Dariusz Zawisza

Optymalne strategie inwestycyjne wobec ryzyka modelu

Praca doktorska

Instytut Matematyki
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński
Promotor:
dr hab. Armen Edigarian

KRAKÓW 2010

Spis treści

Wstęp

Motywacja. Niepewność i losowość jest nieodłączną częścią otaczającej nas rzeczywistości. Pojawia się ona w układach fizycznych, bilogicznych, ale również i w ekonomiczno-finansowych. Decydent musi w optymalny sposób wpływać na taki układ, aby osiągnąć pożądany skutek. Teoria stochastycznego sterowania jest odpowiednim narzędziem do rozwiązywania problemów decyzyjnych tego typu.

Taka sytuacja dotyczy również rynków inwestycyjnych. Zaczynając od prac Mertona [**23**] wyszukane metody teorii stochastycznego sterowania zostały rozwinięte w celu poszukiwania optymalnej strategii inwestycyjnej. Wspomniana teoria wykorzystuje pojęcie funkcji użyteczności (satysfakcji) mierzącej stopień zadowolenia inwestora z posiadanego dobra. Inwestor buduje stochastyczny model rynku finansowego i w danym modelu wybiera strategię inwestycyjną, która maksymalizuje oczekiwaną użyteczność przyszłej wartości portfela. Bardziej precyzyjnie inwestor maksymalizuje funkcjonał

$$X \to \mathbb{E}^P(U(X)).$$

Często jednak pomijano milczeniem fakt, że informacje dotyczące modelu rynku finansowego mają charakter statystyczny. Parametry modelu są estymowane z danych historycznych, w związku z tym w decyzjach inwestycyjnych należy również uwzględnić ryzyko płynące z ich niedokładności. Zdarzały się bowiem w historii duże straty różnorodnych instytucji finansowych spowodowane właśnie złym doborem modelu. Jako pierwszy na potrzebę odróżnienia ryzyka modelu (niepewności) od ryzyka związanego z konkretnym modelem probablistycznym, zwrócił uwagę Knight [**19**]. Ellsberg [**6**] natomiast dostraczył dowodów empirycznych potwierdzających iż dokonując wyborów decydenci nie kierują się postacią wyłącznie jednego modelu probablistycznego. Wśród różnych pomysłów uwzględnienia ryzyka modelu w optymalizacji, największą popularność zdobyła metoda minimaksowa, nosząca również nazwę optymalizacji odpornej. Metoda ta polega na wyznaczeniu rodziny miar probablistycznych $\mathcal{Q}$, wyznaczających zakres popełnionego przy konstrukcji modelu błędu i posługując się kryterium najgorszego możliwego scenariusza dążeniu do maksymalizacji funkcjonału odpornego

$$X \to \inf_{Q\in\mathcal{Q}} \mathbb{E}^Q(U(X)).$$

Okazało się również, że można podać aksjomatyczną definicję relacji

$$X \preceq Y \Longleftrightarrow \inf_{Q\in\mathcal{Q}} \mathbb{E}^Q(U(X)) \le \inf_{Q\in\mathcal{Q}} \mathbb{E}^Q(U(Y))$$

(Gilboa i Schmeidler [**12**]), w sposób analogiczny do aksjomatycznej definicji relacji

$$X \preceq Y \Longleftrightarrow \mathbb{E}^Q(U(X)) \le \mathbb{E}^Q(U(Y))$$

wprowadzonej przez Morgensterna i von Neumanna.

Niniesza praca jest poświęcona strategiom minimaksowym. Badania prowadzone są w modelu stanowiącym uogólnienie modelu Blacka-Scholesa. Rynek finansowy jest wyznaczony przez proces dyfuzji, którego współczynniki zależne są od obserwowalnego czynnika, który nie jest przedmiotem obrotu giełdowego. Model obejmuje w szczególności modele stochastycznej zmienności, modele krótkoterminowej stopy procentowej oraz modele cen surowców energetycznych.

Przegląd literatury. Pierwszy ważny krok w zagadnieniach dotyczących poszukiwania optymalnej strategii inwestycyjnej został wykonany przez Markowitza [**21**] w roku 1952. Optymalnymi nazwał on te strategie, dla których stopa zwrotu z prortfela ma najmniejszą wariancję wśród tych o ustalonej oczekiwnej stopie zwrotu. Była to jednak optymalizacja statyczna, co oznacza, że portfel nie zmieniał się od początku inwestycji aż do jej końca. Przełomu dokonał Merton [**23**], [**24**], który sformułował zagadnienie dynamiczne, w którym portfel może się zmieniać w każdym momencie trwania inwestycji. Według teorii zbudowanej przez niego strategia optymalna to taka, któr maksymalizuje oczekiwaną użyteczność wartości portfela. Wraz z pojawianiem się nowych modeli rynków finansowych, zagadnienia dotyczące wyboru optymalnej strategii inwestycyjnej stały się obiektem zainteresowania wielu matematyków. Bogaty zbiór literatury nie pozwala jednak wypisać wszystkich znaczących osiągnięć w tej dziedzinie. Tu zostaną przywołane tylko te, które miały wpływ na wygląd tej pracy. Dobry przewodnik po tych zagadnieniach stanowi książka Phama [**29**].

Rozwiązania problemów inwestycyjnych dla skończonego horyzontu czasowego, i w modelach analogicznych do modelu rozważanego w tej rozprawie, odnajdziemy w pracach Zariphopoulou [**41**], [**42**], Musiela i Zariphopoulou [**25**], Stoikov i Zariphopoulou [**35**], Pham [**30**], natomiast dla nieskończonego horyzontu inwestycyjnego w pracy Hernandeza i Fleminga [**17**]. Są to rozwiązania bazujące na teorii sterowania stochastycznego. Należy zaznaczyć, że teoria sterowania nie jest jedyną metodą rozwiązywania problemów optymalizacyjnych w finansach. Często rozwiązania oprate są o tzw. metodę dualną wykorzystującą transformację Fenchela Legendre'a i metody analizy wypukłej lub metodę opartą na teorii równań stochastycznych wstecznych (ang. Backward Stochastic Differential Equations). Jednakże metody te, w przeciwieństwie do zagadnień sterowania, skupiają sie głównie na wykazaniu istnienia optymalnej strategii i nie zawsze dostarczają metod jej konstrukcji.

Optymalizacja odporna pojawiła się w literaturze poświęconej strategiom inwestycyjnym na początku XXI w. W pracach Fölmer i Gundel [**10**], Gundel [**14**], Schied i Wu [**32**] różnorodne problemy inwestycyjne rozwiązywane były metodą dualną. Aby wypisać strategię optymalną dla funkcji klasy HARA (ang. hyperbolic absolute risk aversion), Hernandez i Schied [**18**] [**31**] oraz Schied [**33**] wykorzystują połączenie metod analizy wypukłej i teorii stochastycznego sterowania. Mataramvura i Øksendal [**22**], Øsendal i Sulem [**28**], [**27**] rozwiązują problemy inwestycyjne oparte o procesy dyfuzyjno-skokowe wykorzystując teorię gier różniczkowych i równań Hamiltona-Jacobiego-Bellmana-Isaaca. Równanie HJBI wykorzystywane jest również w modelach przełącznikowych w pracy Siu [**34**]. Należy również wyróżnić pracę Talaya i Zhenga w której dowodzone jest, że funkcja warości odpowiedniej gry różniczkowej dla modelu dyfuzyjnego jest rozwiązaniem lepkościowym równania HJBI. Rozwiązanie dla funkcji CARA (constant absolute risk aversion) zostało znalezione w pracy Zawiszy [**43**]. Nie powinno się zapominać również o pracach poświęconych wpływowi ryzyka modelu na wycenę instrumentów pochodnych. Warto przeczytać artykuł napisany przez Conta [**5**]. Praca ta zawiera również bogatą bibliografię dotyczącą tego zagadnienia.

Niniejsza rozprawa również opiera się na teorii gier różniczkowych i równaniach HJBI. Nowością w stosunku do obecnego stanu literatury są rozwiązania odpornej wersji problemu Markowitza oraz sformułowanie problemu minimaksowego dla nieskończonego horyzontu czasowego umożliwiającego przeprowadzenie dowodu twierdzenia weryfikacyjnego. Przeprowadzane są też dowody twierdzeń o istnieniu i jednoznaczności gładkich rozwiązań semiliniowych równań cząstkowych. Wykazano w ten sposób, że możliwe jest osłabienie, zaproponowanych w wielu pracach, założeń dotyczących współczynników modelu.

Organizacja pracy. Rozprawa została podzielona na 5 rozdziałów. Pierwszy rozdział poświęcony został sformułowaniu zagadnienia. Opisana została również metoda rozwiązania wykorzystująca teorię stochastycznych gier różniczkowych. Sformułowane i udowodniona została odpowiednia wersja twierdzenia weryfikacyjnego (twierdzenie 1.3.2 łączącego równanie Hamiltona-Jacobiego-Bellmana-Isaaca ze wspomnianą grą. Zagadnienie zostało sformułowane dość ogólnie tak, aby obejmowało możliwie szeroką klasę problemów inwestycyjnych. W kolejnych rozdziałach przedstawione są rozwiązania dla typowych funkcji użyteczności. Nie powinniśmy jednak spodziewać się, że dla wybranej funkcji użyteczności problem może być rozwiązany w dużej ogólności. Dlatego w kolejnych rodziałach badane będą tylko te problemy, dla których rozwiązanie istnieje i można je wypisać korzystając z rozwiązań równania cząstkowego.

W drugim rozdziale ogólne rezultaty z rozdziału pierwszego zostały wykorzystane do zbadania problemów inwestycyjnych dla funkcji użyteczności klasy HARA ($U(x) = x^\gamma$). Uzyskujemy między innymi rozwiązanie (zob. twierdzenie 2.1.2) wypracowane innymi metodami w pracach Hernandeza i Schieda [**18**] i Schieda [**33**]. Optymalna strategia oparta jest o równanie cząstkowe, które my dodatkowo potrafimy uprościć do równania Hamiltona-Jacobiego-Bellmana stosując transformacje wprowadzone do literatury przez Zariphopoulou [**41**], [**42**]. Dla wygody oznaczeń w tym oraz nastepnych rozdziałach przedstwiony jest rynek składający się z jednego ryzykownego aktywu i konta bankowego. Uzyskane w rozdziale pierwszym wyniki umożliwiają rozszerzenie rozwiązania do przypadku rynku wielowymiarowego.

Pierwsza część rozdziału trzeciego dotyczy problemu zabezpieczenia instrumentu pochodnego opartego o czynnik, którym nie można obracać na rynku. Są to wyniki (zob tw. 3.1.3), które zostały opublikowane w czasopiśmie Applicationes Mathematicae (Zawisza [**43**]). W drugiej części rozdziału trzeciego sformułowany zostaje problem odporny w oparciu o kryterium Markowitza. Według wiedzy autora wyniki tu uzyskane (zob. twierdzenie 3.2.4) nie pojawiły się wcześniej w literaturze. Oba rozważane w tym rozdziale problemy rozpatrywane są łącznie, ponieważ w obu przypadkach dopuszczamy aby wartość portfela inwestora przyjmowała wartość ujemną, ponadto zakładamy deterministyczną postać stopy procentowej.

W rozdziale czwartym badana jest odporna wersja problemu inwestycyjnego z nieskończonym horyzontem inwestycyjnym; dowodzona jest odpowiednia postać twierdzenia weryfikacyjnego (zob. twierdzenie 4.1.1), które następnie stosowane jest do użyteczności klasy HARA.

Na rozdział piąty składają się dowody istnienia i jednoznaczności równań semiliniowych, które zostały wykorzystane w rozdziałach poprzedzających (zob. tw. 5.2.1, 5.2.2 oraz 5.3.4). W rezultatach tych pojawiają się słabsze założenia dotyczące współczynników modelu niż cytowane w literaturze rezultaty pochodzące z książek Fleming i Rischel [**8**], Fleming i Soner [**9**]. W dowodach wykorzystywany jest wzór Feynmana-Kaca i metody analogiczne do tych zaproponowanych w pracy Becherer i Schweizer [**1**] dla równań reakcji dyfuzji.

Podziękowania. Jestem wdzięczny mojemu promotorowi dr hab. Armenowi Edigarianowi za wsparcie udzielone podczas pisania niniejszej rozprawy.

ROZDZIAŁ 1

Podstawowe fakty, oznaczenia i sformułowanie zagadnienia

1.1. Oznaczenia, definicje i podstawowe rezultaty

1.1.1. Analiza stochastyczna.

Rozprawa rozpoczyna się wprowadzeniem niezbędnych oznaczeń. Dokonany zostanie również przegląd rezultatów, których znajomość jest niezbędna do zrozumienia tej pracy. Pochodzą one głównie z książek Øksendala [**26**] oraz Phama [**29**].

Przez $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}, \mathcal{F}, P)$ oznaczamy przestrzeń probablistyczną z filtracją $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$, gdzie $\mathbb{T} = [0,T]$ lub $\mathbb{T} = [0,+\infty)$, względnie $\mathbb{T} = [T',T]$, $T, T' > 0$. Pod pojęciem *procesu stochastycznego* X na $\mathbb{T}$ rozumiemy rodzinę wektorów losowych $\{(X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^m) \mid t \in \mathbb{T}\}$ o ustalonym wymiarze m.

Definicja 1.1.1.

