności, jeżeli $A \subset B$, gdzie B jest także regularny, to $|A| \leqslant |B|$ (tzn. miara Jordana jest monotoniczna).

(e) Jeżeli $\varphi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C})$, to $|\varphi| \in \mathcal{R}(A)$ oraz $|\int_A \varphi| \leqslant \int_A |\varphi|$.

(f) Operator $\mathcal{R}(A, \mathbb{C}) \times \mathcal{R}(A, \mathbb{C}) \ni (\varphi, \psi) \longmapsto \int_A \varphi\overline{\psi} \in \mathbb{C}$ jest semi-iloczynem skalarnym. W szczególności, zachodzi nierówność Schwarza: $\big|\int_A \varphi\overline{\psi}\big|^2 \leqslant \big(\int_A |\varphi|^2\big)\big(\int_A |\psi|^2\big)$, $\varphi, \psi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C})$.

(g) Dla funkcji ograniczonych $\varphi, \psi : A \longrightarrow \mathbb{C}$, jeżeli zbiór $D_A(\varphi, \psi) := \{a \in A : \varphi(a) \neq \psi(a)\}$ ma objętość zero, to $\varphi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C}) \iff \psi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C})$. Ponadto, $\int_A \varphi = \int_A \psi$.

(h) Jeżeli $B \subset A$ jest zbiorem regularnym, to dla funkcji $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ mamy: $\varphi|_B \in \mathcal{R}(B, \mathbb{C}) \iff \varphi \cdot \chi_B \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C})$.

(i) Jeżeli $A = A_1 \cup A_2$, gdzie A_1, $A_2 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, i $|A_1 \cap A_2| = 0$, to $\varphi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C}) \iff \varphi|_{A_j} \in \mathcal{R}(A_j, \mathbb{C})$, $j = 1, 2$. Ponadto $\int_A \varphi = \int_{A_1} \varphi + \int_{A_2} \varphi$. W szczególności,

- miara Jordana jest *skończenie addytywna*, tzn. $|A \cup B| = |A| + |B|$ dla $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ takich, że $A \cap B = \varnothing$;
- jeżeli $B \subset A$ jest zbiorem regularnym i $\varphi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C})$, to $\varphi|_B \in \mathcal{R}(B, \mathbb{C})$;

- dla dowolnej funkcji ograniczonej $\varphi : \overline{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ mamy: $\varphi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C}) \iff \varphi \in \mathcal{R}(\overline{A}, \mathbb{C})$ oraz $\int_A \varphi = \int_{\overline{A}} \varphi$;
- dla dowolnej funkcji ograniczonej $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ mamy: $\varphi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C}) \iff \varphi \in \mathcal{R}(\operatorname{int} A, \mathbb{C})$ oraz $\int_A \varphi = \int_{\operatorname{int} A} \varphi$.

Twierdzenie 11.2.3. *Niech $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{n-1})$, niech $f \in \mathcal{R}(A)$ i niech B oznacza wykres funkcji f, tzn. zbiór $B := \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset \mathbb{R}^n$. Wtedy $|B| = 0$.*

Dowód. Niech $A \subset P$, gdzie P jest kostką, niech f_0 oznacza standardowe przedłużenie funkcji f i niech $B_0 := \{(x, f_0(x)) : x \in P\}$. Zauważmy, że $|B| = 0 \iff |B_0| = 0$ (Ćwiczenie). Wynika stąd w szczególności, że możemy założyć, że $A = P$ jest kostką.

Dla $\varepsilon > 0$, niech $\pi = \{P_1, \dots, P_m\}$ będzie podziałem kostki P takim, że $U(f, \pi) - L(f, \pi) \leqslant \varepsilon$. Połóżmy, $Q_j := P_j \times [m(f, P_j), M(f, P_j)]$, $j = 1, \dots, m$. Wtedy $B \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_m$ oraz

$$|Q_1| + \dots + |Q_m| = \sum_{j=1}^{m} |P_j|(M(f, P_j) - m(f, P_j)) \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

Twierdzenie 11.2.4 (Twierdzenie o całkach iterowanych)**.** *Niech $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^m)$ i niech $\varphi \in \mathcal{R}(A \times B, \mathbb{C})$ (por. Obserwacja 11.1.13*(h)*). Załóżmy, że $\varphi(x, \cdot) \in \mathcal{R}(B, \mathbb{C})$ dla dowolnego $x \in A$* (5)*. Wtedy funkcja $A \ni x \longmapsto \int_B \varphi(x, y)dy \in \mathbb{R}$ jest całkowalna na A oraz*

$$\int_{A \times B} \varphi(x, y)dxdy = \int_A \Big(\int_B \varphi(x, y)dy \Big) dx. \quad (6)$$

W szczególności, powyższy wzór stosuje się dla funkcji klasy $\mathcal{C}_b(A \times B, \mathbb{C})$.

Dowód. W oczywisty sposób dowód sprowadza się do przypadku, gdy $A = P$ i $B = Q$ są kostkami oraz $\varphi = f$ ma wartości rzeczywiste. Ustalmy dowolne podziały $\pi' = \{P_1, \dots, P_r\}$ kostki P i $\pi'' = \{Q_1, \dots, Q_s\}$ kostki Q. Wtedy rodzina $\pi := \{P_j \times Q_k : j = 1, \dots, r,\ k = 1, \dots, s\}$ jest podziałem kostki $P \times Q$. Wybierzmy dowolne punkty pośrednie ξ dla podziału π'. Wtedy

$$m(f, P_j \times Q_k)|Q_k| \leqslant \int_{Q_k} f(\xi_j, y)dy \leqslant M(f, P_j \times Q_k)|Q_k|, \quad (7)$$

skąd po pomnożeniu przez $|P_j|$, zsumowaniu najpierw względem k, a potem względem j, mamy:

$$L(f, \pi) \leqslant \sum_{j=1}^{r} \int_Q f(\xi_j, y)dy|P_j| \leqslant U(f, \pi).$$

