Egzamin wstępny na Studia Doktoranckie z Matematyki na UJ
6 września 2010
Czas trwania: 180 minut
Należy rozwiązać pięć z poniższej listy zadań.

1. Znaleźć wszystkie funkcje holomorficzne $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ takie, że $f(1-f(z)) = f(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

2. Dane niech będą punkty $P_1, \ldots, P_n$ leżące na sferze jednostkowej

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

w $\mathbb{R}^3$. Znaleźć kres dolny i górny zbioru

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} ||(x, y, z) - P_j||^2 : (x, y, z) \in S \right\},$$

gdzie $||(x, y, z)|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3. Niech μ będzie miarą nieujemną określoną na σ-algebrze zbiorów borelowskich w $\mathbb{R}^2$ taką, że μ przyjmuje wartość zero na zbiorach skończonych oraz miara dowolnego okręgu o promieniu dodatnim jest skończoną liczbą dodatnią. Wykazać, że μ przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste nieujemne.

4. Ustawiamy 101 namagnesowanych sztabek żelaza jedna bezpośrednio za drugą w rzędzie orientując je niezależnie i całkowicie losowo. Jednakowe bieguny magnesów odpychają się, a przeciwne przyciągają powodując łączenie się sztabek w bloki. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję liczby bloków.

5. Niech X będzie dowolną ograniczoną zmienną losową, zaś $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ niemalejącymi funkcjami mierzalnymi. Pokazać, że zmienne losowe $f(X)$ i $g(X)$ są dodatnio skorelowane, tj. $\mathbb{E}(f(X)g(X)) \geq \mathbb{E}(f(X))\,\mathbb{E}(g(X))$.

6. Niech f będzie ciągłą funkcją rzeczywistą określoną na przedziale $[a, b] \subset \mathbb{R}$, gdzie $a < b$ taką, że

$$\int_a^b f(x)x^n dx = 0 \quad \text{dla } n = 0, 1, \ldots.$$

Pokazać, że $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$.

7. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1 taką, że dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ $|f'(t)| \leq k < 1$. Niech $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem

$$F(x, y) = (x + f(y), y + f(x)),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Pokazać że odwzorowanie F jest C^1-dyfeomorfizmem $\mathbb{R}^2$ na $\mathbb{R}^2$.

8. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ istnieje macierz $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ taka, że $A^n = \mathrm{I}_2$, ale $A \neq \mathrm{I}_2$ ($\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ oznacza zbiór macierzy kwadratowych 2×2 o wyrazach całkowitych, a I_2 oznacza dwuwymiarową macierz jednostkową)?

9. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ istnieje epimorfizm grup $\Sigma_n \longrightarrow \mathbb{Z}_3$, gdzie Σ_n oznacza grupę permutacji zbioru n-elementowego.

10. Udowodnić, że zwarta powierzchnia (zanurzona w $\mathbb{R}^3$) ma punkt o dodatniej krzywiźnie Gaussa.

11. Niech $b, c \in (0, \infty)$. Dla $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rozwiązań równania

$$x'' + bx' + cx = \sin(t^2 + 1) - e^t,$$

obliczyć $\lim_{t\to+\infty}(x(t) - y(t))$.

12. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klasy C^2 takie, że

$$f'(x) = f(-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

13. Proces stochastyczny $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ ma dynamikę daną wzorem

$$dY_t = adt + bY_t dW_t,$$

gdzie a, b są stałymi rzeczywistymi oraz $\{W_t\}_{t\geq 0}$ jest procesem Wienera. Jaką dynamikę ma proces $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ dany wzorem

$$Z_t = e^{-tY_t^2}?$$

14. Niech $(X_1, \ldots, X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu wykładniczego o gęstości

$$f(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\exp(-\frac{x}{\lambda}) & x > 0, \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

.

Wykazać, że estymator $\hat{\lambda}^2 = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n X_i^2$ wariancji jest estymatorem nieobciążonym.