(1) *Proces* $\{X_t \mid t \in \mathbb{T}\}$ *nazywany jest mierzalnym jeśli odwzorowanie* $\Omega \times \mathbb{T} \ni (\omega, t) \to X_t(\omega)$ *jest* $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbb{T})$ *- mierzalne*[1].
(2) *Proces* $\{X_t \mid t \in \mathbb{T}\}$ *nazywany jest adaptowanym do filtracji* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$*, jeśli dla dowolnego* $t \in \mathbb{T}$ *zmienna losowa* X_t *jest* $\mathcal{F}_t$ *- mierzalna.*
(3) *Proces* $\{X_t \mid t \in \mathbb{T}\}$ *nazywany jest progresywnie mierzalnym względem filtracji* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$*, jeśli dla dowolnego* $T \in \mathbb{T}$ *odwzorowanie* $\Omega \times [0,T] \ni (\omega, t) \to X_t(\omega)$ *jest* $\mathcal{F}_T \times \mathcal{B}([0,T])$ *- mierzalne.*

Jeśli η jest funkcją borelowsko mierzalną i proces X jest mierzalny (adaptowany / progresywnie mierzalny), to z faktu iż złożenie funkcji mierzalnej i borelowsko mierzalnej jest mierzalne wynika, że proces $\eta(X)$ jest mierzalny (adaptowany / progresywnie mierzalny).

Definicja 1.1.2. *Proces* $\{X_t \mid t \in \mathbb{T}\}$ *nazywamy* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ *- martyngałem jeśli jest on* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ *- adaptowany,* $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ *dla* $t \in \mathbb{T}$ *oraz*

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s, \quad P - p.w, \quad s \leq t.$$

Definicja 1.1.3. *Proces* $\{X_t \mid t \in \mathbb{T}\}$ *nazywamy lokalnym* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ *-martyngałem jeśli jest* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ *- adaptowany i istnieje niemalejący ciąg momentów stopu* $\{\tau_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ *taki, że* $\lim\limits_{n\to+\infty} \tau_n = +\infty$ *oraz dla każdego* n *proces* $\{X_{t\wedge\tau_n} \mid t \in \mathbb{T}\}$ *jest* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ -martyngałem.

Definicja 1.1.4. $W = \{(W_t^1, W_t^2, \dots, W_t^n)^T \mid t \in \mathbb{T}\}$[2] *nazywamy standardowym procesem Wienera, gdy* $P(W_0 = 0) = 1$*, prawie wszystkie trajektorie są ciągłe oraz przyrosty są*

[1] $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbb{T})$ oznacza σ-algebrę produktową $\mathcal{F}$ i zbiorów borelowskich

[2] Symbolem A^T oznaczamy transpozycję macierzy A

niezależne i stacjonarne o rozkładzie wielowymiarowym normalnym ze średnią 0 *i macierzą kowariancji równą* $(t-s)I$ [3].

$\{\mathcal{F}_t^W\}_{t\in\mathbb{T}}$ oznacza filtrację generowaną przez proces Wienera i zbiory P - miary 0. Symbolem

$$\int_0^T \sigma_s dW_s = \sum_{j=1}^n \int_0^T \sigma_s^j dW_s^j$$

oznaczamy całkę stochastyczną względem $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t\in[0,T]}$ – progresywnie mierzalnego procesu $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^n)$ takiego, że

$$P\bigg(\int_0^T |\sigma_s|^2 ds < \infty\bigg) = 1.$$

Definicję całki stochastycznej można odnaleźć między innymi w książce Øksendala [**26**].

Definicja 1.1.5. *Niech* $W = (W^1, W^2, \ldots, W^n)^T$ *będzie standardowym procesem Wienera. Definiujemy proces Itô jako proces* $X = (X^1, X^2, \ldots, X^m)^T$ *o wartościach w* $\mathbb{R}^m$ *taki, że prawie na pewno*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \qquad 0 \le t \le T,$$

$$\text{to znaczy} \quad X_t^i = X_0^i + \int_0^t b_s^i ds + \sum_{j=1}^n \int_0^t \sigma_s^{i,j} dW_s^j, \qquad 0 \le t \le T,$$

gdzie X_0 *jest* $\mathcal{F}_0^W$ *mierzalna,* $b = (b^1, \ldots, b^m)^T$, $\sigma = (\sigma^1, \ldots, \sigma^n) = (\sigma^{i,j})_{1\le i\le m,\, 1\le j\le n}$ *są progresywnie mierzalnymi procesami względem filtracji* $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t\in[0,T]}$ *takimi, że*

$$P\bigg(\int_0^T |b_s| ds + \int_0^T |\sigma_s|^2 ds < \infty\bigg) = 1.$$

Zapisuje się często:

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t.$$

Definicja 1.1.6. *Jeśli* X *jest procesem Itô i* $\pi = (\pi^1, \pi^2, \ldots, \pi^m)$ *jest procesem* $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t\in[0,T]}$ *– progresywnie mierzalnym takim, że*

$$P\bigg(\int_0^T |\pi_s b_s| ds + \int_0^T \pi_s^2 \sigma_s^2 ds < \infty\bigg) = 1,$$

to definiujemy całkę

$$\int_0^T \pi_s dX_s := \int_0^T \pi_s b_s ds + \int_0^t \pi_s \sigma_s dW_s.$$

[3] I oznacza macierz identyczości

Twierdzenie 1.1.7 (Wzór Itô). *Jeśli X jest procesem Itô, i funkcja f jest klasy $C^{2,1}$ na zbiorze $\mathbb{R}^m \times [0,T]$, to prawie na pewno, dla dowolnego $t \in [0,T]$ mamy*

$$f(X_t,t) = f(X_0,0) + \int_{0,t} \frac{\partial f}{\partial t}(X_s,s)ds + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(X_s,s)b^i(s)ds$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(X_s,s)\sum_{k=1}^{n}\sigma_s^{i,k}\sigma_s^{j,k}ds + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(X_s,s)\sigma_s^{i,j}dW_s^j.$$

Twierdzenie 1.1.8 (Twierdzenie Girsanowa, zob. Øksendal [**26**]). *Jeśli $\{\eta_t = (\eta_{1t}, \eta_{2t}, \ldots, \eta_{nt}) \mid t \in [0,T]\}$ jest $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t\in[0,T]}$ – progresywnie mierzalnym procesem stochastycznym i*

$$\mathbb{E}\exp\left(\int_0^T \eta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T |\eta_s|^2 ds\right) = 1,$$

to proces

$$W_t^{\eta,j} := W_t^j - \int_0^t \eta_{js}ds, \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

jest procesem Wienera (oraz $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t\in[0,T]}$ martyngałem) względem miary określonej na $\mathcal{F}_T$ i zadanej przez

$$\frac{dQ^\eta}{dP} = \exp\left(\int_0^T \eta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T |\eta_s|^2 ds\right).$$

Sam proces

$$\mathcal{E}\left(\int \eta_s dW_s\right)_t := \exp\left(\int_0^t \eta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\eta_s|^2 ds\right), \qquad t \in [0,T]$$

nazywamy *eksponentą Doleans-Dade.*

Uwaga 1.1.9. *Jeśli proces σ jest progresywnie mierzalny względem $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t\in[0,T]}$ i*

$$P\left(\int_0^T |\sigma_s|^2 ds\right) = 1,$$

to nie musi być on adaptowany względem $\{\mathcal{F}_t^{W^\eta}\}_{t\in[0,T]}$. Mimo to całka

$$\int_0^T \sigma_s dW_s^\eta.$$

jest dobrze zdefiniowana. Mianowicie analogicznie do całki wzgledem procesu Wienera wprowadza się całkę względem martyngału całkowalnego z kwadratem [4]). Ponadto proces

$$\left\{\int_0^t \sigma_s dW_s^\eta \;\middle|\; t \in [0,T]\right\}$$

jest lokalnym Q^η i $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t\in[0,T]}$ martyngałem. Co w szczególności oznacza, że istnieje niemalejący ciąg momentów stopu $\{\tau_n \mid n = 1,2,\ldots\}$ taki, że $\lim_{n\to+\infty}\tau_n = +\infty$ oraz

$$\mathbb{E}^{Q^\eta}\int_0^{t\wedge\tau_n} \theta_s dW_s^\eta = 0.$$

[4]Definicja takiej całki i jej podstawowe własności została podana między innymi w książce Phama [**29**]

Twierdzenie 1.1.10 (**Kryterium Novikova**, zob. Øksendal [**26**]). *Jeśli*

$$\mathbb{E}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T |\eta_s|^2 ds\right) < \infty,$$

to

$$\mathbb{E}\exp\left(\int_0^T \eta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T |\eta_s|^2 ds\right) = 1.$$

W pracy zostaną wykorzystane elementy teorii stochastycznego sterowania. Teoria ta znajduje zastosowanie wszędzie tam, gdzie należy dobrać odpowiednie parametry (sterowanie) układu fizycznego aby pracował on w sposób pożądany. Ewolucję układu, gdy zostało wybrane sterowanie $\pi = \{\pi_t \mid s \leq t \leq T\}$ opisuje stochastyczne równanie różniczkowe

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t, t, \pi_t)dt + \sigma(X_t, t, \pi_t)dW_t, \\ X_s = \xi. \end{cases} \tag{1.1}$$

Rozwiązaniem (silnym) problemu (1.1) nazywamy $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t\in[s,T]}$ - adaptowany i prawie wszędzie ciągły proces X, dla którego P- prawie na pewno

$$X_t = \xi + \int_s^t b(X_k, k, \pi_k)dk + \int_s^t \sigma(X_k, k, \pi_k)dW_k, \qquad t \in [s, T].$$

Jeśli istnieje jednoznaczne rozwiązanie problemu (1.1) to oznaczane jest ono jako $X^\pi(\xi, s)$. Dla danego odwzorowania

$$F : C([0, T]) \to \mathbb{R}$$

przyjmujemy, że

$$\mathbb{E}^Q_{x,s} F(X^\pi) := \mathbb{E}^Q F(X^\pi(x, s)),$$

gdzie $\mathbb{E}^Q$ oznacza wartość oczekiwaną względem miary Q.

Twierdzenie 1.1.11 (zob. Pham [**29**]). *Niech istnieje stała L, że dla każdego $t \in [0, T]$, $x, y \in \mathbb{R}^m$*

$$|b(x, t, \pi) - b(y, t, \pi)| \leq L|x - y|,$$
$$|\sigma(x, t, \pi) - \sigma(y, t, \pi)| \leq L|x - y|,$$
$$\mathbb{E}\int_0^T \big(\sigma^2(0, t, \pi_t) + b^2(0, t, \pi_t)\big)dt < \infty,$$

Wtedy dla wszystkich $s \in [0, T]$ i dla każdej zmiennej losowej $\mathcal{F}_s$ - mierzalnej, $\mathbb{E}|\xi|^2 < \infty$ istnieje jednoznaczne[5] *i silne rozwiązanie problemu* (1.1) *na odcinku* $[s, T]$. *Ponadto*

$$\mathbb{E}_{x,s}\big(\sup_{s\leq t\leq T} |X_t^\pi|^2\big) < \infty$$

[5]Jeśli X i Y są dwoma rozwiązaniami to jednoznaczność oznacza, że $P(X_t = Y_t$ dla dowolnego $t \in [s, T]) = 1$

oraz

$$\mathbb{E} \sup_{s \le t \le T} |X_t^\pi(x,s) - X_t^\pi(y,s)|^2 \le K_T |x-y|^2,$$

gdzie K_T jest stałą zależną wyłącznie od T.

Twierdzenie 1.1.12 (**Własność Markowa**, zob Øksendal [**26**]). *Niech dane będzie równanie*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t,$$

gdzie funkcje b i σ spełniają warunek Lipschitza. Wtedy dla dowolnej ograniczonej funkcji borelowskiej f i $t,h \ge 0$

$$\mathbb{E}_{x,0}\big(f(X_{t+h}) \mid \mathcal{F}_t^W\big)(\omega) = \mathbb{E}_{X_t(x,0)(\omega)} f(X_h), \quad P\text{- } p.\ w.$$

Szczególne znaczenie w matematyce finansowej mają równania liniowe:

$$\begin{cases} dX_t = b_t X_t dt + \sigma_t X_t dW_t, \\ X_s = x. \end{cases} \tag{1.2}$$

Procesy b oraz σ występujące w równaniu (1.2) nazywamy odpowiednio *dryftem* i *zmiennością*.

Stwierdzenie 1.1.13. *Jeśli b oraz σ są procesami $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t\in[0,T]}$ progresywnie mierzalnymi i*

$$P\left(\int_0^T |b_t| dt + \int_0^T \sigma_t^2 dt < \infty\right) = 1,$$

to równanie (1.2) *posiada jednoznaczne rozwiązanie:*

$$X_t = x \exp\left(\int_0^t \left(b_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right) ds + \int_0^t \sigma_s dW_s\right).$$

Z twierdzenia 1.1.11 wynika ponadto, następujące

Stwierdzenie 1.1.14. *Jeśli procesy b i σ są ograniczone i Z jest rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego*

$$dZ_t = b_t Z_t dt + \sigma_t Z_t dW_t,$$

wtedy

$$\mathbb{E}_{z,t}\big(\sup_{t \le s \le T} |Z_s|\big) < \infty$$

dla dowolnych $(z,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$.

1.1.2. Twierdzenie o mierzalnym wyborze.

Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem borelowskim, natomiast $\Gamma \subset \mathbb{R}^k$ zbiorem zwartym. Dana jest również ciągła funkcja $f : U \times \Gamma \to \mathbb{R}$. Zagadnienie mierzalnego wyboru polega na wykazaniu, że istnieje borelowsko mierzalna funkcja $\eta^* : U \to \Gamma$ taka, że $\eta^*(y) \in \arg\min_{\eta\in\Gamma} f(y,\eta)$. Rezultaty tego typu są wykorzystywane w teorii sterowania do konstrukcji rozwiązań optymalnych. Często cytowanym w literaturze wynikiem jest twierdzenie udowodnione w książce Fleminga i Rischela [**8**] (dodatek B). Niestety w wielu

przypadkach bywa ono niewystarczające. Według niego odpowiednia funkcja borelowska owszem istnieje, ale warunek $\eta^*(y) \in \arg\min_{\eta\in\Gamma} f(y,\eta)$ jest spełniony tylko z dokładnością do zbioru miary Lebesgue'a 0. Do wykazania użytecznego dla nas
twierdzenia wykorzystany zostanie dosyć stary rezultat wywodzący się jeszcze od Kuratowskiego i Ryll-Nardzewskiego, a którego wypowiedź można odnaleźć w pracy Wagnera [**39**] (twierdzenie 3.1). Wynika z niego, że do istnienia η^* wystarczy, aby spełnione były następujące warunki:

- Γ jest przestrzenią polską,
- dla wszystkich $y \in U$ zbiór $\arg\min_{\eta\in\Gamma} f(y,\eta)$ jest zbiorem domkniętym.
- dla wszystkich zbiorów otwartych $V \subset \Gamma$ zbiór
$$\{y \in U \mid \arg\min_{\eta\in\Gamma} f(y,\eta) \cap V \neq \emptyset\}$$
jest zbiorem borelowskim.