Pozostaje rozważyć normalne ciągi podziałów i zastosować Obserwację 11.1.7(b). $\square$

Wniosek 11.2.5. *Niech $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^m)$ i niech $\varphi \in \mathcal{R}(A, \mathbb{C})$, $\psi \in \mathcal{R}(B, \mathbb{C})$. Wtedy $\varphi \otimes \psi \in \mathcal{R}(A \times B, \mathbb{C})$* (8) *oraz*

$$\int_{A \times B} \varphi(x)\psi(y)dxdy = \Big(\int_A \varphi(x)dx \Big) \Big(\int_B \psi(y)dy \Big).$$

Dowód. Jedynym problemem jest całkowalność $\varphi \otimes \psi$ na $A \times B$. Możemy założyć, że $A = P$, $B = Q$ są kostkami oraz, że $\varphi = f$ i $\psi = g$ mają wartości rzeczywiste (Ćwiczenie). Ustalmy dowolne podziały $\pi' = \{P_1, \dots, P_r\}$ kostki P i $\pi'' = \{Q_1, \dots, Q_s\}$ kostki Q i niech π będzie jak w dowodzie Twierdzenia 11.2.4. Załóżmy, że $|f|, |g| \leqslant c$. Wtedy

$$U(f \otimes g, \pi) - L(f \otimes g, \pi) \leqslant c\Big((U(f, \pi') - L(f, \pi'))|Q| + (U(g, \pi'') - L(g, \pi''))|P| \Big)$$

i dalej możemy rozumować standardowo. $\square$

---

(5) Odnotujmy, że nie wynika to z całkowalności φ na $A \times B$. Dla przykładu: $A = B = [0, 1]$, $\varphi(0, \cdot) = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$, $\varphi(x, \cdot) := 0$ dla $x \in (0, 1]$.

(6) Stosujemy tu wygodny tradycyjny zapis całki Riemanna z uwidocznieniem zmiennych.

(7) Z całkowalności funkcji $f(\xi_j, \cdot)$ na Q wynika jej całkowalność na Q_k.

(8) $(f \otimes g)(x, y) := f(x)g(y)$

Twierdzenie 11.2.6 (Całka jako miara objętości)**.** *Niech $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{n-1})$ i niech $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_b(A)$, $\alpha \leqslant \beta$. Połóżmy $B := \{(x,y) \in A \times \mathbb{R} : \alpha(x) \leqslant y \leqslant \beta(x)\}$. Wtedy $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ oraz dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{R}(B, \mathbb{C})$ takiej, że $f(x,\cdot) \in \mathcal{R}([\alpha(x), \beta(x)], \mathbb{C})$, $x \in A$,* [9] *funkcja $A \ni x \longmapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \varphi(x,y)dy \in \mathbb{C}$ jest całkowalna i mamy:*

$$\int_B \varphi(x,y)dxdy = \int_A \Big(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \varphi(x,y)dy \Big) dx.$$

W szczególności, $|B| = \int_A (\beta - \alpha)$ (por. Przykład 7.5.1(1)).

Dowód. Niech $|\alpha|$, $|\beta| \leqslant c$. Zauważmy, że

$$\partial B \subset ((\partial A) \times [-c,c]) \cup \{(x, \alpha(x)) : x \in A\} \cup \{(x, \beta(x)) : x \in A\} =: Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3.$$

Istotnie, niech $B \ni (x_s, y_s) \longrightarrow (x_0, y_0) \in \partial B$. Jeżeli $x_0 \in \partial A$, to oczywiście $(x_0, y_0) \in Z_1$. Jeżeli $x_0 \in \operatorname{int} A$, to wobec ciągłości funkcji α i β, mamy $\alpha(x_0) \leqslant y_0 \leqslant \beta(x_0)$. Ponownie korzystając z ciągłości tych funkcji, wnioskujemy, że wykluczone jest, aby $\alpha(x_0) < y_0 < \beta(x_0)$.

Teraz regularność zbioru wynika z Obserwacji 11.1.9(g) oraz Twierdzenia 11.2.3.

Niech $\varphi_0 : A \times [-c,c] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie trywialnym rozszerzeniem funkcji φ (poprzez wartości zerowe). Wtedy na podstawie twierdzenia o całkach iterowanych (Twierdzenie 11.2.4) mamy:

$$\int_B \varphi(x,y)dxdy = \int_{A \times [-c,c]} \varphi_0(x,y)dxdy = \int_A \Big(\int_{[-c,c]} \varphi_0(x,y)dy \Big) dx = \int_A \Big(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \varphi(x,y)dy \Big) dx. \quad \square$$

Twierdzenie* 11.2.7 (Twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Riemanna)**.** *Niech $\Phi : U \longrightarrow V$ będzie dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^1$ zbiorów otwartych $U, V \subset \mathbb{R}^n$ i niech $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $A \subset\subset U$. Wtedy:*

- *$\Phi(A) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$,*
- *dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{R}(\Phi(A))$ funkcja $(f \circ \Phi) \cdot |\Phi'|$ jest całkowalna na A, gdzie $|\Phi'|$ oznacza moduł wyznacznika macierzy Jacobiego odwzorowania Φ* [10]*,*
- *$\int_{\Phi(A)} f = \int_A (f \circ \Phi) \cdot |\Phi'|, \quad f \in \mathcal{R}(\Phi(A))$.*

Dowód zostanie podany później (Wniosek **??**). Teraz tylko zauważmy, że regularność $\Phi(A)$ wynika z Twierdzenia 11.1.10(b$_2$) ($A = \operatorname{int} A \cup Z$, gdzie $|Z| = 0$) oraz że twierdzenie jest prawdziwe dla translacji.

