Egzamin sprawdzający na studia doktoranckie z matematyki na UJ
18 września 2015
Czas trwania: 180 minut
Rozwiązać należy pięć dowolnie wybranych zadań.

$\boxed{1}$ (*analiza*) Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ jest niepustym zbiorem wypukłym i otwartym, funkcja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ jest ciągła, a jej pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}$ istnieją w każdym punkcie zbioru $\{(x, y) \in \Omega : x \in \mathbb{Q} \text{ lub } y \in \mathbb{Q}\}$ i są ograniczone. Uzasadnij, że f spełnia warunek Lipschitza.

$\boxed{2}$ (*topologia*) Wykaż, że jeśli funkcja ciągła $u\colon [0, 1] \to [0, 1]$ spełnia warunek

(∗) dla dowolnego punktu $x \in [0, 1]$ istnieje dodatnia liczba całkowita n, taka że $u^n(x) = x$ (gdzie $u^n = \underbrace{u \circ \ldots \circ u}_{n}$),

to $u \circ u = \mathrm{id}_{[0,1]}$.

$\boxed{3}$ (*geometria różniczkowa*) Powierzchnię $S \subset \mathbb{R}^3$ nazywamy umbiliczną, gdy w każdym jej punkcie krzywizny główne są równe. Wykaż, że powierzchnia umbiliczna jest albo podzbiorem pewnej płaszczyzny (afinicznej) w $\mathbb{R}^3$ albo pewnej sfery.

$\boxed{4}$ (*analiza funkcjonalna*) Niech X będzie przestrzenią Banacha, Y – przestrzenią unormowaną, a $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ciągiem odwzorowań $X \to Y$ liniowych i ciągłych takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x) = 0$ dla każdego $x \in X$.

(a) Czy wówczas $\sup\limits_{n\geqslant 1} \|T_n - T_{n+1}\| < \infty$?

(b) Czy wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n\| = 0$?

Należy uzasadnić odpowiedź na każde z pytań.

$\boxed{5}$ (*teoria mnogości*) Niech X będzie dowolnym zbiorem.

(a) Wykaż, że istnieje dobry porządek $\preccurlyeq$ na X, taki że dla dowolnego punktu $a \in X$ zachodzi nierówność $\#(\leftarrow, a) < \#X$, gdzie $(\leftarrow, a) = \{x \in X\colon\ x \preccurlyeq a,\ x \neq a\}$, a $\#$ oznacza liczbę kardynalną zbioru.

(b) Wykaż, że jeśli $\preccurlyeq_1$ i $\preccurlyeq_2$ są dwoma dobrymi porządkami na X, które spełniają warunek z punktu (a), to istnieje dokładnie jedna bijekcja $f\colon X \to X$ taka, że

$$x \preccurlyeq_1 y \iff f(x) \preccurlyeq_2 f(y)$$

dla wszelkich $x, y \in X$.

$\boxed{6}$ (*kombinatoryka, rachunek prawdopodobieństwa*) Urna zawiera na początku n czarnych kul. Za każdym razem losujemy z urny jedną kulę i:

- jeżeli wylosowana kula jest *czarna*, rzucamy symetryczną monetą i gdy wypadnie *orzeł* zamieniamy ją na białą, którą wkładamy do urny, gdy natomiast wypadnie *reszka* zwracamy ją do urny;
- jeżeli wylosowana kula jest *biała* zwracamy ją do urny.

Proces trwa tak długo, aż w urnie znajdzie się n białych kul. Pokaż, że wartość oczekiwana liczby losowań równa jest $2nH_n$, gdzie H_n jest sumą pierwszych n wyrazów ciągu harmonicznego, czyli $H_n := \sum_{k=1}^{n} 1/k$.

$\boxed{7}$ (*algebra*) Niech K będzie ciałem skończonym, $f \in K[X]$ będzie takie, że $f(0) \neq 0$. Pokaż, że istnieje liczba naturalna $n \geqslant 1$ taka, że $f | X^n - 1$.

$\boxed{8}$ (*teoria liczb*) Niech a i b będą liczbami całkowitymi takimi, że $7 \mid a^2 + b^2$. Czy może się zdarzyć, że $7 \nmid a$?

$\boxed{9}$ (*funkcje analityczne*) Niech $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją analityczną taką, że $\lim\limits_{z \to \infty} |f(z)| = +\infty$. Uzasadnij, że f jest wielomianem.

$\boxed{10}$ (*teoria miary*) Dla $n > 0$ zbiór $A_n \subset [0, 1]$ określony jest następująco: odcinek $[0, 1]$ dzielimy ma 2^n przedziałów długości 2^{-n} o rozłącznych wnętrzach (czyli na przedziały $[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}]$, $j = 1, \ldots, 2^n$) i numerujemy je „od lewej do prawej" liczbami od 1 do 2^n — zbiór A_n jest sumą wszystkich takich przedziałów o numerze nieparzystym (innymi słowy, $A_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} [\frac{2k-2}{2^n}, \frac{2k-1}{2^n}]$). Udowodnij, że każda funkcja całkowalna $u\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ (względem miary Lebesgue'a) spełnia warunek:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} u(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t.$$

$\boxed{11}$ (*układy dynamiczne*) Zbadaj stabilność wszystkich punktów stałych dla dyskretnego układu dynamicznego generowanego przez odwzorowanie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dane we współrzędnych biegunowych wzorem:

$$f(r, \theta) = \left(r^2, \theta - \sin\theta\right)$$

dla $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$. W przypadku punktów siodłowych znajdź rozmaitość stabilną i niestabilną.

$\boxed{12}$ (*procesy stochastyczne*) Niech (Ω, Σ, P) będzie przestrzenią probabilistyczną, zaś proces stochastyczny $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $X_n : \Omega \to \{1, 2\}$ dla $n \in \mathbb{N}$, łańcuchem Markowa o przestrzeni stanów $\{1, 2\}$ i macierzy przejścia M o wyrazach $M_{11} = 1/3$, $M_{12} = 2/3$, $M_{21} = M_{22} = 1/2$. Ponadto, niech funkcja $f : \{1, 2\} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(1) := 1$ i $f(2) := 4$. Znajdź funkcję $g : \{1, 2\} \to \mathbb{R}$ o tej własności, że proces stochastyczny $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}, n\neq 0}$, gdzie zmienne losowe $Y_n : \Omega \to \mathbb{R}$ dane są wzorami

$$Y_n = f(X_n) - f(X_0) - \sum\nolimits_{k=0}^{n-1} g(X_k)$$

dla $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, jest martyngałem względem naturalnej filtracji generowanej przez proces $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.