Twierdzenie 1.1.15. *Jeżeli funkcja $H(y) := \min_{\eta\in\Gamma} f(y,\eta)$ jest ciągła, to istnieje funkcja borelowsko mierzalna η^* taka, że $\eta^*(y) \in \arg\min_{\eta\in\Gamma} f(y,\eta)$.*

Dowód. Sprawdzamy warunki podane powyżej.
$\arg\min_{\eta\in\Gamma} f(y,\eta)$ jest zbiorem domkniętym, ponieważ f jest funkcją ciągłą.
Wybierzmy dowolny otwaty zbiór $V \subset \Gamma$. Niech $\{K_n \mid n = 1,2,\ldots\}$ będzie ciągiem domkniętych wstępujących zbiorów wypełniających V. Wtedy
$$\{y \in U \mid \arg\min_{\eta\in\Gamma} f(y,\eta) \cap V \neq \emptyset\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{y \in U \mid \arg\min_{\eta\in\Gamma} f(y,\eta) \cap K_n \neq \emptyset\}$$
Pokażemy, że dla dowolnego zbioru domkniętego K zbiór
$$W := \{y \in U \mid \arg\min_{\eta\in\Gamma} f(y,\eta) \cap K \neq \emptyset\}$$
jest zbiorem domkniętym.

Niech $\{y_n \mid n = 1,2,\ldots\} \subset W$ zbieżny do $\bar{y} \in U$. Istnieje ciąg $\{\eta^*(y_n) \mid n = 1,2,\ldots\}$ taki, że $\eta^*(y_n) \in \arg\min_{\eta\in\Gamma} f(y,\eta) \cap K$. Ponieważ Γ zwarty to można wybrać podciąg $\{\eta^*(y_{n_k}) \mid k = 1,2,\ldots\}$ zbieżny do $\bar{\eta} \in K$. Mamy
$$H(\bar{y}) = \lim_{k\to+\infty} H(y_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty} f(y_{n_k}, \eta^*(y_{n_k})) = f(\bar{y},\bar{\eta})$$
Zatem $\bar{y} \in W$ i W jest domknięty w U. □

1.2. Sformułowanie zagadnienia i metoda rozwiązania

1.2.1. Model.

Praca oparta jest na modelu rynku finansowego, który jest naturalnym uogólnieniem modelu Blacka-Scholesa. Składa się on z $m+1$ aktywów finansowych $\{B_t \mid 0 \leqslant t \leqslant T\}$ i $\{S_t = (S_t^1, S_t^2, \ldots, S_t^m) \mid 0 \leqslant t \leqslant T\}$ oraz czynnika, który nie jest przedmiotem obrotu giełdowego $\{Y_t \mid 0 \leqslant t \leqslant T\}$. B interpretujemy jako konto bankowe, natomiast S to aktywa obarczone ryzykiem np. akcje giełdowe. Zakładamy, że procesy, które zostały wprowadzone powyżej są silnymi rozwiązaniami układu stochastycznych równań różniczkowych:

$$
\begin{cases} dB_t &= r(Y_t)B_t dt, \\ dS_t^i &= S_t^i b^i(Y_t)dt + S_t^i \sigma^{i,\cdot}(Y_t)dW_t^1, \quad i = 1, 2, \dots m, \\ dY_t &= g(Y_t)dt + a(Y_t)\big(\rho dW_t^1 + \bar{\rho} dW_t^2\big), \end{cases} \tag{1.3}
$$

gdzie $W = (W^1, W^2)^T$ jest standardowym procesem Wienera względem danej miary probablistycznej P na $(\Omega, \mathcal{F})$, przyjmującym wartości w $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ jest współczynnikiem korelacji ($\bar{\rho} := \sqrt{1 - |\rho|^2}$). Zakładamy, że współczynniki

$$
\begin{gathered} r : \mathbb{R} \to [0, +\infty), \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad , a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ b = (b^1, \dots, b^m)^T, \quad b^i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad i = 1 \dots m, \\ \sigma = (\sigma^{i,j})_{i,j}, \quad \sigma^{i,j} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ i = 1 \dots m, \ j = 1 \dots n \end{gathered}
$$

są funkcjami ciągłymi takimi, że istnieje jednoznaczne silne rozwiązanie układu (1.3). Dodatkowo zakładamy, że macierz $\sigma(y)\sigma^T(y)$ jest ściśle dodatnio określona dla każdego $y \in \mathbb{R}$.

Założenie o niezależności współczynników od czasu jest wyłącznie dla wygody notacji i może zostać w niektórych przypadkach opuszczone. Model (1.3) obejmuje między innymi modele stochastycznej zmienności (dla m=1) oraz modele krótkoterminowej stopy procentowej. Zadaniem procesu Y jest często modelowanie ryzyka niefinansowego np. dla ceny surowców energetycznych istotne znaczenie będzie miała temperatura powietrza.

Oczywiście w wielu praktycznych zagadnieniach w modelu należy uwzględnić więcej niż jeden czynnik. I w wielu przypadkach dowodzone w pracy rezultaty można rozszerzyć do modelu wieloczynnikowego. Problem jednak stwarzają równania cząstkowe, na których oparte są strategie optymalne. Powrócimy do tego zagadnienia w rozdziale drugim.

1.2.2. Ryzyko modelu.

W typowych czysto praktycznych problemach, wiedza na temat modelu (1.3) jest tylko wiedzą statystyczną, bowiem jego parametry są estymowane z danych historycznych. Dlatego podejmując decyzje inwestycyjne należy wziąć również pod uwagę ryzyko związane z niedoszacowaniem modelu. Różne są jednak definicje ryzyka modelu. W niniejszej pracy przyjmiemy, że znana jest przestrzeń zdarzeń elementarnych $(\Omega, \mathcal{F})$, natomiast dana miara probablistyczna P niedokładnie oddaje zachowanie rynku. Wiadomo tylko tyle, że rzeczywiste prawdopodobieństwo należy do pewnego zbioru miar $\mathcal{Q}$. Podążając za pracą Hernándeza i Schieda [**18**] oraz Schieda [**33**] rozważamy następującą rodzinę miar probablistycznych:

$$
\mathcal{Q} := \left\{ Q \sim P \mid \frac{dQ}{dP} = \mathcal{E}\left(\int \eta_{1t} dW_t^1 + \eta_{2t} dW_t^2 \right)_T, \quad (\eta_1, \eta_2) \in \mathcal{M} \right\},
$$

gdzie $\mathcal{E}(\cdot)_t$ oznacza eksponentę Doleans-Dade a $\mathcal{M}$ oznacza zbiór progresywnie mierzalnych procesów $\eta = (\eta_1, \eta_2) = (\eta_1^1, \eta_1^2, \dots, \eta_1^n, \eta_2)$ o wartościach w ustalonym, zwartym i wypukłym zbiorze $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Miarę wyznaczoną przez proces $\eta \in \mathcal{M}$ oznaczana jest jako Q^η. Z kryterium Novikova (twierdzenie 1.1.10) wynika, że rodzina $\mathcal{Q}$ jest dobrze zdefiniowana.

Zgodnie z twierdzeniem Girsanowa (twierdzenie 1.1.8) dynamika procesu S może być zapisana w postaci

$$dS_t^i = S_t^i\big(b^i(Y_t) + \sigma^{i,\cdot}(Y_t)\eta_{1t}\big)dt + S_t^i\sigma^{i,\cdot}(Y_t)dW_t^{1\eta}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

gdzie

$$\begin{cases} W_t^{1j\eta} = W_t^{1j} - \int_0^t \eta_{1s}^j ds, & j = 1, 2, \ldots, n, \\ W_t^{2\eta} = W_t^2 - \int_0^t \eta_{2s} ds \end{cases}$$

jest procesem Wienera względem miary Q^η. Tak sformułowana niedokładność modelu może być zatem postrzegana jako ryzyko związane z niedoszacowaniem współczynnika dryftu b. Pominięcie niedokładności związanej z parametrem zmienności σ można wytłumaczyć tym, że błąd estymacji zmienności jest dużo mnejszy od błędu estymacji dryftu.

Gdy proces η_1 zostanie dobrany tak, że

$$dS_t^i = S_t^i r(Y_t)dt + S_t^i\sigma^{i,\cdot}(Y_t)dW_t^{1\eta}, \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

to powiemy, że Q^η jest *miarą martyngałową*[6]. Miary tego typu są używane do wyceny instrumentów pochodnych (np. opcji).

1.2.3. Strategia inwestycyjna i jej dynamika.

Definicja 1.2.1. $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t\in\mathbb{T}}$ *–progresywnie mierzalny proces* $\bar{\pi} = (\pi^0, \pi) = (\pi^0, \pi^1, \ldots, \pi^m)$ *nazywamy strategią finansową. Wartością portfela (bogactwem inwestora) nazywamy proces*

$$X_t = \pi_t^0 + \pi_t^1 + \ldots + \pi_t^m. \tag{1.4}$$

Proces π^i to wartość kapitału zainwestowanego w instrumenty i-tego typu (π^0 to ilość pieniędzy włożona na konto bankowe / pożyczona z banku). Wśród wszystkich strategii będziemy zainteresowani tylko takimi, które dopuszczają wyłącznie kapitał będący wynikiem działalności inwestycyjnej z poprzednich okresów. Dopuścimy również możliwość konsumowania części kapitału, dołączając do zdefiniowanej już strategii proces progresywnie mierzalny c. Wprowadzimy następującą definicję:

Definicja 1.2.2. *Strategię finansową $(\bar{\pi}, c)$ nazywamy samofinansującą, jeśli wartość portfela spełnia*

$$dX_t = \frac{\pi_t^0}{B_t}dB_t + \frac{\pi_t^1}{S_t^1}dS_t^1 + \ldots + \frac{\pi_t^m}{S_t^m}dS_t^m - c_t dt.$$

Jeśli $(\bar{\pi}, c)$ jest samofinansująca, to zgodnie z rachunkiem macierzowo – wektorowym zapisujemy

$$dX_t = \pi_t^0 r(Y_t)dt + \pi_t b(Y_t)dt + \pi_t\sigma(Y_t)dW_t^1 - c_t dt.$$

[6] Tu martyngałem/lokalnym martyngałem jest proces $\dfrac{S}{B}$

Dodatkowo można wykorzystać równość (1.4) otrzymując następujący problem:

$$
\begin{cases} dX_t = r(Y_t)X_t dt + \pi_t\big(b(Y_t) - \mathbf{1}r(Y_t)\big)dt + \pi_t\sigma(Y_t)dW_t^1 - c_t dt, \\ X_s = x, \end{cases} \tag{1.5}
$$

gdzie $\mathbf{1} := (1, 1, \ldots, 1)^T$. Proces $\pi = (\pi^1, \ldots, \pi^m)$ interpretujemy jako część kapitału zainwestowanego w aktywa obarczone ryzykiem S. Natomiast proces c wyznacza intensywność konsumpcji. x jest kapitałem początkowym inwestora.

Uwaga . *Gdy dany jest proces progresywnie mierzalny* (π, c) *i* X *- jednoznaczne rozwiązanie równania* (1.5) *to startegię samofinansującą* $(\bar{\pi}, c)$ *otrzymujemy wyznaczając* π^0 *z równania*

$$X_t = \pi_t^0 + \pi_t^1 + \ldots + \pi_t^m.$$

Dla większości jednak problemów rozważanych w pracy należy założyć, że dopuszczalne strategie są ściśle dodatnie. W takich sytuacjach wygodnie jest przyjąć, że dynamika portfela dana jest przez równanie liniowe

$$
\begin{cases} dX_t = (r(Y_t)X_t + \pi_t(b(Y_t) - \mathbf{1}r(Y_t))X_t)dt + \pi_t\sigma(Y_t)X_t dW_t^1 - c_t X_t dt, \\ X_s = x. \end{cases} \tag{1.6}
$$

W tym przypadku π będzie interpretowane jako udział w portfelu ryzykownego aktywa S, c natomiast oznacza stopę konsumpcji.

Dodatkowo niech dana będzie ciągła funkcja β. Wprowadzamy zmienną losową $\beta(Y_T)$, którą interpretujemy jako wypłatę dla instrumentu pochodnego opartego o czynnik Y. Inwestor (sprzedawca instrumentu) w swoich decyzjach inwestycyjnych będzie chciał ograniczyć ryzyko niefinansowe związane z tym instrumentem. Tego typu instrumenty stały się popularne między innymi na rynkach surowców energetycznych.

Gdy nie jest uwzględnione ryzyko modelu (tzn. wyjściowa miara probablistyczna jest uznawana za dobry opis zachowania rynku), to według dominującej w literaturze metodologii racjonalny inwestor wybiera optymalne strategie inwestycyjne tak, aby maksymalizować oczekiwaną satysfakcję z przyszłej wartości portfela. Do oceny satysfakcji (stopnia awersji do ryzyka) inwestor wykorzystuje funkcję użyteczności.