Ćwiczenie 11.2.8. Wyznaczyć $\det \Phi'$, sprawdzić czy $\Phi|_U$ jest dyfeomorfizmem oraz wyznaczyć $V := \Phi(U)$ dla następujących transformacji i obszarów U ($a, b, c > 0$ oznaczają stałe):

- (współrzędne biegunowe) $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\Phi(r, \varphi) := (ar \cos\varphi, br \sin\varphi)$, $U := \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi)$;
- (współrzędne walcowe) $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\Phi(r, \varphi, z) := (ar\cos\varphi, br\sin\varphi, cz)$, $U := \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$;
- (wspórzędne sferyczne) $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\Phi(r, \varphi, \theta) := (ar\cos\varphi\cos\theta, br\sin\varphi\cos\theta, cr\sin\theta)$, $U := \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;
- (współrzędne sferyczne w $\mathbb{R}^n$) $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\Phi_1(r,\omega) &:= r\cos\omega_1 \cos\omega_2 \cos\omega_3 \dots \cos\omega_{n-2} \cos\omega_{n-1},\\
\Phi_2(r,\omega) &:= r\sin\omega_1 \cos\omega_2 \cos\omega_3 \dots \cos\omega_{n-2} \cos\omega_{n-1},\\
\Phi_3(r,\omega) &:= r\sin\omega_2 \cos\omega_3 \dots \cos\omega_{n-2} \cos\omega_{n-1},\\
&\dots\\
\Phi_{n-1}(r,\omega) &:= r\sin\omega_{n-2} \cos\omega_{n-1},\\
\Phi_n(r,\omega) &:= r\sin\omega_{n-1},
\end{aligned}$$

$U := \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{n-2}$.

Ćwiczenie 11.2.9. Niech $a_1, \dots, a_n > 0$, $\mathbb{E} := \Big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n^2} \leqslant 1\Big\}$. Obliczyć $|\mathbb{E}|$.

[9] Np. $\varphi \in \mathcal{C}_b(B, \mathbb{C})$.

[10] Tzn. $|\Phi'|(x) := |\det[\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k}(x)]_{j,k=1,\dots,n}|$.

11.3. Funkcje dane całką

Twierdzenie 11.3.1 (Twierdzenie o funkcjach danych całką)**.** *Niech Ω będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^m$, niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie regularnym zbiorem zwartym* (11) *i niech $f : \Omega \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem takim, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mamy:*
- *$f(\cdot, t) \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ dla dowolnego $t \in A$,*
- *odwzorowanie $\Omega \times A \ni (x,t) \longmapsto D_x^\alpha f(x,t) \in \mathbb{R}$ jest ciągłe dla $|\alpha| \leqslant k$* (12)*.*

Wtedy odwzorowanie $\Omega \ni x \overset{\varphi}{\longmapsto} \int_A f(x,t)dt$ jest klasy $\mathcal{C}^k(\Omega)$ oraz $D^\alpha \varphi(x) = \int_A D_x^\alpha f(x,t)dt$, $x \in \Omega$, $|\alpha| \leqslant k$.

Dowód. Ćwiczenie— por. Twierdzenie 7.7.1. □

Twierdzenie 11.3.2 (Twierdzenie o funkcjach danych całką niewłaściwą)**.** *Niech Ω będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^m$, niech $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ i niech $f : \Omega \times [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem takim, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mamy:*
- *$f(\cdot, t) \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ dla dowolnego $t \in [a,b)$,*
- *odwzorowanie $\Omega \times [a,b) \ni (x,t) \longmapsto D_x^\alpha f(x,t) \in \mathbb{R}$ jest ciągłe dla $|\alpha| \leqslant k$,*
- *dla dowolnego $|\alpha| \leqslant k$ istnieje odwzorowanie $g_\alpha \in \mathcal{R}([a,b))$ takie, że $|D_x^\alpha f(x,t)| \leqslant g_\alpha(t)$ dla $(x,t) \in \Omega \times [a,b)$.*

Wtedy odwzorowanie $\Omega \ni x \overset{\varphi}{\longmapsto} \int_a^b f(x,t)dt$ jest klasy $\mathcal{C}^k(\Omega)$ oraz $D^\alpha \varphi(x) = \int_a^b D_x^\alpha f(x,t)dt$, $x \in \Omega$, $|\alpha| \leqslant k$. (13)

Odnotujmy, że analogiczny wynik zachodzi, gdy przedział $[a,b)$ zastąpimy przedziałem $(a,b]$ ($-\infty \leqslant a < b < +\infty$) lub też przedziałem (a,b) ($-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$).

Dowód. Ćwiczenie— por. Twierdzenie 7.7.2. □

11.4. Twierdzenie Morse'a

Twierdzenie 11.4.1. *Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem gwiaździstym względem punktu $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$* (14) *i niech $f \in \mathcal{C}^k(D)$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$). Wtedy istnieją funkcje $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}^{k-1}(D)$ takie, że*
$$f(x) - f(a) = \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) f_j(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in D.$$

Zauważmy, że musi być $f_j(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, $j = 1, \dots, n$. Istotnie,
$$\frac{f(a + he_j) - f(a)}{h} = f_j(a + he_j) \longrightarrow f_j(a), \quad j = 1, \dots, n.$$

Dowód Twierdzenia 11.4.1. Możemy założyć, że $a = 0$. Niech
$$f_j(x) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)dt, \quad x \in D.$$
Wtedy $f_j \in \mathcal{C}^{k-1}(D)$, $j = 1, \dots, n$ (zob. Twierdzenie 11.3.1). Ponadto, mamy:
$$\sum_{j=1}^n x_j f_j(x) = \int_0^1 \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)dt = f(x) - f(0).$$ □

Wniosek 11.4.2. *Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem gwiaździstym względem punktu 0 i niech $f \in \mathcal{C}^k(D)$ ($k \in \mathbb{N}_2 \cup \{\infty\}$), $f(0) = 0$, $\operatorname{grad} f(0) = 0$. Wtedy istnieją funkcje $f_{j,k} \in \mathcal{C}^{k-2}(D)$, $j,k = 1, \dots, n$, takie, że*
$$f(x) = \sum_{j,k=1}^n x_j x_k f_{j,k}(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in D, \text{ przy czym } f_{j,k} = f_{k,j}.$$

