Egzamin sprawdzający na studia doktoranckie z matematyki na UJ
22 września 2014
Czas trwania: 180 minut
Rozwiązać należy pięć dowolnie wybranych zadań.

$\boxed{1}$ (*analiza*) Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie nierosnącym ciągiem liczb rzeczywistych nieujemnych takim, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Pokazać, że ciąg $\{na_n\}_{n=1}^{\infty}$ ma granicę. Czy założenie o monotoniczności ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest istotne?

$\boxed{2}$ (*analiza, topologia*) Pokazać, że grupa macierzy $\mathrm{SL}(n)$ jest podrozmaitością grupy liniowej $\mathrm{GL}(n) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, gdzie $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ oznacza zbiór macierzy kwadratowych wymiaru n o wyrazach rzeczywistych, $\mathrm{GL}(n) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$ oraz $\mathrm{SL}(n) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$.

$\boxed{3}$ (*analiza*) Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją okresową o okresie 2π, która ma rozwinięcie w szereg Fouriera

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Załóżmy, że $\{n^k a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{n^k b_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^{2014}$ dla każdego całkowitego $k \geqslant 1$. Pokazać, że f jest klasy C^{∞}.

$\boxed{4}$ (*analiza funkcjonalna*) Dany jest ciąg funkcjonałów liniowych $\varphi_n : X \to \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ na przestrzeni Banacha X, dla którego odwzorowanie

$$\Phi : X \ni x \mapsto \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^1$$

jest dobrze określone. Uzasadnić, że Φ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy φ_n jest ciągłe dla każdego $n \geqslant 0$.

$\boxed{5}$ (*teoria mnogości*) Wykazać, że jeśli $(X, \preccurlyeq)$ jest przeliczalną przestrzenią liniowo uporządkowaną, w której nie ma elementu największego ani najmniejszego oraz istnieje dokładnie jedna para (a, b) różnych jej elementów o tej własności, że

$$\{x \in X : \ a \preccurlyeq x \preccurlyeq b\} = \{a, b\},$$

to istnieje bijekcja z X na $\mathbb{Q} \setminus (0, 1)$, która jest ściśle rosnąca (względem porządku $\preccurlyeq$ w X oraz naturalnego porządku na $\mathbb{Q}$).

$\boxed{6}$ (*kombinatoryka*) Znaleźć i uzasadnić najprostszy wzór ogólny na liczbę ciągów cyfr w układzie dziesiętnym $(0, 1, \ldots, 9)$ o długości n, w których występuje parzysta liczba zer.

$\boxed{7}$ (*algebra*) Niech L będzie ciałem charakterystyki różnej od 2, a K – jego podciałem takim, że $(L : K) = 2$. Uzasadnić, że istnieje $a \in L$ takie, że $L = K(a)$ oraz $a^2 \in K$.

$\boxed{8}$ (*teoria liczb*) Wykazać, że jeśli $p > 5$ jest liczbą pierwszą, to $240 | (p^4 - 1)$.

$\boxed{9}$ (*rachunek prawdopodobieństwa*) Losujemy w sposób jednorodny i niezależny kolejne liczby $a_1, a_2, a_3, \ldots$ z odcinka $[0, 1]$. Niech $t \in (0, 1)$. Rozważmy zmienną losową Z o wartościach naturalnych zdefiniowaną jako pierwszy moment n, w którym iloczyn $\prod_{k=1}^{n} a_k$ będzie mniejszy lub równy t. Pokazać, że $Z - 1$ ma rozkład Poissona.

$\boxed{10}$ (*teoria miary*) Niech μ będzie nieujemną σ-skończoną miarą borelowską na $\mathbb{R}$, która znika na singletonach. Wykazać, że dla dowolnego zbioru borelowskiego $A \subset \mathbb{R}$ oraz dowolnej nieujemnej liczby $t \leqslant \mu(A)$ istnieje zbiór borelowski $B \subset A$, dla którego $\mu(B) = t$.

$\boxed{11}$ (*układy dynamiczne*) Dla układu dynamicznego w $\mathbb{R}^3$ generowanego przez uklad równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\begin{cases} x' = x^2 - y, \\ y' = \frac{1}{8}y^2 - x, \\ z' = -z + F(x,y), \end{cases}$$

znaleźć, w zależności od postaci funkcji $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, która jest klasy C^1, punkty równowowagi i zbadać ich stabilność.

$\boxed{12}$ (*procesy stochastyczne*) Niech $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ będzie jednowymiarowym standardowym procesem Wienera. Pokazać, że proces $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ zdefiniowany równością

$$Y_t := \int_0^t W_s ds, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

spełnia warunek $\mathbb{E}Y_t^3 = 0$.