Funkcją użyteczności nazywamy funkcję rosnącą, wklęsłą, dwukrotnie różniczkowalną w sposób ciągły. Najczęściej występujące w literaturze funkcje użyteczności to:

- funkcja HARA

$$U(x) = \begin{cases} \frac{x^\gamma}{\gamma}, & \text{gdy } \gamma < 1 \text{ i } \gamma \neq 0, \\ \ln x, & \text{gdy } \gamma = 0; \end{cases}$$

- funkcja CARA

$$U(x) = 1 - \frac{1}{\gamma}e^{-\gamma x}, \qquad \gamma > 0.$$

Dodatkowo w pracy rozważamy również funkcję

$$U(x) = (x - D)^2, \qquad D \in \mathbb{R}.$$

Nie jest to funkcja użyteczności, jednak jej znaczenie praktyczne jest często dużo większe. Zakładamy, że dziedzina funkcji U jest przedziałem otwartym i jest oznaczana symbolem $\mathrm{Dom}(U)$.

Definicja 1.2.3. *Sterowanie (lub strategia inwestycyjna)* $(\pi, c) = \{(\pi_t, c_t), s \leqslant t \leqslant T\}$ *jest dopuszczalne na przedziale* $[s, T]$ *i stanu początkowego* (x, y), $(\pi, c) \in \mathcal{A}_s(x, y)$, *jeśli spełnia następujące warunki:*

(1) (π, c) *jest progresywnie mierzalny względem filtracji* $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t\in[s,T]}$,
(2) (π, c) *przyjmuje wartości w* $K \times I$ *(iloczynie kartezjańskim podzbioru wypukłego* $\mathbb{R}^m$ *oraz przedziału liczbowego* I*)* ,
(3) *istnieje jednoznaczne rozwiązanie równania* (1.6) *(względnie* (1.5)*) takie, że prawie wszystkie trajektorie procesów* c *oraz* $X^{\pi,c}(x, y, s)$ *i zmienna losowa* $\big(X_T^{\pi,c}(x, y, s) - \beta(Y_T(y, s))\big)$ *przyjmują wartości w zbiorze* $\mathrm{Dom}(U)$.

Typowym problemem inwestycyjnym, najczęściej poruszanym zarówno w literaturze, jak i tej pracy, jest przypadek $K \times I = \mathbb{R}^m \times (0, +\infty)$. Oznacza to, że dopuszczamy aby inwestor mógł zajmować dowolną pozycję na rynku, w szczególności aby mógł stosować krótką sprzedaż.

1.2.4. Portfel optymalny i strategie minimaksowe.

Inwestor nie uwzględniający ryzyka modelu, znając ustaloną i daną dokładnie miarę Q, pragnie osiągnąć największy możliwy stopień zadowolenia z konsumpcji c oraz końcowego kapitału $(X_T^{\pi,c} - \beta(Y_T))$. $T > 0$ oznacza horyzont inwestycyjny. Ściślej ujmując inwestor dąży do tego aby

$$\text{maksymalizować} \quad J^{\pi,c,Q}(x, y, t) \qquad \text{ze względu na} \quad (\pi, c) \in \mathcal{A}_t(x, y),$$

gdzie

$$J^{\pi,c,Q}(x, y, t) := \mathbb{E}_{x,y,t}^{Q}\left(\int_t^T U\big(c_s X_s^{\pi,c}\big)ds + U\big(X_T^{\pi,c} - \beta(Y_T)\big)\right). \tag{1.7}$$

Zagadnienie przedstawione powyżej nazywane będzie w dalszej części pracy *problemem klasycznym.* Ponieważ istnieje niepewność związana z zaproponowanym modelem, to optymalne strategie inwestycyjne powinny uwzględniać, oprócz ryzyka rynkowego, także ryzyko modelu. W związku z tym optymalnymi nazwiemy te strategie, które spełniają kryterium najgorszego możliwego scenariusza. Bardziej precyzyjnie, zakładamy, że celem inwestora jest

$$\text{maksymalizacja} \quad \inf_{Q\in\mathcal{Q}} J^{\pi,c,Q}(x, y, t) \qquad \text{ze względu na} \quad (\pi, c) \in \mathcal{A}_t(x, y).$$

Problem zostanie w pracy potraktowany jako gra stochastyczna o sumie zero pomiędzy rynkiem i inwestorem. Celem będzie odnalezienie takiego punktu siodłowego $((\pi^*, c^*), Q^*) \in \mathcal{A}_t(x, y) \times \mathcal{Q}$, dla którego

$$J^{\pi,c,Q^*}(x, y, t) \leqslant J^{\pi^*,c^*,Q^*}(x, y, t) \leqslant J^{\pi^*,c^*,Q}(x, y, t).$$

W kolejnych rozdziałach pokażemy jak wykorzystać teorię równań różniczkowych cząstkowych do rozwiązania wybranych ważnych problemów inwestycyjnch. Równania, które zostaną wykorzystane noszą nazwę równań Hamiltona-Jacobiego-Bellmana-Isaaca lub (Bellmana-Isaaca) i są analogonami równań Hamiltona-Jacobiego-Bellmana występującymi w teorii sterowania stochastycznego. Zastosowanie tej teorii pozwoli na odnalezienie punktu siodłowego w postaci Markowa. Oznacza to, że punkt siodłowy zostanie wyznaczony przez trójkę funkcji borelowsko mierzalnych $\big((\pi^*(x,y,t), c^*(x,y,t)), \eta^*(x,y,t)\big)$. Wtedy, dla ustalonego punktu startowego (x,y,s), optymalną strategię inwestycyjną ze zbioru $\mathcal{A}_s(x,y)$ otrzymujemy ze wzorów:

$$\pi_t^* = \pi^*(X_t^{\pi^*,c^*}, Y_t, t), \qquad c_t^* = c^*(X_t^{\pi^*,c^*}, Y_t, t), \tag{1.8}$$

gdzie para procesów $\{(X_t^{\pi^*,c^*}, Y_t) \mid s \leq t \leq T\}$ jest rozwiązaniem problemu

$$\begin{cases} dX_t = r(Y_t)X_t dt + \pi^*(X_t, Y_t, t)\big(b(Y_t) - \mathbf{1}r(Y_t)\big)X_t dt \\ \qquad + \pi^*(X_t, Y_t, t,)X_t\sigma(Y_t)dW_t^1 - c^*(X_t, Y_t, t)X_t dt, \\ dY_t = g(Y_t)dt + a(Y_t)\big(\rho dW_t^1 + \bar{\rho} dW_t^2\big), \\ X_s = x, \quad Y_s = y. \end{cases} \tag{1.9}$$

Natomiast miara Q^* dana jest przez

$$\frac{dQ^*}{dP} = \mathcal{E}\left(\int_s \eta_1^*(X_t^{\pi^*,c^*}, Y_t, t)dW_t^1 + \eta_2^*(X_t^{\pi^*,c^*}, Y_t, t)dW_t^2\right)_T.$$

Jeśli dla każdego punktu startowego (x,y,t) istnieje jednoznaczne rozwiązanie problemu (1.9) i strategia (π, c) dana przez (1.8) jest dopuszczalna, to trójkę borelowsko mierzalnych funkcji $\big((\pi^*(x,y,t), c^*(x,y,t)), \eta^*(x,y,t)\big)$ przyjmujących wartości w $K \times I \times \Gamma$ nazwiemy *dopuszczalnym sterowaniem Markowa*. Funkcja (1.7) została zdefiniowana ogólnie tak, aby obejmowała jak najwięcej problemów inwestycyjnych. Nie należy jednak spodziewać się, że dla wybranej funkcji użyteczności rozwiązania wszystkich problemów, obejmujących zarówno proces konsumpcji oraz instrument pochodny, będzie można odnaleźć. W kolejnych rozdziałach zajmujemy się tylko takimi zagadnieniami, które takie rozwiązania posiadają.

1.3. Równania Hamiltona Jacobiego Bellmana Isaaca i twierdzenia weryfikacyjne

Tutaj zostaną przedstawione najbardziej ogólne rezultaty dotyczące związku postawionego problemu inwestycyjnego z odpowiednim równaniem HJBI i częściowe rozwiązanie postawionego problemu.

1.3.1. Twierdzenie weryfikacyjne.

Przez $\mathcal{L}$ oznaczamy operator

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\pi,c,\eta}V(x,y,t) = {} & V_t + \frac{1}{2}a^2(y)V_{yy} + \frac{1}{2}(\pi\ \sigma(y)\sigma^T(y)\pi^T)x^2V_{xx} \\ & + a(y)\pi\sigma(y)\rho^T xV_{xy} + a(y)(\rho\eta_1 + \bar{\rho}\eta_2)V_y \\ & + g(y)V_y + \pi(b(y) - \mathbf{1}r(y) + \sigma(y)\eta_1)xV_x + r(y)xV_x - cxV_x. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Uwaga 1.3.1. *Operator* (1.10) *jest ściśle związany z dynamiką portfela* (1.6)*(po zastosowaniu transformacji Girsanowa 1.1.8 z miarą Q^η). Jeżeli problem wymaga wykorzystania dynamiki* (1.5) *(tzn. dopuszczamy aby wartość portfela przyjmowała wartość 0), to w definicji operatora należy zamienić wyrażenie $x\pi$ na π.*

Związek pomiędzy grami różniczkowymi a równaniami Isaaca wypowiemy tradycyjnie w postaci twierdzenia weryfikacyjnego. Jest to przeformułowany i mocniejszy rezultat od tego pochodzącego z pracy Matarmwura i Øksendal [**22**].

Twierdzenie 1.3.2. *Niech U będzie funkcją przyjmującą wartości nieujemne. Niech będzie dana nieujemna funkcja $V \in C^{2,2,1}\big(\mathrm{Dom}(U)\times\mathbb{R}\times[0,T)\big)\cap C\big(\mathrm{Dom}(U)\times\mathbb{R}\times[0,T]\big)$ i dopuszczalne sterowania Markowa $\big((\pi^*(x,y,t),c^*(x,y,t)),\eta^*(x,y,t)\big)$ takie, że*

$$\mathcal{L}^{\pi^*(x,y,t),c^*(x,y,t),\eta}V(x,y,t)+U(c^*(x,y,t)x)\geqslant 0, \tag{1.11}$$

$$\mathcal{L}^{\pi,c,\eta^*(x,y,t)}V(x,y,t)+U(cx)\leqslant 0, \tag{1.12}$$

$$\mathcal{L}^{\pi^*(x,y,t),c^*(x,y,t),\eta^*(x,y,t)}V(x,y,t)+U(c^*(x,y,t)x)=0, \tag{1.13}$$

$$V(x,y,T)=U\big(x-\beta(y)\big) \tag{1.14}$$

dla wszystkich $\eta\in\Gamma$, $(\pi,c)\in K\times I$, $(x,y,t)\in\mathrm{Dom}(U)\times\mathbb{R}\times[0,T)$. Ponadto

$$\mathbb{E}^Q_{x,y,t}\left(\sup_{t\le s\le T}|V(X_s^{\pi^*,c^*},Y_s,s)|\right)<\infty \tag{1.15}$$

dla każdego $(x,y,t)\in\mathbb{R}^2\times[0,T]$, $Q\in\mathcal{Q}$.

Wtedy

$$J^{\pi,c,Q^*}(x,y,t)\leqslant V(x,y,t)\leqslant J^{\pi^*,c^*,Q}(x,y,t)$$

dla $(\pi,c)\in\mathcal{A}_t(x,y)$, $Q\in\mathcal{Q}$ i

$$V(x,y,t)=J^{\pi^*,c^*,Q^*}(x,y,t).$$

Dowód. Ustalmy $(x,y,t)\in\mathrm{Dom}(U)\times\mathbb{R}\times[0,T)$. Wybierzmy dowolne $\eta\in\mathcal{M}$ i rozważmy układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} dX_t = r(Y_t)X_tdt+\pi^*(X_t,Y_t,t)\big(b(Y_t)-\mathbf{1}r(Y_t)\big)X_tdt\\ \qquad\quad +\pi^*(X_t,Y_t,t,)X_t\sigma(Y_t)dW_t^1-c^*(X_t,Y_t,t)X_tdt,\\ dY_t=g(Y_t)dt+a(Y_t)\big(\rho dW_t^1+\bar\rho dW_t^2\big).\end{cases} \tag{1.16}$$

Zapiszmy Q^η-dynamikę układu (1.16). Stosując transformację Girsanowa (twierdzenie 1.1.8) mamy

$$\begin{cases} dX_t = r(Y_t)X_tdt+\pi_t^*\big(b(Y_t)-\mathbf{1}r(Y_t)+\sigma(Y_t)\eta_{1t}\big)X_tdt\\ \qquad\quad +\pi_t^*\sigma(Y_t)X_tdW_t^{1\eta}-c_t^*X_tdt,\\ dY_t=\big(g(Y_t)+a(Y_t)(\rho\eta_{1t}+\bar\rho\eta_{2t})\big)dt+a(Y_t)\big(\rho dW_t^{1\eta}+\bar\rho dW_t^{2\eta}\big),\end{cases} \tag{1.17}$$

gdzie $\pi_t^*=\pi^*(X_t,Y_t,t)$, $c_t^*=c^*(X_t,Y_t,t)$ i $(W_t^{1\eta},\ W_t^{2\eta})^T$ jest Q^η - procesem Wienera danym przez

$$\begin{cases} dW_t^{1j\eta}=dW_t^{1j}-\eta_{1t}^jdt, \qquad j=1,2,\dots,n,\\ dW_t^{2\eta}=dW_t^2-\eta_{2t}dt.\end{cases}$$

Jeśli zastosujemy wzór Itô do układu (1.17) i funkcji V, to otrzymamy[7]

$$\mathbb{E}^{Q^\eta}_{x,y,t}(V(X_{(T-\varepsilon)\wedge T^\varepsilon_n}, Y_{(T-\varepsilon)\wedge T^\varepsilon_n}, (T-\varepsilon)\wedge T^\varepsilon_n)) = V(x,y,t)$$
$$+\,\mathbb{E}^{Q^\eta}_{x,y,t}\int_t^{(T-\varepsilon)\wedge T^\varepsilon_n} \mathcal{L}^{\pi^*_s,\eta_s}V(X_s,Y_s,s)ds + \mathbb{E}^{Q^\eta}_{x,y,t}\int_t^{(T-\varepsilon)\wedge T^\varepsilon_n} M^\varepsilon_s dW^\eta_s,$$

gdzie $(T^\varepsilon_n, n=1,2,\ldots)$, $(T^\varepsilon_n \to +\infty)$ jest lokalizującym ciągiem momentów stopu [8] takim, że

$$\mathbb{E}^{Q^\eta}_{x,y,t}\int_t^{(T-\varepsilon)\wedge T^\varepsilon_n} M^\varepsilon_s dW^\eta_s = 0.$$