---

(11) Np. $A = P$ – kostka.
(12) Dla $k = 0$ warunek ten oznacza po prostu ciągłość f.
(13) Zauważmy, że nasze założenia gwarantują zbieżność wszystkich występujących w tezie całek niewłaściwych.
(14) Tzn. $a + t(x - a) \in D$ dla $x \in D$ i $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Zauważmy, że musi być $f_{j,k}(0) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(0)$, $j,k = 1,\dots,n$. Istotnie, na podstawie wzoru Taylora mamy:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(0) x_j x_k + o(\|x\|^2) = \sum_{j,k=1}^{n} x_j x_k f_{j,k}(x), \quad x \longrightarrow 0, \text{ a stąd}$$

$$\sum_{j,k=1}^{n} x_j x_k \Big(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(0) - f_{j,k}(x)\Big) = o(\|x\|^2), \quad x \longrightarrow 0.$$

W szczególności, biorąc $x = x(t) := te_j + te_k$ dla $j \neq k$, lub też $x = x(t) := te_j$ dla $j = k$, dostajemy

$$t^2\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(0) - f_{j,k}(x(t))\Big) = o(t^2), \quad t \longrightarrow 0,$$

skąd natychmiast wynika żądany wzór.

Dowód Wniosku 11.4.2. Na podstawie Twierdzenia 11.4.1 mamy $f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(x)$, $x \in D$, gdzie $f_j \in \mathcal{C}^{k-1}(D)$ oraz $f_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = 0$, $j = 1,\dots,n$. Stosując to samo twierdzenie do funkcji f_j, dostajemy

$$f(x) = \sum_{j,k=1}^{n} x_j x_k f_{j,k}(x), \quad x \in D,$$

gdzie $f_{j,k} \in \mathcal{C}^{k-2}(D)$, $j,k = 1,\dots,n$. Zastępując funkcję $f_{j,k}$ przez $\frac{1}{2}(f_{j,k} + f_{k,j})$ zapewniamy sobie symetrię. $\square$

Definicja 11.4.3. Niech $\Omega \in \operatorname{top}\mathbb{R}^n$, niech $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ i niech $a \in \Omega$. Załóżmy, że $f'(a) = 0$ (tzn. a jest punktem krytycznym funkcji f). Powiemy, że jest to *punkt krytyczny nieosobliwy*, jeżeli odwzorowanie $f''(a)$ (rozumiane jako $n \times n$–wymiarowa macierz symetryczna) ma rząd n. W przeciwnym przypadku mówimy, że punkt krytyczny jest *osobliwy*.

Przykład 11.4.4 (Punkty krytyczne osobliwe)**.** (a) $f(x) = x^3$: $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$. Punkt $x = 0$ jest jedynym punktem krytycznym; jest to punkt osobliwy.

(b) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}\sin^2(1/x), & \text{jeżeli } x \neq 0 \\ 0, & \text{jeżeli } x = 0 \end{cases}$: $f'(0) = f''(0) = 0$, 0 jest punktem krytycznym nieizolowanym (Ćwiczenie).

(c) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$: $f'(x,y) = [3x^2 - 3y^2, -6xy]$, $f''(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{bmatrix}$; $f'(0,0) = 0$, $f''(0,0) = 0$.

(d) $f(x,y) = x^2$: $f'(x,y) = [2x, 0]$, $f''(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Zbiór punktów krytycznych to prosta $x = 0$; wszystkie punkty krytyczne są osobliwe.

(e) $f(x,y) = x^2y^2$: $f'(x,y) = [2xy^2, 2x^2y]$, $f''(x,y) = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{bmatrix}$. Zbiór punktów krytycznych to dwie proste $xy = 0$; wszystkie punkty krytyczne są osobliwe.

Obserwacja 11.4.5 (Diagonalizacja form kwadratowych)**.** Rozważmy formę kwadratową $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \not\equiv 0$, postaci $f(x) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{j,k} x_j x_k = x^t A x$, gdzie $A := [a_{j,k}]$ jest macierzą symetryczną. Jeżeli $x = Px'$ zadaje zmianę współrzędnych (P jest macierzą nieosobliwą), to w nowych współrzędnych macierz formy f ma postać $P^t A P$ (jest to macierz przystająca do macierzy A). Proces *diagonalizacji* formy f polega na znalezieniu takich współrzędnych x', w których forma f ma postać

$$f(Px') = {x'_1}^2 + \dots + {x'_k}^2 - {x'}_{k+1}^2 - \dots - {x'_r}^2$$

dla pewnych $0 \leqslant k \leqslant r \leqslant n$. Wiadomo, że taka diagonalizacja jest zawsze możliwa. Jest oczywiste, że $r = \operatorname{rank} A$ (w szczególności, $r = n$, o ile A jest nieosobliwa). Wiadomo również, że liczby k, r zależą wyłącznie od f.

Twierdzenie 11.4.6 (Twierdzenie Morse'a [15]). *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, niech $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ i niech $a \in \Omega$ będzie punktem krytycznym nieosobliwym z $f(a) = 0$. Wtedy istnieje dyfeomorfizm $\Phi : U \longrightarrow \Phi(U) \subset \Omega$ klasy $\mathcal{C}^\infty$, gdzie U jest pewnym otoczeniem zera, taki że $\Phi(0) = a$ oraz*

$$f \circ \Phi(t) = t_1^2 + \dots + t_k^2 - t_{k+1}^2 - \dots - t_n^2, \quad t = (t_1, \dots, t_n) \in U, \text{ dla pewnego } k \in \{0, \dots, n\}.$$

Obserwacja 11.4.7. $\operatorname{grad}(f \circ \Phi)(t) = 0 \iff t = 0$, skąd w szczególności wynika, że punkty krytyczne nieosobliwe odwzorowań klasy $\mathcal{C}^\infty$ są izolowane.