Wykorzystując (1.11) mamy

$$\mathbb{E}^{Q^\eta}_{x,y,t}(V(X_{(T-\varepsilon)\wedge T^\varepsilon_n}, Y_{(T-\varepsilon)\wedge T^\varepsilon_n}, (T-\varepsilon)\wedge T^\varepsilon_n)) \geqslant V(x,y,t) - \mathbb{E}^{Q^\eta}_{x,y,t}\int_t^{(T-\varepsilon)\wedge T^\varepsilon_n} U(c^*_t X_t)dt.$$

Ponieważ zachodzi (1.15), możemy zastosować twierdzenie o zbieżnościach zmajoryzowanych. Przechodząc do granicy $(n\to+\infty)$, $(\varepsilon\to 0)$ i korzystając z (1.14) otrzymujemy

$$V(x,y,t) \leqslant J^{\pi^*,c^*,Q}(x,y,t).$$

Jeśli zastąpimy η przez η^* i użyjemy (1.13), to

$$V(x,y,t) = J^{\pi^*,Q^*}(x,y,t).$$

Następnie wybieramy dowolne $(\pi,c)\in\mathcal{A}_t(x,y)$ i stosujemy wzór Itô do układu

$$\begin{cases} dX_t = r(Y_t)X_tdt + \pi_t(b(Y_t) - \mathbf{1}r(Y_t) + \sigma(Y_t)\eta^*_{1t})X_tdt + \pi_t\sigma(Y_t)X_tdW^{1\eta^*}_t - c_tX_tdt, \\ dY_t = (g(Y_t) + a(Y_t)(\rho\eta^*_{1t} + \eta^*_{2t}\bar\rho))dt + a(Y_t)(\rho dW^{1\eta^*}_t + \bar\rho dW^{2\eta^*}_t). \end{cases}$$

Powtarzając metodę zaprezentowaną powyżej i używając (1.12) dostajemy

$$\mathbb{E}^{Q^\eta}_{x,y,t}(V(X_{(T-\varepsilon)\wedge T^\varepsilon_n}, Y_{(T-\varepsilon)\wedge T^\varepsilon_n}, (T-\varepsilon)\wedge T^\varepsilon_n) \leqslant V(x,y,t) - \mathbb{E}^{Q^\eta}_{x,y,t}\int_t^{(T-\varepsilon)\wedge T^\varepsilon_n} U(c^*_t X_t)dt.$$

Korzystając z lematu Fatou mamy

$$V(x,y,t) \geqslant J^{\pi,c,Q^*}(x,y,t).$$

□

Uwaga 1.3.3. *Zamiast zakładać, że funkcja użyteczności U i funkcja V są nieujemne można założyć alternatywnie, że warunek* (1.15) *przujmuje postać:*

$$\mathbb{E}^{Q}_{x,y,t}\left(\sup_{t\le s\le T}|V(X^{\pi,c}_s, Y_s, s)|\right) < \infty,$$
$$\mathbb{E}^{Q}_{x,y,t}\left(\int_t^T |U(c_k X^{\pi,c}_s)|dk\right) < \infty$$

[7] Ponieważ funkcja V nie jest różniczkowalna na całym $\mathrm{Dom}(U)\times\mathbb{R}\times[0,T]$, to wzór Itô stosowany jest na $\mathrm{Dom}(U)\times\mathbb{R}\times[0,T-\varepsilon]$

[8] Należy zapoznać się z uwagą 1.1.9

dla wszystkich $(x,y,t) \in \mathrm{Dom}(U) \times \mathbb{R} \times [0,T]$, $(\pi, c) \in \mathcal{A}_t(x,y)$, $Q \in \mathcal{Q}$. *Założona nieujemność* U *oraz* V *niezbędna była tylko do skorzystania z lematu Fatou. Z wprowadzonych tu założeń skorzystamy między innymi dla funkcji* $U(x) = \ln x$ *i* $U(x) = -e^{-\gamma x}$.

Uwaga 1.3.4. *Zbiór dopuszczalnych strategii* $\mathcal{A}_s(x,y)$ *w twierdzeniu weryfikacyjnym można zastąpić dowolnym jego podzbiorem.*

Uwaga . *Należy zwrócić uwagę, że* (1.11)-(1.14) *zachodzą jeżeli spełnione są następujące dwa równania Hamiltona-Jacobiego-Bellmana-Isaaca:*

$$\max_{\pi \in K} \max_{c \in I} \min_{\eta \in \Gamma} (\mathcal{L}^{\pi,\eta} V(x,y,t) + U(cx)) = 0, \tag{1.18}$$

$$\min_{\eta \in \Gamma} \max_{\pi \in K} \max_{c \in I} (\mathcal{L}^{\pi,\eta} V(x,y,t) + U(cx)) = 0, \tag{1.19}$$

$$V(x,y,T) = U(x - \beta(y)).$$

1.3.2. Twierdzenie o minimaksie.

W typowych problemach inwestycyjnych (np. gdy $K = \mathbb{R}^m$) analizę problemu wygodnie jest zacząć od zbadania równania (1.19) i wskazania jego rozwiązania. Aby wykazać, że jest to również rozwiązanie równania (1.18) potrzebne są rezultaty będące jednocześnie wersją twierdzenia o minimaksie. Będziemy mogli powoływać sie na klasyczne twierdzenie udowodnione przez Fana [**7**].

Twierdzenie 1.3.5 (Fan [**7**]). *Niech* X *będzie zwartą przestrzenią Hausdorffa,* Y *natomiast dowolnym zbiorem (niekoniecznie wyposażonym w topologię). Niech* f *będzie funkcją o wartościach rzeczywistych określoną na* $X \times Y$. *Jeśli* f *jest wypukła na* X *oraz wklęsła na* Y *to*

$$\min_{\eta \in X} \sup_{\pi \in Y} f(\pi, \eta) = \sup_{\pi \in Y} \min_{\eta \in X} f(\pi, \eta).$$

Dowód powyższego rezultatu korzysta z klasycznego twierdzenia wywodzącego się od von Neumanna. W przypadku gdy ($K = \mathbb{R}^m$) możliwe jest przeprowadzenie dowodu niezależnego. Pokazuje to poniższe stwierdzenie.

Stwierdzenie 1.3.6. *Jeżeli* A *jest macierzą symetryczną i ściśle dodatnio określoną,* $b, \bar{b}, c \in \mathbb{R}^n$, $a < 0$, $\bar{c} \in \mathbb{R}$, *to*

$$\begin{aligned} \min_{\eta \in \Gamma} \max_{\pi \in \mathbb{R}^>} (a\pi A \pi^T + \pi(b\eta_1 + \bar{b}) + c\eta_1 + \bar{c}\eta_2) &= \max_{\pi \in \mathbb{R}^m} \min_{\eta \in \Gamma} (a\pi A \pi^T + \pi(b\eta_1 + \bar{b}) + c\eta_2) \\ &= (a\pi^* A \pi^{*T} + \pi^*(b\eta_1 + \bar{b}) + c\eta_1 + \bar{c}\eta_2), \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \eta^* \in \arg \min_{(\eta_1,\eta_2) \in \Gamma} & \Bigg(a \left(\frac{-b\eta_1 - \bar{b}}{2a} \right)^T A^{-1} \left(\frac{-b\eta_1 - \bar{b}}{2a} \right) \\ & + \left(\frac{-b\eta_1 - \bar{b}}{2a} \right)^T A^{-1} \left(b\eta_1 + \bar{b} \right) + c\eta_1 + \bar{c}\eta_2 \Bigg), \\ \pi^{*T} &= A^{-1} \frac{-b\eta_1^* - \bar{b}}{2a}. \end{aligned}$$

Dowód. Zawsze zachodzi nierówność

$$\max_{\pi\in\mathbb{R}^m}\min_{\eta\in\Gamma}(a\pi A\pi^T+\pi(b\eta_1+\bar{b})+c\eta_1+\bar{c}\eta_2)\le\min_{\eta\in\Gamma}\max_{\pi\in\mathbb{R}^m}(a\pi A\pi^T+\pi(b\eta_1+\bar{b})+c\eta_1+\bar{c}\eta_2).$$

Wystarczy zatem wykazać, że

$$\min_{\eta\in\Gamma}(a\pi^* A\pi^{*T}+\pi^*(b\eta_1+\bar{b})+c\eta_1+\bar{c}\eta_2)=\min_{\eta\in\Gamma}\max_{\pi\in\mathbb{R}^m}(a\pi^2+\pi(b\eta_1+\bar{b})+c\eta_1+\bar{c}\eta_2).$$

Czyli

$$\min_{\eta\in\Gamma}\left(a\left(\frac{-b\eta_1^*-\bar{b}}{2a}\right)^T A^{-1}\left(\frac{-b\eta_1^*-\bar{b}}{2a}\right)+\left(\frac{-b\eta_1^*-\bar{b}}{2a}\right)^T A^{-1}\left(b\eta_1+\bar{b}\right)+c\eta_1+\bar{c}\eta_2\right)$$
$$=\min_{\eta\in\Gamma}\left(a\left(\frac{(-b\eta_1-\bar{b})}{2a}\right)^T A^{-1}\left(\frac{(-b\eta_1-\bar{b})}{2a}\right)+\left(\frac{(-b\eta_1-\bar{b})}{2a}\right)A^{-1}\left(b\eta_1+\bar{b}\right)+c\eta_1+\bar{c}\eta_2\right).$$

Załóżmy, że $\bar{c}\neq 0$ i drugie minimum osiągnięte jest na paraboloidzie

$$a\left(\frac{(-b\eta_1-\bar{b})}{2a}\right)A^{-1}\left(\frac{(-b\eta_1-\bar{b})}{2a}\right)+\left(\frac{(-b\eta_1-\bar{b})}{2a}\right)^T A^{-1}\left(b\eta_1+\bar{b}\right)+c\eta_1+\bar{c}\eta_2=C^*.$$

Wtedy hiperpłaszczyzna o równaniu

$$a\left(\frac{-b\eta_1^*-\bar{b}}{2a}\right)^T A^{-1}\left(\frac{-b\eta_1^*-\bar{b}}{2a}\right)+\left(\frac{-b\eta_1^*-\bar{b}}{2a}\right)^T A^{-1}\left(b\eta_1+\bar{b}\right)+c\eta_1+\bar{c}\eta_2=C^*$$

jest do niej styczna w punkcie $\eta^*=(\eta_1^*,\eta_2^*)$. Z wypukłości Γ wynika że oba minima muszą być równe. Natomiast jeśli $\bar{c}=0$ to zagadnienie sprowadza się do analogicznych rozważań dotyczących elipsoidy. □

1.3.3. Wyznaczanie optymalnej strategii dla $K=\mathbb{R}^m$.

Gdy zachodzi twierdzenie o minimaksie oraz $V_{xx}<0$, $V_x>0$, to punkt siodłowy standardowo wyznacza się znajdując takie $\eta^*(x,y,t)\in\Gamma$, że

$$\min_{\eta\in\Gamma}\max_{\pi\in\mathbb{R}}\max_{c\in I}\mathcal{L}^{\pi,c,\eta}V(x,y,t)=\max_{\pi\in\mathbb{R}}\max_{c\in I}\mathcal{L}^{\pi,c,\eta^*(x,y,t)}V(x,y,t)$$

oraz $\big(\pi^*(x,y,t),c^*(x,y,t)\big)$ takich, że

$$\max_{\pi\in\mathbb{R}}\max_{c\in I}\min_{\eta\in\Gamma}\mathcal{L}^{\pi,c,\eta}V(x,y,t)=\min_{\eta\in\Gamma}\mathcal{L}^{\pi^*(x,y,t),c^*(x,y,t),\eta}V(x,y,t).$$

Ponieważ $\mathcal{L}^{\pi,c,\eta}$ zależy od π kwadratowo, to dla $\eta^*(x,y,t)$ istnieje dokładnie jedno $\big(\pi^*(x,y,t),c^*(x,y,t)\big)$, dla którego

$$\max_{\pi\in\mathbb{R}}\max_{c\in I}\mathcal{L}^{\pi,c,\eta^*(x,y,t)}V(x,y,t)=\mathcal{L}^{\pi^*(x,y,t),c^*(x,y,t),\eta^*(x,y,t)}V(x,y,t).$$

Wobec tego wystarczy jeśli znajdziemy rozwiązanie równania

$$\min_{\eta\in\Gamma}\max_{\pi\in\mathbb{R}^m}\max_{c\in I}(\mathcal{L}^{\pi,c,\eta}V(x,y,t)+U(cx))=0,$$

czyli

$$
\begin{aligned}
(1.20)\qquad & V_t + \frac{1}{2}a^2(y)V_{yy} + \min_{(\eta_1,\eta_2)\in\Gamma}\max_{\pi\in\mathbb{R}^m}\bigg(\frac{1}{2}\pi\sigma(y)\sigma^T(y)\pi^T x^2 V_{xx} + a(y)\pi\sigma(y)\rho^T x V_{xy} \\
& + \pi\big(b(y) - \mathbf{1}r(y) + \sigma\eta_1\big)xV_x + a(y)\big(\rho\eta_1 + \bar{\rho}\eta_2\big)V_y\bigg) \\
& + r(y)xV_x + g(y)V_y + \max_{c\in I}\big(-cxV_x + U(cx)\big) = 0.
\end{aligned}
$$