Dowód Twierdzenia Morse'a. Możemy założyć, że $a = 0$. Zastosujemy indukcję. Pokażemy, że dla dowolnego $r \in \{1, \dots, n+1\}$ istnieje lokalna $\mathcal{C}^\infty$–dyfeomorficzna zmiana układu współrzędnych Φ_r, $\Phi_r(0) = 0$, po której, dla x w pewnym otoczeniu zera, mamy:

$$f \circ \Phi_r(x) = \sum_{i=1}^{r-1} \sigma_i x_i^2 + \sum_{j,k=r}^{n} x_j x_k f_{j,k}(x),$$

gdzie $\sigma_1, \dots, \sigma_{r-1} \in \{-1, 1\}$, $f_{j,k}$ są klasy $\mathcal{C}^\infty$ oraz $f_{j,k} = f_{k,j}$, $j, k = r, \dots, n$. Zauważmy, że przypadek $r = 1$, to Wniosek 11.4.2, zaś $r = n+1$, to teza Twierdzenia Morse'a. Przechodzimy do kroku indukcyjnego $r \rightsquigarrow r + 1$.

Niech $g := f \circ \Phi_r$. Wiemy, że $g''(0)(h) = f''(0)(\Phi_r'(0)(h)) + f'(0)(\Phi_r''(0)(h)) = f''(0)(\Phi_r'(0)(h))$, skąd, w szczególności, wynika, że macierz $g''(0)$ jest nieosobliwa. Zauważmy, że dla $p \in \{1, \dots, r-1\}$ i $q \in \{r, \dots, n\}$ mamy

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_p \partial x_q}(0) = \frac{\partial}{\partial x_q}\Big(2\sigma_p x_p + \sum_{j,k=r}^{n} x_j x_k \frac{\partial f_{j,k}}{\partial x_p}(x)\Big)\Big|_{x=0} = 0.$$

Stąd

$$g''(0) = \begin{bmatrix} 2\sigma_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & 2\sigma_{r-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & f_{r,r}(0) & \dots & f_{r,n}(0) \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & f_{n,r}(0) & \dots & f_{n,n}(0) \end{bmatrix}.$$

Ponieważ macierz $g''(0)$ jest nieosobliwa, zatem macierz $[f_{j,k}(0)]_{j,k=r,\dots,n}$ musi być również nieosobliwa. Po liniowej zmianie współrzędnych $x_r, \dots, x_n$ możemy uzyskać sytuację, w której $f_{r,r}(0) \neq 0$. Oznaczmy przez $\widetilde{\Phi}_r$ dyfeomorfizm powstały ze złożenia tej zmiany współrzędnych z dyfeomorfizmem Φ_r. Niech $\sigma_r := \operatorname{sgn}(f_{r,r}(0))$ i niech U będzie otoczeniem zera takim, że $\operatorname{sgn}(f_{r,r}(x)) = \sigma_r$, $x \in U$. Zdefiniujmy

$$x_r' = \Psi_r(x) := x_r \sqrt{|f_{r,r}(x)|} + \sigma_r \sum_{j=r+1}^{n} x_j \frac{f_{r,j}(x)}{\sqrt{|f_{r,r}(x)|}}, \quad x \in U.$$

Odnotujmy, że $\Psi_r(0) = 0$ oraz

$$\sigma_r {x'}_r^2 = x_r^2 f_{r,r}(x) + 2 \sum_{j=r+1}^{n} x_r x_j f_{r,j}(x) + \sum_{j,k=r+1}^{n} x_j x_k g_{j,k}(x),$$

gdzie $g_{j,k} := \frac{f_{r,j} f_{r,k}}{|f_{r,r}|} \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Rozważmy odwzorowanie

$$x' = \Psi(x) := (x_1, \dots, x_{r-1}, \Psi_r(x), x_{r+1}, \dots, x_n), \quad x \in U.$$

Mamy $\Psi(0) = 0$. Ponadto,

$$\frac{\partial \Psi_r}{\partial x_s}(0) = \delta_{r,r} \sqrt{|f_{r,r}(0)|} + \sigma_r \sum_{j=r+1}^{n} \delta_{j,s} \frac{f_{r,j}(0)}{\sqrt{|f_{r,r}(0)|}}.$$

---

[15] Harold Morse (1892–1977).

W szczególności, $\frac{\partial \Psi_r}{\partial x_s}(0) = 0$ dla $s \leqslant r-1$, a wiec $\det \Psi_r'(0) = \frac{\partial \Psi_r}{\partial x_r}(0) = \sqrt{|f_{r,r}(0)|} \neq 0$. W konsekwencji Ψ jest $\mathcal{C}^\infty$–dyfeomorfizmem $V \longrightarrow \Psi(V)$ w pewnym otoczeniu zera $V \subset U$. Ostatecznie mamy

$$\begin{aligned} f \circ \widetilde{\Phi}_r(x) &= \sum_{i=1}^{r-1} \sigma_i x_i^2 + x_r^2 f_{r,r}(x) + 2 \sum_{j=r+1}^{n} x_r x_j f_{r,j}(x) + \sum_{j,k=r+1}^{n} x_j x_k f_{j,k}(x) \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} \sigma_i x_i^2 + \sigma_r {x_r'}^2 - \sum_{j,k=r+1}^{n} x_j x_k g_{j,k}(x) + \sum_{j=r+1}^{n} x_r x_j f_{r,j}(x) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \sigma_i {x_i'}^2 + \sum_{j,k=r+1}^{n} x_j' x_k' h_{j,k}(x'). \end{aligned}$$ □

11.5. Całki krzywoliniowe II

Twierdzenie 11.5.1 (Niezależność całki krzywoliniowej od drogi całkowania)**.** *Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem i niech $V : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *dla dowolnej drogi $\gamma : [0,1] \longrightarrow D$ całka $\int_\gamma V dx$ zależy jedynie od końców tej drogi;*

(ii) *pole V jest* potencjalne*, tzn. istnieje funkcja $\Phi \in \mathcal{C}^1(D)$ (zwana* potencjałem*) taka, że*

$$V_j = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Warunek (i) pozwala zdefiniować dla $A, B \in D$ całkę $\int_A^B V dx$ rozumianą jako całka po dowolnej drodze łączącej A i B wewnątrz obszaru D. W szczególności, całka po dowolnej drodze zamkniętej jest równa zero.

Zauważmy, że potencjał pola jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do stałej.

Dowód. (ii) $\Longrightarrow$ (i): Na podstawie Twierdzenia 7.8.5 dostajemy

$$\int_\gamma V dx = \int_0^1 \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_0^1 (\Phi \circ \gamma)'(t) dt = \Phi(\gamma(1)) - \Phi(\gamma(0)).$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Ustalmy $A \in D$ i niech

$$\Phi(x) := \int_A^x V dx, \quad x \in D.$$

Wtedy dla $a \in D$ i dla $j \in \{1, \dots, n\}$, korzystając z niezależności całki od drogi, mamy

$$\begin{aligned} \Big| \frac{\Phi(a + he_j) - \Phi(a)}{h} - V_j(a) \Big| &= \Big| \frac{1}{h} \int_{[a, a+he_j]} V dx - V_j(a) \Big| = \Big| \int_0^1 V_j(a + the_j) dt - V_j(a) \Big| \\ &\leqslant \max\{|V_j(a + the_j) - V_j(a)| : 0 \leqslant t \leqslant 1\} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$ □

Twierdzenie 11.5.2 (Lemat Poincarégo [16])**.** *Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem gwiaździstym względem punktu a i niech $V \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$. Wtedy V jest polem potencjalnym wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_k} = \frac{\partial V_k}{\partial x_j}, \quad j, k = 1, \dots, n. \quad [17] \tag{$*$}$$

Przykład 11.5.3. Powinniśmy zawsze pamiętać o następującym przykładzie obszaru, w którym Lemat Poincarégo nie zachodzi.

Niech $D := (\mathbb{R}^2)_* = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\varphi(x,y) := \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2)$, $(x,y) \in D$, $P(x,y) := -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) := \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$. Wtedy $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ (Ćwiczenie), a wiec pole $V := (P, Q)$ spełnia warunek (*). Gdyby to pole było potencjalne w obszarze D, to na podstawie Twierdzenia 11.5.1,

[16] Jules Henri Poincaré (1854–1912).
[17] Mamy $\binom{n}{2}$ nietrywialnych warunków.

całka z tego pola po dowolnej drodze zamkniętej leżącej w D byłaby równa zero. Z drugiej strony, biorąc jako drogę okrąg jednostkowy mamy

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \int_0^{2\pi} \big(P(\cos t, \sin t)(-\sin t) + Q(\cos t, \sin t)\cos t\big)dt = 2\pi,$$

co daje sprzeczność.

Dowód Twierdzenia 11.5.2. Oczywiście, jeżeli pole V jest potencjalne i $\varPhi$ jest jego potencjałem, to $\varPhi$ musi być klasy $\mathcal{C}^2$, a zatem:

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 \varPhi}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varPhi}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial V_k}{\partial x_j}, \quad j, k = 1, \dots, n.$$

W drugą stronę: możemy założyć, że $a = 0$. Niech

$$\varPhi(x) := \int_{[0,x]} V dx = \int_0^1 \langle V(tx), x\rangle dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n V_i(tx) x_i dt, \quad x \in D.$$

Na podstawie twierdzenia o funkcjach danych całką funkcja $\varPhi$ jest klasy $\mathcal{C}^1$. Ponadto dla $x \in D$ i $j \in \{1, \dots, n\}$ mamy:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varPhi}{\partial x_j}(x) &= \int_0^1 \Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_j}(tx) t x_i + V_j(tx)\Big)dt \overset{\text{na mocy } (*)}{=} \int_0^1 \Big(t \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_j}{\partial x_i}(tx) x_i + V_j(tx)\Big)dt \\ &= \int_0^1 \Big(t \frac{d}{dt} V_j(tx) + V_j(tx)\Big)dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(tV_j(tx))dt = tV_j(tx)\big|_0^1 = V_j(x).\end{aligned}$$

□

11.6. Wzór Greena

Przypomnijmy (Definicja 4.5.1), że krzywa Jordana na płaszczyźnie to homemorficzny obraz okręgu $\sigma : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, który utożsamiamy z krzywą zamkniętą $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ($\gamma(t) := \sigma(e^{2\pi i t})$). Wiadomo, że każda krzywa Jordana $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dzieli płaszczyznę na dwa obszary:

- ograniczony, zwany *wnętrzem krzywej* γ i oznaczany $\operatorname{int}\gamma$,
- nieograniczony, zwany *zewnętrzem krzywej* γ i oznaczany $\operatorname{ext}\gamma$,

takie, że $\partial(\operatorname{int}\gamma) = \partial(\operatorname{ext}\gamma) = \gamma^*$.

Definicja 11.6.1. Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem ograniczonym takim, że dla pewnego $N \in \mathbb{N}_0$ mamy:

(†) $\partial D = \gamma_0^* \cup \dots \cup \gamma_N^*$, gdzie $\gamma_j : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ jest drogą Jordana[18] *zorientowaną dodatnio względem* D, tzn. „gdy idziemy po γ_j^* zgodnie z przebiegiem parametru, to obszar D mamy po lewej ręce", $j = 0, \dots, N$,
$\gamma_j^* \subset \operatorname{int}\gamma_0$, $j = 1, \dots, N$,
$\gamma_j^* \subset \operatorname{ext}\gamma_k^*$ dla $j, k = 1, \dots, N$, $j \neq k$.