W celu zaprezentowania kluczowych obliczeń założymy, że równanie (1.20) posiada rozwiązanie takie, że $V_{xx} < 0$. Jeśli tak, to wewnętrzne maksimum względem π w (1.20) jest dobrze określone i osiągnięte dla

(1.21)

$$
\pi^{*T}(x,y,t,\eta) = \big(\sigma(y)\sigma^T(y)\big)^{-1}\bigg(-a(y)\sigma(y)\rho^T\frac{V_{xy}}{xV_{xx}} - \big(b(y) - \mathbf{1}r(y) + \sigma(y)\eta_1\big)\frac{V_x}{xV_{xx}}\bigg).
$$

Wstawiając do (1.20) otrzymujemy równanie

$$
\begin{aligned}
(1.22)\qquad & V_t + \frac{1}{2}a^2(y)V_{yy} + \min_{\eta\in\Gamma}\bigg(a(y)\rho\eta_1 V_y + a(y)\bar{\rho}\eta_2 V_y \\
& - \frac{1}{2}\frac{1}{V_{xx}}\big[a(y)\sigma(y)\rho^T V_{xy} + \big(b(y) - \mathbf{1}r(y) + \sigma(y)\eta_1\big)V_x\big]^T\big[\sigma(y)\sigma^T(y)\big]^{-1}\times \\
& \times\big[a(y)\sigma(y)\rho^T V_{xy} + \big(b(y) - \mathbf{1}r(y) + \sigma(y)\eta_1\big)V_x\big]\bigg) \\
& + g(y)V_y + r(y)xV_x + \max_{c\in I}\big(-cxV_x + U(cx)\big) = 0,
\end{aligned}
$$

z warunkiem końcowym

$$
V(x,y,T) = U\big(x - \beta(y)\big).
$$

Uwaga 1.3.7. *Na szczególną uwagę zasługuje przypadek, gdy σ jest kwadratową macierzą odwracalną. Wtedy równanie (1.22) można zredukować do postaci:*

$$
\begin{aligned}
& V_t + \frac{1}{2}a^2(y)V_{yy} - \frac{1}{2}a^2(y)|\rho|^2\frac{V_{xy}^2}{V_{xx}} + \min_{\eta\in\Gamma}\bigg(a(y)\rho\eta_1 V_y + a(y)\bar{\rho}\eta_2 V_y \\
& - a(y)\rho\big(\lambda(y) + \eta_1\big)\frac{V_{xy}V_x}{V_{xx}} - \frac{1}{2}\big(\lambda(y) + \eta_1\big)^T\big(\lambda(y) + \eta_1\big)\frac{V_x^2}{V_{xx}}\bigg) + g(y)V_y + r(y)xV_x \\
& + \max_{c\in I}\big(-cxV_x + U(cx)\big) = 0,
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
\lambda(y) := \big((\sigma(y))^T\big)^{-1}\big(b(y) - \mathbf{1}r(y)\big)
$$

oznacza rynkową cenę za ryzyko. Ponadto

$$
\pi^{*T}(x,y,t,\eta) = \big((\sigma(y))^T\big)^{-1}\bigg(-a(y)\rho^T\frac{V_{xy}}{xV_{xx}} - (\lambda(y) + \eta_1)\frac{V_x}{xV_{xx}}\bigg).
$$

I na ten też przypadek będzie położony akcent w kolejnych rozdziałach.

Wyniki rezultatów z tego rozdziału podsumujemy w wygodnym do zastosowania stwierdzeniu.

Stwierdzenie 1.3.8. *Niech spełnione będą jednocześnie warunki* **A1**,**A2**,**A3** *lub* **A1**,**A2**,**A3'**, *gdzie:*

A1) *Istnieje nieujemne rozwiązanie klasyczne równania*

$$\min_{\eta\in\Gamma}\max_{\pi\in\mathbb{R}^m}\mathcal{L}^{\pi,\eta}V(x,y,t)+\max_{c\in I}\big(U(cx)-cxV_x\big)=0$$

takie, że $V_{xx}<0$ *oraz* $V_x>0$.

A2) *Sterowanie Markowa* $(\pi^*(x,y,t),c^*(x,y,t))$ *dane przez:*

$$\pi^{*T}(x,y,t)=\big(\sigma(y)\sigma^T(y)\big)^{-1}\bigg(-a(y)\sigma(y)\rho^T\frac{V_{xy}}{xV_{xx}}-\big(b(y)-\mathbf{1}r(y)+\sigma(y)\eta_1^*(y,t)\big)\frac{V_x}{xV_{xx}}\bigg),$$

$$c^*(x,y,t)=\frac{1}{x}(U')^{-1}\big(xV_x\big)$$

jest strategią dopuszczalną, gdzie $\eta^*(y,t)$ *jest borelowsko mierzalną funkcją realizującą maksimum w równaniu* (1.22).

A3) *Dla dowolnego* $Q\in\mathcal{Q}$

$$\mathbb{E}^Q_{x,y,t}\bigg(\sup_{t\le s\le T}|V(X_s^{\pi^*,c^*},Y_s,s)|\bigg)<\infty.$$

A3') *Dla dowolnego* $Q\in\mathcal{Q}$, $\pi\in\mathcal{A}_t(x,y)$

$$\mathbb{E}^Q_{x,y,t}\bigg(\sup_{t\le s\le T}|V(X_s^{\pi,c},Y_s,s)|\bigg)<\infty,$$

$$\mathbb{E}^Q_{x,y,t}\bigg(\int_t^T|U(c_kX_s^{\pi,c})|dk\bigg)<\infty.$$

Wtedy

$$J^{\pi,c,Q^*}(x,y,t)\leqslant V(x,y,t)\leqslant J^{\pi^*,c^*,Q}(x,y,t)$$

dla wszystkich $\pi\in\mathcal{A}_t$, $Q\in\mathcal{Q}$, *oraz*

$$V(x,y,t)=J^{\pi^*,c^*,Q^*}(x,y,t).$$

Niestety już pierwszy warunek **A1** jest trudny do sprawdzenia. W następnych rozdziałach wykażemy, że jest on spełniony dla typowych wykorzystywanych w praktyce funkcji użyteczności. Istnieje jednak rezultat, który nie wymaga szczególnych założeń dotyczących postaci użyteczności. Rozważymy problem nie uwzględniający procesu konsumpcji c. W takim przypadku równanie Isaaca (1.22) przybiera postać

$$\begin{aligned}
&V_t+\frac{1}{2}a^2(y)V_{yy}+\min_{\eta\in\Gamma}\bigg(a(y)\rho\eta_1V_y+a(y)\bar{\rho}\eta_2V_y\\
&-\frac{1}{2}\frac{1}{V_{xx}}\big[a(y)\sigma(y)\rho^TV_{xy}+\big(b(y)-\mathbf{1}r(y)+\sigma(y)\eta_1\big)V_x\big]^T\big[\sigma(y)\sigma^T(y)\big]^{-1}\times\\
&\qquad\times\big[a(y)\sigma(y)\rho^TV_{xy}+\big(b(y)-\mathbf{1}r(y)+\sigma(y)\eta_1\big)V_x\big]\bigg)\\
&+g(y)V_y+r(y)xV_x=0.
\end{aligned}\tag{1.23}$$

Twierdzenie 1.3.9. *Niech U będzie funkcją przyjmującą wartości nieujemne. Jeżeli funkcja r jest stała, $(-b(y)+\mathbf{1}r)$ przyjmuje wartości w zbiorze $\sigma(y)\,\mathrm{Pr}_1\,\Gamma$ (rzut zbioru Γ na n pierwszych współrzędnych przekształcony za pomocą macierzy σ), to istnieje rozwiązanie równania* (1.23) *postaci $V(x,y,t) = U(xf(t))$. Ponadto para sterowań Markowa (π^*, η^*) takich, że*

$$\pi^*(x,y,t) = 0, \qquad \sigma(y)\eta_1^*(y,t) = -b(y) + \mathbf{1}r$$

jest punktem siodłowym.

Dowód. $V(x,y,t) = U(xf(t))$ jest rozwiazaniem równania (1.23) wtedy i tylko wtedy gdy spełnione jest równanie

$$\begin{aligned} xf'(t)U'(xf(t)) + \min_{\eta\in\Gamma}\Bigg(-\frac{U'(xf(t)))^2}{2U''(xf(t))}\big(b(y) - \mathbf{1}r + \sigma(y)\eta_1\big)^T \big(\sigma(y)\sigma^T(y)\big)^{-1} \times \\ \times \big(b(y) - \mathbf{1}r + \sigma(y)\eta_1\big)\Bigg) \\ + rf(t)xU'(xf(t)) = 0. \end{aligned}$$

Ponieważ $\big(-b(y) + \mathbf{1}r\big)$ przyjmuje wartości w zbiorze $\sigma(y)\,\mathrm{Pr}_1\,\Gamma$, to funkcja

$$f(t) = e^{r(T-t)}$$

jest rozwiązaniem powyższego równania i spełnione są wszystkie trzy warunki **A1**, **A2**, **A3** w stwierdzeniu 1.3.8. □

Uwaga . *Jeżeli $\sigma(y)\eta_1^*(y) = -b(y) + \mathbf{1}r$, to Q^* jest miarą martyngałową. Jest to niejako potwierdzenie, że miara martyngałowa może być użyteczna przy wycenie instrumentów finansowych. Fakt ten został po raz pierwszy wykazany w pracy Øksendal i Sulem* [**27**]. *Praca dotyczy modelu opartego o proces Wienera i miarę losową Poissona lecz bez uwzględnienia dodatkowego czynnika Y i gdy $\Gamma = \mathbb{R}^n$. W naszym przypadku, gdy Γ jest zwarty i $\big(-b(y)+\mathbf{1}r\big)$ może przyjmować wartości poza Γ, to Q^* nie musi być miarą martyngałową.*

Rezultat ten posiada ciekawą interpretację ekonomiczną. Jeżeli informacje zebrane przez inwestora wskazują na to, że jednym z możliwych modeli jest taki, którego dryft jest równy stopie procentowej, to stosując kryterium najgorszego możliwego scenariusza należy całość posiadanego kapitału zainwestować w instrument bez ryzyka B.

ROZDZIAŁ 2

Punkt siodłowy dla użyteczności typu HARA

Pierwszą funkcją użyteczności, dla której wykażemy istnienie rozwiazań problemów inwestycyjnych jest funkcja użyteczności typu HARA, czyli

$$U(x) = \begin{cases} \frac{x^\gamma}{\gamma}, & \text{gdy } \gamma < 1 \text{ i } \gamma \neq 0, \\ \ln x, & \text{gdy } \gamma = 0. \end{cases}$$

Uwaga . *Dla uproszczenia notacji, aż do końca niniejszej rozprawy funkcje b oraz σ traktujemy jako skalary. Uzyskane rezultaty będą przenosiły się w naturalny sposób na przypadek, gdy σ jest macierzą kwadratową, odwracalną (uwaga 1.3.7).*

Głównym rezultatem prezentowanym w tym rozdziale jest twierdzenie 2.1.2. Jest to ogólny i wzmocniony rezultat, który obejmuje twierdzenia udowodnione w pracach Hernandeza i Schieda [**18**] oraz Schieda [**33**]. Dowody prowadzone są jednak w sposób odmienny. Cytowane prace korzystają z metod analizy wypukłej zamieniając problem wyjściowy na problem dualny (za pomocą transformacji Fenchela-Legendre'a) i dopiero wtedy stosują teorię stochastycznego sterowania. Oprócz tego podawane jest rozwiązanie dla logarytmu, które pojawiło się już jednak w pracy Hernandeza i Schieda [**31**]. Wśród zagadnień tu prezentowanych należy dodatkowo wyróżnić problem inwestora z ograniczeniami portfelowymi.

2.1. Rozwiązanie dla $\gamma \neq 0$

Zakładamy, że $K \times I = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ (tzn. inwestor może zajmować dowolną pozycję na rynku). Dla $\gamma \neq 0$ poszukujemy punktu siodłowego dla

$$J^{\pi,c,Q}(x,y,t) = \mathbb{E}^Q_{x,y,t}\biggl(\int_t^T \frac{1}{\gamma}\bigl(c_s X_s^{\pi,c}\bigr)^\gamma ds + \frac{1}{\gamma}\bigl(X_T^{\pi,c}\bigr)^\gamma\biggr).$$

Przyjmiemy wygodną dla naszego problemu definicję strategii dopuszczalnej.

Definicja 2.1.1. *Sterowanie (lub strategia) $(\pi, c) = \{(\pi_t, c_t) \mid s \leqslant t \leqslant T\}$ jest dopuszczalna na przedziale $[s, T]$, $\pi \in \mathcal{A}_s^1$, jeśli spełnia następujące warunki:*

1. *(π, c) jest progresywnie mierzalny względem filtracji $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t\in[s,T]}$ i przyjmuje wartości w zbiorze $K \times I$,*
2. *dla każdego punktu startowego $y \in \mathbb{R}$*

$$P\biggl(\int_s^T |c_t| dt + \int_s^T |\pi_t b(Y_t(y,s))| dt + \int_s^T \pi_t^2 \sigma^2(Y_t(y,s)) dt < \infty\biggr) = 1.$$

Zbiór $\mathcal{A}_s^1$ jest podzbiorem $\mathcal{A}_s(x,y)$ dla dowolnego $(x,y) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}$, zatem zgodnie z uwagą 1.3.4 możliwe jest zastosowanie twierdzenia weryfikacyjnego do $\mathcal{A}_s^1$.