Powiemy, że dla obszaru ograniczonego $D \subset \mathbb{R}^2$ spełniającego warunek (†) zachodzi *wzór Greena* [19], jeżeli dla dowolnych funkcji $P, Q \in \mathcal{C}^1(\varOmega)$, gdzie $\varOmega$ jest pewnym otoczeniem $\overline{D}$, zachodzi wzór:

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big). \quad [20]$$

Zauważmy, że na mocy Twierdzenia 11.1.10 obszar D jest regularny oraz, że całki po obu stronach powyższego wzoru istnieją. Problemem jest równość.

Obserwacja 11.6.2. (a) Przypuśćmy, że D jest *normalny względem osi* x, tzn.

$$D = \{(x,y) \in (a,b) \times \mathbb{R} : \varphi(x) < y < \psi(x)\},$$

[18] Tzn. drogą będącą krzywą Jordana.
[19] George Green (1793–1841).
[20] Stosujemy tu tradycyjne oznaczenia: $\int_{\partial D} Pdx + Qdy := \sum_{j=0}^N \int_{\gamma_j} Pdx + Qdy$.

gdzie $\varphi, \psi \in \mathcal{C}([a,b]) \cap \mathcal{C}'^1([a,b])$ i $\varphi(x) < \psi(x)$ dla $x \in (a,b)$ $\big(^{21}\big)$. Niech dalej $Q := 0$. Wtedy, na podstawie twierdzenia o całkach iterowanych, mamy:

$$\int_D \Big(\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) = -\int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy\Big) dx = \int_a^b \big(P(x, \varphi(x)) - P(x, \psi(x))\big) dx$$
$$= \int_{[a,b] \ni t \longrightarrow (t, \varphi(t))} P dx + 0 dy + \int_{\ominus\big([a,b] \ni t \longrightarrow (t, \psi(t))\big)} P dx + 0 dy = \int_{\partial D} P dx + 0 dy.$$

(b) Jeżeli D jest normalny względem osi y, to $\int_D \big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial y}\big) = \int_{\partial D} 0 dx + Q dy$.

(c) *Wzór Greena zachodzi dla obszarów normalnych względem obu osi* (np. dla prostokątów, trójkątów, elips, wielokątów wypukłych itd).

(d) *Wzór Greena zachodzi dla obszarów, które dają się podzielić na skończoną liczbę obszarów normalnych względem obu osi* (np. dla wielokątów (mogących mieć „dziury”)).

(e) Jeżeli dla obszaru D zachodzi wzór Greena, to $|D| = \frac{1}{2} \int_{\partial D} -y dx + x dy$. Wzór ten był podstawą budowy *planimetru*.

Definicja 11.6.3. Aby poznać ogólniejszą klasę obszarów, dla których zachodzi wzór Greena, rozważmy następującą konstrukcję. Niech $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ będzie krzywą Jordana. Dla dowolnego podziału $\pi = (t_0, \dots, t_m)$ odcinka $[0,1]$, niech $\gamma_\pi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ oznacza łamaną wpisaną w γ wyznaczoną przez podział π, tzn. $\gamma_\pi = [\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_m)]$.

Obserwacja 11.6.4. Niech $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ będzie normalnym ciągiem podziałów odcinka $[0,1]$.

(a) $\gamma_{\pi_k} \longrightarrow \gamma$ jednostajnie na $[0,1]$.

(b) Wobec (a), jeżeli krzywe $\gamma_{0,\pi_k}, \dots, \gamma_{N,\pi_k}$ są Jordana, to dla $k \gg 1$ spełniają one (†) dla pewnego obszaru D_{π_k}. Ponadto, jeżeli $\overline{D} \subset \Omega$, to $\overline{D}_{\pi_k} \subset \Omega$, $k \gg 1$.

(c) (Ćwiczenie*) Istnieje droga Jordana γ taka, że pewnego normalnego ciągu podziałów γ_{π_k} nie jest Jordana dla dowolnego k.

(d) Jeżeli γ jest klasy $\mathcal{C}^1$ oraz $\gamma_j'(t) \neq 0$, $t \in [0,1]$, to γ_{π_k} jest Jordana dla $k \gg 1$.

Istotnie, przypuśćmy, że istnieje normalny ciąg podziałów $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ oraz punkty $u_k', u_k'' \in [0,1]$, $k = 1, 2, \dots$, takie że $|u_k' - u_k''| < 1$ oraz $\gamma_{\pi_k}(u_k') = \gamma_{\pi_k}(u_k'')$, $k = 1, 2, \dots$. Możemy założyć, że $u_k' \longrightarrow u_0'$, $u_k'' \longrightarrow u_0''$. Na podstawie (a) wnioskujemy, że $\gamma(u_0') = \gamma(u_0'')$.

Odwzorowanie γ przedłuża się w sposób naturalny do odwzorowania $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, klasy $\mathcal{C}^1$, okresowego o okresie 1 i takiego, że $\gamma'(t) \neq 0$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$. Korzystając z twierdzenia o funkcji uwikłanej, widzimy, że dla dowolnego $u \in [0,1]$ istnieje ograniczony prostokąt otwarty $P_u = P_{u,x} \times P_{u,y}$ o środku w punkcie $\gamma(u)$ taki, że $\gamma^* \cap P_u$ jest wykresem (względem którejś osi) funkcji klasy $\mathcal{C}^1$. Niech dla przykładu $\gamma^* \cap P_u = \{(t, \varphi(t)) : t \in P_{u,x}\}$, gdzie $\varphi : P_{u,x} \longrightarrow P_{u,y}$ jest klasy $\mathcal{C}^1$. Weźmy dowolne prostokątne otoczenie $Q_u \subset\subset P_u$ punktu $\gamma(u)$. Zauważmy, że $\gamma_{\pi_k}^* \cap \overline{Q}_u$ musi być łukiem Jordana dla $k \geqslant k(u) \gg 1$. Dobierzmy $u_1, \dots, u_N \in [0,1]$ tak, że $\gamma^* \subset Q_{u_1} \cup \dots \cup Q_{u_N}$.

W przypadku, gdy $u_0' = u_0'' =: t_0$, niech $\gamma(t_0) \in Q_{u_{j_0}}$. Wtedy $\gamma_{\pi_k}(u_k'), \gamma_{\pi_k}(u_k'') \in Q_{u_{j_0}}$ dla $k \gg 1$, a więc $\gamma_{\pi_k}(u_k') \neq \gamma_{\pi_k}(u_k'')$ dla $k \gg 1$ — sprzeczność. W przypadku, gdy np. $u_0' = 0$, $u_0'' = 1$, wystarczy skorzystać z okresowości.

Twierdzenie 11.6.5 (Wzór Greena). *Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem spełniającym (†) i niech $(\pi_k)_{k=1}^\infty$ będzie normalnym ciągiem podziałów takim, że dla dowolnych $k \in \mathbb{N}$ i $j \in \{0, \dots, N\}$ mamy:*

- *γ_{j,π_k} jest krzywą Jordana,*
- *jeżeli $\pi_k = (t_{k,0}, \dots, t_{k,m_k})$, to $\gamma_j|_{[t_{k,i-1}, t_{k,i}]} \in \mathcal{C}^1([t_{k,i-1}, t_{k,i}])$, $i = 1, \dots, m_k$.*

*Wtedy wzór Greena zachodzi. W szczególności, jeżeli $\gamma_j : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ jest krzywą Jordana klasy $\mathcal{C}^1$, $\gamma_j'(t) \neq 0$, $t \in [0,1]$, $j = 0, \dots, N$, to wzór Greena zachodzi (Obserwacja 11.6.4(*d*)).*

W przyszłości pokażemy, że powyższe dodatkowe założenia można pominąć, a więc *wzór Greena zachodzi dla dowolnego obszaru spełniającego* (†) — zob. § **??**.

Dowód. Niech Ω, P i Q będą jak w Definicji 11.6.1. Wobec Obserwacji 11.6.4(b), możemy założyć, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, krzywe γ_{j,π_k}, $j = 0, \dots, N$, spełniają (†) i ograniczają pewien obszar $D_{\pi_k} \subset\subset \Omega$. Na podstawie Obserwacji 11.6.2(d), wzór Greena zachodzi dla D_{π_k}, tzn. $\int_{\partial D_{\pi_k}} P dx + Q dy = \int_{D_{\pi_k}} \big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\big)$,

---

$\big(^{21}\big)$ Nie wykluczamy równości na końcach przedziału.

$k \gg 1$. Jeżeli pokażemy zbieżność do siebie odpowiednich całek gdy $k \longrightarrow +\infty$, to uzyskamy wzór Greena dla D.

Ustalmy $k \in \mathbb{N}$ i $j \in \{0, \dots, N\}$. Dla uproszczenia oznaczeń niech $V = (P, Q)$, $\pi := \pi_k = (t_0, \dots, t_m)$, $\gamma = \gamma_j$. Możemy założyć (zmniejszając Ω), że V jest odwzorowaniem ograniczonym i jednostajnie ciągłym na Ω oraz że $f := \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ jest funkcją ograniczoną na Ω. Mamy:

$$\gamma_\pi(t) := \gamma(t_{i-1}) + \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})), \quad t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Liczymy:

$$\begin{aligned}
\Big| \int_{\gamma_\pi} V dx - \int_\gamma V dx \Big| &\leqslant \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big| \Big\langle V(\gamma_\pi(t)), \gamma'_\pi(t) \Big\rangle - \Big\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \Big\rangle \Big| \, dt \\
&= \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big| \Big\langle V(\gamma_\pi(t)), \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \Big\rangle - \Big\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \Big\rangle \Big| \, dt \\
&\leqslant \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big| \Big\langle V(\gamma_\pi(t)), \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) - \gamma'(t)(t_i - t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \Big\rangle \Big| \, dt \\
&\quad + \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big| \Big\langle V(\gamma_\pi(t)) - V(\gamma(t)), \gamma'(t) \Big\rangle \Big| \, dt \\
&\leqslant \big(\sup_\Omega \|V\| \big) \omega_{\gamma'}(\operatorname{diam} \pi) + \big(\max_{\gamma^*} \|\gamma'\| \big) \omega_V(\omega_\gamma(\operatorname{diam} \pi)).
\end{aligned}$$

Wynika stąd natychmiast, że $\int_{\partial D_{\pi_k}} P dx + Q dy \longrightarrow \int_{\partial D} P dx + Q dy$.

Niech $|f| \leqslant c$ na Ω. Wtedy $\Big| \int_{D_{\pi_k}} f - \int_D f \Big| \leqslant c(|D \setminus D_{\pi_k}| + |D_{\pi_k} \setminus D|)$; zauważmy, że zbiory $D \setminus D_{\pi_k}$, $D_{\pi_k} \setminus D$ są regularne. Pozostaje udowodnić, że $|D \setminus D_{\pi_k}| + |D_{\pi_k} \setminus D| \longrightarrow 0$, gdy $k \longrightarrow +\infty$. Istotnie, niech $\varepsilon > 0$ i niech $Q_1, \dots, Q_r$ będą kwadratami takimi, że $\partial D \subset \operatorname{int} Q_1 \cup \dots \cup \operatorname{int} Q_r$ i $|Q_1| + \dots + |Q_r| \leqslant \varepsilon$ (por. dowód Twierdzenia 11.1.10). Wtedy, jeżeli $k \gg 1$, to $(D \setminus D_{\pi_k}) \cup (D_{\pi_k} \setminus D) \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_r$, a zatem $|D \setminus D_{\pi_k}| + |D_{\pi_k} \setminus D| \leqslant |Q_1| + \dots + |Q_r| \leqslant \varepsilon$. $\square$

Oznaczenia

Rozdział 1

Oznaczenia

Rozdział 2

Rozdział 3

Rozdział 4

Oznaczenia

Rozdział 5

Rozdział 6

Rozdział 7

Rozdział 8

Rozdział 9

Rozdział 11

Indeks nazwisk

W

Indeks

Z