2.1.1. Równanie HJBI i jego transformacja.

W tym przypadku równanie HJBI przybiera postać

$$\min_{\eta\in\Gamma}\max_{\pi\in\mathbb{R}}\max_{c>0}(\mathcal{L}^{\pi,c,\eta}V(x,y,t) - cxV_x + c^\gamma x^\gamma) = 0,$$
$$V(x,y,T) = \frac{1}{\gamma}x^\gamma,$$

czyli

$$\begin{aligned}
V_t &+ \frac{1}{2}a^2(y)V_{yy} - \frac{1}{2}a^2(y)\rho^2\frac{V_{xy}^2}{V_{xx}} + \min_{\eta\in\Gamma}\Bigg(a(y)\rho\eta_1V_y + a(y)\bar{\rho}\eta_2V_y \\
&- a(y)\rho\big(\lambda(y)+\eta_1\big)\frac{V_{xy}V_x}{V_{xx}} - \frac{1}{2}\big(\lambda(y)+\eta_1\big)^2\frac{V_x^2}{V_{xx}}\Bigg) + g(y)V_y + r(y)xV_x \\
&+ \max_{c\in I}\big(-cxV_x + U(cx)\big) = 0,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

z warunkiem końcowym

$$V(x,y,T) = \frac{x^\gamma}{\gamma}.$$

Opierając się na obliczeniach (1.20)–(1.22) oraz obliczając maksimum względem c w równaniu (2.1) można podać wzory, którymi posłużymy sie do wyznaczenia optymalnych strategii inwestora. Są to funkcje:

$$\pi^*(x,y,t) = -\frac{\rho a(y)}{\sigma(y)}\frac{V_{xy}}{xV_{xx}} - \frac{\lambda(y)+\eta_1^*(y,t)}{\sigma(y)}\frac{V_x}{xV_{xx}},$$
$$c^*(x,y,t) = \left(\frac{V_x}{\gamma x^{\gamma-1}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

gdzie η^* jest funkcją borelowsko mierzalną, dla której minimum w równaniu (2.1) jest osiągnięte. Sugerując się postacią warunku końcowego, przyjmujemy założenie o istnieniu rozwiązania w postaci $V(x,y,t) = \frac{1}{\gamma}x^\gamma F(y,t)$. Należy rozważyć dwa przypadki.

Przypadek I: $\gamma \in (\mathbf{0},\mathbf{1})$.

Otrzymujemy równanie

$$\begin{aligned}
F_t &+ \frac{1}{2}a^2(y)F_{yy} + \frac{\gamma}{2(1-\gamma)}\rho^2a^2(y)\frac{F_y^2}{F} + \left(g(y) + \frac{\gamma}{1-\gamma}\rho a(y)\lambda(y)\right)F_y \\
&+ \min_{(\eta_1,\eta_2)\in\Gamma}\left(\bar{\rho}\eta_2a(y)F_y + \frac{1}{(1-\gamma)}\rho a(y)\eta_1F_y + \frac{\gamma}{2(1-\gamma)}\big(\lambda(y)+\eta_1\big)^2F\right) \\
&+ \gamma r(y)F + (1-\gamma)F^{\frac{-\gamma}{1-\gamma}} = 0,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$F(y,T) = 1.$$

Natomiast optymalna strategia dla inwestora jest dana przez

$$\begin{aligned}\pi^*(x,y,t) &= \frac{\rho a(y)}{(1-\gamma)\sigma(y)}\frac{F_y}{F} + \frac{\lambda(y)+\eta_1^*(y,t)}{(1-\gamma)\sigma(y)},\\ c^*(x,y,t) &= F^{\frac{1}{\gamma-1}},\end{aligned}$$

gdzie η^* jest funkcją borelowsko mierzalną, dla której maksimum w równaniu (2.2) jest osiągnięte. Składnik nieliniowy $\frac{\gamma}{2(1-\gamma)}\rho^2 a^2(y)\frac{F_y^2}{F}$ w równaniu (2.2) można usunąć stosując podstawienie typu Hopfa-Cole'a:

$$F(y,t) = \big(\alpha(y,t)\big)^{\delta},$$

gdzie

$$\delta = \frac{1-\gamma}{\gamma\rho^2+1-\gamma}.$$

Transformacje tego typu, w kontekście wyznaczenia optymalnej strategii inwestycyjnej dla problemu klasycznego, zostały zastosowane po raz pierwszy w pracach Zariphopoulou [**41**], [**42**]. Różniczkując mamy:

$$\begin{aligned}F_t &= \delta\alpha_t\cdot(\alpha)^{\delta-1},\\ F_y &= \delta\alpha_y\cdot(\alpha)^{\delta-1},\\ F_{yy} &= \delta(\delta-1)\alpha_y^2\cdot(\alpha)^{\delta(\delta-1)} + \alpha_{yy}\cdot(\alpha)^{\delta-1}.\end{aligned}$$

Podstawiając powyższe pochodne do równania otrzymujemy:

$$\begin{aligned}&\alpha_t + \frac{1}{2}a^2(y)\alpha_{yy} + \left(g(y) + \frac{\gamma\rho}{1-\gamma}a(y)\lambda(y)\right)\alpha_y\\ &+ \min_{(\eta_1,\eta_2)\in\Gamma}\left(\bar{\rho}\eta_2 a(y)\alpha_y + \frac{\rho}{(1-\gamma)}a(y)\eta_1\alpha_y + \frac{\gamma}{2\delta(1-\gamma)}\big(\lambda(y)+\eta_1\big)^2\alpha\right)\\ &+ \frac{\gamma}{\delta}r(y)\alpha + \frac{1-\gamma}{\delta}\alpha^{1-\frac{\delta}{1-\gamma}} = 0,\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$\alpha(y,T) = 1.$$

Przypadek II: $\gamma < 0$ Przypadek ten różni się od poprzedniego tym, że (min) w równaniu (2.3) powinno zostać zastąpione przez (max).

2.1.2. Główny rezultat.

Wykażemy teraz główny rezultat tego rozdziału (sformułowany dla $\gamma\in(0,1)$). Jest to twierdzenie mocniejsze od tych pojawiających się w pracach Hernandeza i Schieda [**18**] oraz Schieda [**33**], ze względu na założenia dotyczące współczynników modelu. W cytowanych pracach współczynniki muszą być dwukrotnie różniczkowalne i ograniczone wraz z pochodnymi.

Twierdzenie 2.1.2. *Jeśli funkcje a, g, $a\cdot\lambda$ są ograniczone i spełniają globalny warunek Lipschitza, r oraz λ są ciągłe i ograniczone, to istnieje α – ograniczone wraz z pochodną α_y i odgraniczone od zera rozwiązanie równania* (2.3) *oraz*

$$\sup_{(\pi,c)\in\mathcal{A}_t^1}\inf_{Q\in\mathcal{Q}} J^{(\pi,c),Q}(x,y,t) = \inf_{Q\in\mathcal{Q}}\sup_{(\pi,c)\in\mathcal{A}_t^1} J^{(\pi,c),Q}(x,y,t) = \frac{x^\gamma}{\gamma}(\alpha(y,t))^{\delta}.$$

Ponadto, istnieje optymalny punkt siodłowy $\big((\pi^*, c^*), \eta^*\big)$ *taki, że borelowsko mierzalna funkcja* η^* *osiąga maksimum w* (2.3) *i strategia inwestora dana jest przez*

$$\pi^*(x,y,t) = \frac{\rho\delta a(y)}{(1-\gamma)\sigma(y)}\frac{\alpha_y}{\alpha} + \frac{\lambda(y)+\eta_1^*(y,t)}{(1-\gamma)\sigma(y)},$$
$$c^*(y,t) = \big(\alpha(y,t)\big)^{\frac{\delta}{\gamma-1}}.$$

Dowód. Wystarczy wykazać warunki **A1** – **A3** podane w stwierdzeniu 1.3.8.

A1) Istnienie rozwiązania równania (2.3) wynika z twierdzenia 5.2.2. Stąd istnieje klasyczne rozwiązanie równania HJBI postaci $V(x,y,t) = \frac{x^\gamma}{\gamma}\big(\alpha(y,t)\big)^\delta$

A2) Istnienie borelowsko mierzalnej funkcji η^*, dla której osiągnięte jest minimum w (2.3) wynika z twierdzenia o mierzalnym wyborze 1.1.15. Dopuszczalność strategi (π^*, c^*) wynika z faktu, że funkcje $\pi^*(b-r)$, $\pi^*\sigma$ oraz c^* są ograniczone.

A3) Proces X^{π^*} spełnia równanie

$$\begin{aligned} dX_t =& r(Y_t)X_t dt + \pi^*(Y_t,t)\big(b(Y_t)-r(Y_t)\big)X_t dt + c^*(Y_t,t)X_t dt \\ &+ \pi^*(Y_t,t)\sigma(Y_t)X_t dW_t^1. \end{aligned}$$

Ze wzoru Itô wynika, że proces $Z_t := X_t^\gamma$ spełnia

$$\begin{aligned} dZ_t =& \gamma r(Y_t)X_t dt + \gamma\pi^*(Y_t,t)\big(b(Y_t)-r(Y_t)\big)Z_t dt + \gamma c^*(Y_t,t)Z_t dt \\ &+ \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}((\pi^*)^2(Y_t,t)\sigma^2(Y_t)Z_t dt + \gamma\pi^*(Y_t,t)\sigma(Y_t)Z_t dW_t^1. \end{aligned}$$

Korzystając ze stwierdzenia 1.1.14 dostaniemy

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^Q_{x,y,t}\Bigg(\sup_{t\le s\le T}|V(X_s^{\pi^*,c^*}, Y_s, s)|\Bigg) = \mathbb{E}^Q_{x,y,t}\Bigg(\sup_{t\le s\le T}\big|\big(X_s^{\pi^*,c^*}\big)^\gamma\big(\alpha(Y_s,s)\big)^\delta\big|\Bigg) \\ &\le \Bigg(\mathbb{E}\bigg(\frac{dQ}{dP}\bigg)^2\Bigg)^{\frac12}\Bigg(\mathbb{E}_{x,y,t}\sup_{t\le s\le T}\big|\big(X_s^{\pi^*,c^*}\big)^\gamma\big(\alpha(Y_s,s)\big)^\delta\big|^2\Bigg)^{\frac12} < \infty \end{aligned}$$

dla każdej miary $Q \in \mathcal{Q}$.

□

Uwaga . *Gdy* $\gamma < 0$*, to funkcja użyteczności* U *przyjmuje wartości ujemne. Zatem dla uzyskania analogicznego rezultatu należy zawęzić w odpowiedni sposób klasę strategii dopuszczalnych tak, aby zachodził warunek* **A3'** *ze stwierdzenia 1.3.8. Odpowiednią definicję podamy między innymi w części tego rozdziału poświęconej funkcji logarytm.*

Dla funkcji użyteczności typu HARA możliwe jest ponadto uzyskanie rezultatu analogicznego do twierdzenia 1.3.9, lecz uwzględniającego dodatkowo proces konsumpcji c.

Stwierdzenie 2.1.3. *Jeżeli funkcja* r *jest stała oraz funkcja* $(-\lambda)$ *przyjmuje wartości wyłącznie w zbiorze* $\mathrm{Pr}_1\,\Gamma$*, to* Q^* *jest miarą martyngałową, natomiast optymalna strategia inwestora dana jest przez*

$$\pi^* = 0 \quad i \quad c^*(t) = \big(F(t)\big)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

gdzie

$$F(t) = \left(\frac{e^{r(C+(T-t))} - (1-\gamma)}{r}\right)^{1-\gamma}, \qquad C = \frac{\ln(r + (1-\gamma))}{r}. \tag{2.4}$$

Dowód. Funkcja (2.4) jest rozwiązaniem równania

$$F_t + rF + (1-\gamma)F^{\frac{-\gamma}{1-\gamma}} = 0, \quad F(T) = 1.$$

Ponieważ $(-\lambda)$ przyjmuje wartości w zbiorze $\mathrm{pr}_1\,\Gamma$, to jest to również rozwiązanie (2.2) i $\eta_1^*(y,t) = -\lambda(y)$. □

2.1.3. Przykłady.

Na przykładach pokażemy jak wybrać odporną strategię inwestycyjną w modelach najprostszych.

Przykład 2.1.4 (Model Blacka-Scholesa). Rozważamy klasyczny model generowany przez jeden proces Wienera o dynamice

$$\begin{cases} dB_t = rB_t dt, \\ dS_t = bS_t dt + \sigma S_t dW_t. \end{cases}$$

Model nie uwzględnia dodatkowego czynnika Y, zbiór Γ jest natomiast przedziałem $[-R, R]$. Niech

$$K_R := \begin{cases} \lambda - R, & \text{jeżeli} \quad \lambda > R, \\ 0, & \text{jeżeli} \quad -R < \lambda < R, \\ \lambda + R, & \text{jeżeli} \quad \lambda < -R. \end{cases}$$

Aby otrzymać kompletne rozwiązanie należy rozwiązać równanie

$$F_t + (r + \frac{\gamma}{1-\gamma}K_R^2)F + (1-\gamma)F^{\frac{-\gamma}{1-\gamma}} = 0, \quad F(T) = 1.$$

Równanie zostało rozwiązane dla potrzeb dowodu stwierdzenia 2.1.3.

$$F(t) = \left(\frac{e^{(r+\frac{\gamma}{1-\gamma}K_R^2)(C+(T-t))} - (1-\gamma)}{r + \frac{\gamma}{1-\gamma}K_R^2}\right)^{1-\gamma},$$

gdzie

$$C = \frac{\ln(r + \frac{\gamma}{1-\gamma}K_R^2 + (1-\gamma))}{r + \frac{\gamma}{1-\gamma}K_R^2}.$$

Strategia inwestora dana jest przez

$$\pi^* = \frac{K_R}{(1-\gamma)\sigma}, \quad c^*(t) = \big(F(t)\big)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad \eta^* = K_R - \lambda.$$

Przykład 2.1.5 (Model Ho-lee). W stwierdzeniu 2.1.3 założyliśmy, że funkcja r jest stała. Na przykładzie rynku pieniężnego pokażemy, że tego założenia nie da się pominąć.

Rozważamy model Ho-Lee:

$$\begin{cases} dB_t &= r_t B_t dt, \\ dS_t &= (r_t + \lambda\sigma_t) S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^1, \\ dr_t &= g dt + a(\rho dW_t^1 + \bar{\rho} dW_t^2). \end{cases}$$

W dynamice wartości portfela X nie uwzględniamy procesu konsumpcji c. Niech Γ będzie prostokątem $[-R, R] \times [C, D]$ Powyższy model zostanie związany z równaniem

$$\begin{aligned} &\alpha_t + \frac{1}{2}a^2\alpha_{rr} + \left(g + \frac{\gamma\rho}{1-\gamma}a\lambda_t\right)\alpha_r \\ &+ \min_{(\eta_1,\eta_2)\in\Gamma}\left(\bar{\rho}a\eta_2\alpha_r + \frac{\rho}{(1-\gamma)}a\eta_1\alpha_r + \frac{\gamma}{2\delta(1-\gamma)}\big(\lambda+\eta_1\big)^2\alpha\right) + \frac{\gamma}{\delta}r\alpha = 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

gdzie $\alpha(r, T) = 1$. Zważając na postać równania, poszukujemy nieujemnej funkcji postaci

$$\alpha(r, t) = e^{\frac{\gamma}{\delta}r(T-t)} f(t).$$

Wtedy, dla odpowiednio dobranych stałych A, B mamy

$$f'(t) + \big((T-t)^2 A + (T-t)B\big) f(t) = 0.$$

Powyższe równanie ma jednoznaczne rozwiązanie postaci

$$f(t) = \exp\left(-\int_t^T A(T-s)^2 ds - \int_t^T B(T-s) ds\right).$$

Punkt siodłowy natomiast dany jest przez

$$\pi^*(t) = \frac{\rho\gamma(T-t)at}{(1-\gamma)\sigma_t} + \frac{\lambda + \eta_1^*(t)}{(1-\gamma)\sigma_t}, \quad \eta_2^* = C,$$

$$\eta_1^*(t) = \begin{cases} -R, & \text{gdy } -\lambda - \rho(T-t)a < -R, \\ -\lambda - \rho(T-t)a, & \text{gdy } -R \le -\lambda - \rho(T-t)a \le R, \\ R, & \text{gdy } -\lambda - \rho(T-t)a > R. \end{cases}$$

Tak określone η^* rzeczywiście nie musi wyznaczać miary martyngałowej.

Należy zwrócić uwagę, że tym przypadku współczynniki powstałego równania nie muszą być ograniczone i funkcja $\alpha(r, t)$ nie jest ograniczona. Dla wykazania, że znaleziony został właściwy punkt siodłowy nie można bezpośrednio zastosować twierdzenia 2.1.2. Należy raczej wykazać punkt **A3** ze stwierdzenia 1.3.8. W tym celu trzeba pokazać, że dla każdej liczby rzeczywistej c i dla każdego punktu startowego $(r, s) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ mamy

$$\mathbb{E}_{r,s}\left(\sup_{s\le t\le T} e^{c(T-t)r_t}\right) < \infty.$$

Ale warunek ten wynika z faktu, że proces $e^{c(T-t)r_t}$ jest
rozwiązaniem pewnego równania liniowego i ze stwierdzenia 1.1.14.

2.2. Ograniczenia portfelowe

W poprzednich sekcjach przedstawiony został rynek wyidealizowany, w którym inwestor może między innymi dokonywać krótkiej sprzedaży instrumentów finansowych. Bywa jednak tak na rynku finansowym, że dla inwestora tego typu możliwości są zablokowane. W tym rozdziale zakładamy, że $K \times I = [0,1] \times (0,1]$[1] oraz dla ustalenia uwagi $\gamma \in (0,1)$.

Posłużymy się rozwiązaniami równania

$$
\begin{aligned}
&V_t + \frac{1}{2}a^2 V_{yy} + \min_{(\eta_1,\eta_2)\in\Gamma} \max_{\pi\in[0,1]} \bigg(\frac{1}{2}\pi^2\sigma^2(y)x^2V_{xx} + \rho\pi\sigma(y)a(y)xV_{xy} \\
&\quad + \pi(b(y) + \eta_1\sigma)xV_x + (\rho\eta_1 + \bar{\rho}\eta_2)V_y \bigg) \\
&\quad + g(y)V_y + \max_{c\in[0,1]}(-cxV_x + c^\gamma x^\gamma) = 0,
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

z warunkiem końcowym

$$V(x,y,T) = \frac{1}{\gamma}x^\gamma.$$

Równanie rozwiązujemy wypracowaną w poprzednich rozdziałach metodą podstawiając

$$V(x,y,T) = \frac{x^\gamma}{\gamma}F(y,t).$$

Otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
&F_t + \frac{1}{2}a^2(y)F_{yy} + \min_{(\eta_1,\eta_2)\in\Gamma} \max_{\pi\in[0,1]} \bigg(\frac{1}{2}\pi^2\gamma(\gamma-1)\sigma^2(y)F + \rho\pi\gamma\sigma(y)a(y)F_y \\
&\quad + \pi\gamma(b(y) + \eta_1\sigma(y))F + a(y)(\rho\eta_1 + \bar{\rho}\eta_2)F_y \bigg) \\
&\quad + g(y)F_y + \max_{c\in(0,1]}(-c\gamma F + c^\gamma) = 0.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Z twierdzenia 5.2.1 wynika, że jeśli wszystkie współczynniki tego równania spełniają globalny warunek Lipschitza i są ograniczone oraz $a(y) > \varepsilon > 0$, to równanie (2.7) posiada rozwiązanie. Równocześnie będzie można skorzystać z twierdzenia o minimaksie 1.3.5. Nieujemność takiego rozwiązania wynika z faktu, iż jest to równnanie HJBI dla pewnej stochastycznej gry różniczkowej.

Jeśli zdefiniujemy

$$
\pi^*(y,t,\eta) := \begin{cases}
0, & \text{jeśli } \frac{\rho a(y)}{(1-\gamma)\sigma(y)}\frac{F_y}{F} + \frac{\lambda(y)+\eta_1}{(1-\gamma)\sigma(y)} < 0, \\
\frac{\rho a(y)}{(1-\gamma)\sigma(y)}\frac{F_y}{F} + \frac{\lambda(y)+\eta_1}{(1-\gamma)\sigma(y)}, & \text{jeśli } 0 \le \frac{\rho a(y)}{(1-\gamma)\sigma(y)}\frac{F_y}{F} + \frac{\lambda(y)+\eta_1}{(1-\gamma)\sigma(y)} \le 1, \\
1, & \text{jeśli } \frac{\rho a(y)}{(1-\gamma)\sigma(y)}\frac{F_y}{F} + \frac{\lambda(y)+\eta_1}{(1-\gamma)\sigma(y)} > 1,
\end{cases}
$$

[1]Zamiast [0,1] można wybrać inny przedział domknięty

to optymalna strategia wyznaczona jest przez funkcję $\pi^*(y,t) = \pi(y,t,\eta^*(y,t))$. Ponadto miara Q^* wyznaczona jest przez borelowsko mierzalną funkcję η^*, dla której max w (2.8)

$$\begin{aligned} F_t + \frac{1}{2}a^2(y)F_{yy} + \min_{(\eta_1,\eta_2)\in\Gamma}\Bigg(&\frac{1}{2}(\pi^*(y,t,\eta))^2\gamma(\gamma-1)\sigma^2(y)F + \rho\pi^*(y,t,\eta)\gamma\sigma(y)a(y)F_y \\ &+ \pi^*(y,t,\eta)\gamma(b(y)+\eta_1\sigma(y))F + a(y)(\rho\eta_1+\bar{\rho}\eta_2)F_y\Bigg) \\ &+ g(y)F_y + \max_{c\in[0,1]}(-c\gamma F + c^\gamma) = 0. \end{aligned}$$

jest osiągnięte. Powyższy rezultat zostanie pozostawiony bez dowodu, ponieważ jest on powtórzeniem dowodu twierdzenia 2.1.2.

Przykład 2.2.1 (Model Blacka - Scholesa).

$$\begin{cases} dB_t = rB_t dt, \\ dS_t = bS_t dt + \sigma S_t dW_t. \end{cases}$$

Nie uwzględniamy procesu konsumpcji c Ze względu na twierdzenie o minimaksie wygodniej jest w tym wypadku rozważyć równanie

$$F_t + \max_{\pi\in[0,1]}\min_{\eta_1\in[-R,R]}\left(\frac{1}{2}\pi^2\gamma(\gamma-1)\sigma^2F + \pi\gamma(b-r+\eta_1\sigma)F\right) + rF = 0.$$

Poszukujemy rozwiązania w postaci

$$F(t) = e^{l\cdot(T-t)}.$$

Dostajemy

$$-l + \max_{\pi\in[0,1]}\min_{\eta_1\in[-R,R]}\left(\frac{1}{2}\pi^2\gamma(\gamma-1)\sigma^2 + \pi\gamma(b-r+\eta_1\sigma)\right) + r = 0.$$

Stąd $\eta^* = -R$,

$$-l + \max_{\pi\in[0,1]}\left(\frac{1}{2}\pi^2\gamma(\gamma-1)\sigma^2 + \pi\gamma(b-r-R\sigma)\right) + r = 0.$$

i dalej

$$\pi^* = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \frac{\lambda-R}{(1-\gamma)\sigma} > 1, \\ \frac{\lambda-R}{(1-\gamma)\sigma}, & \text{jeśli } \frac{\lambda-R}{(1-\gamma)\sigma} \in [0,1], \\ 0, & \text{jeśli } \frac{\lambda-R}{(1-\gamma)\sigma} < 0. \end{cases}$$

2.3. Funkcja logarytmiczna

W tej sekcji poszukujemy punktu siodłowego dla

$$J^{\pi,c,Q}(x,y,t) = \mathbb{E}^Q_{x,y,t}\left(\int_t^T \ln(c_sX_s)ds + \ln(X_T)\right),$$

gdzie

$$dX_t = r(Y_t)X_tdt + \pi_t\big(b(Y_t) - r(Y_t)\big)X_tdt - c_tX_tdt + \pi_t\sigma(Y_t)dW^1_t.$$

Ponieważ logarytm może przyjmować również wartości ujemne nie można wprost zastosować twierdzenia weryfikacyjnego 1.3.2. Skorzystamy jednak z uwagi 1.3.3. Należy zatem zawęzić klasę strategii dopuszczalnej tak, aby

$$\mathbb{E}^{Q}_{x,y,t}\Big(\sup_{t\leq s\leq T}|\ln(X^{\pi,c}_s)|\Big)<\infty,$$
$$\mathbb{E}^{Q}_{x,y,t}\Big(\int_t^T|\ln(c_k X^{\pi,c}_k)|dk\Big)<\infty$$

dla każdej miary $Q\in\mathcal{Q}$ i strategii dopuszczalnej π.

Definicja 2.3.1. *Sterowanie (lub strategia)* $(\pi,c)=\{(\pi_t,c_t)\mid s\leqslant t\leqslant T\}$ *jest* dopuszczalna *na przedziale* $[s,T]$, $\pi\in\mathcal{A}^2_s$, *jeśli spełnia następujące warunki:*

(1) π *jest progresywnie mierzalny względem filtracji* $\{\mathcal{F}^W_t\}_{t\in[s,T]}$ *i przyjmuje wartości w zbiorze* $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$,

(2) *dla dowolnego punktu startowego* $y\in\mathbb{R}$ *procesy* $\{\pi_t\sigma(Y_t(y,s))\mid s\leqslant t\leqslant T\}$, $\{\pi_t\big(b(Y_t(y,s))-r(Y_t(y,s))\big)\mid s\leqslant t\leqslant T\}$, $\{c_t\mid s\leqslant t\leqslant T\}$ *są ograniczone.*

Problem jest związany z równaniem

$$\begin{aligned}V_t&+\frac{1}{2}a^2(y)V_{yy}-\frac{1}{2}a^2(y)\rho^2\frac{V_{xy}^2}{V_{xx}}+\min_{\eta\in\Gamma}\Big(a(y)\rho\eta_1V_y+a(y)\bar{\rho}\eta_2V_y\\&-a(y)\rho\big(\lambda(y)+\eta_1\big)\frac{V_{xy}V_x}{V_{xx}}-\frac{1}{2}\big(\lambda(y)+\eta_1\big)^2\frac{V_x^2}{V_{xx}}\Big)+g(y)V_y+r(y)xV_x\\&+\max_{c\in I}\big(-cxV_x+U(cx)\big)=0,\end{aligned}$$

z warunkiem końcowym

$$V(x,y,T)=\ln x.$$

Ze względu na własności logarytmu, poszukiwania optymalnych strategii należy rozpocząć od funkcji postaci

$$V(x,y,t)=(T-t+1)\ln x+F(y,t),$$

gdzie funkcja F spełnia równanie

$$\begin{aligned}F_t&+\frac{1}{2}a^2(y)F_{yy}+\min_{(\eta_1,\eta_2)\in\Gamma}\Big(a(y)\rho\eta_1F_y+a(y)\bar{\rho}\eta_2F_y-(T-t+1)\big(\lambda(y)+\eta_1\big)^2\Big)\\&+g(y)F_y+(T-t+1)r(y)=0,\end{aligned}\tag{2.9}$$

z warunkiem końcowym

$$F(y,T)=0.$$

Natomiast optymalne sterowania Markowa dane są przez

$$\pi^*(x,y,t)=\frac{\lambda(y)+\eta_1^*(y,t)}{\sigma(y)},$$
$$c^*=\frac{1}{T-t+1}.$$

Korzystając z uwagi 1.3.3 i powtarzając poszczególne kroki dowodu twierdzenia 2.1.2 dostaniemy

Stwierdzenie 2.3.2. *Jeśli funkcje a, g są ograniczone i spełniają globalny warunek Lipschitza, $a(y) > \varepsilon > 0$, r, λ są ciągłe i ograniczone, to istnieje α – ograniczone rozwiązanie równania* (2.9) *oraz*

$$\sup_{(\pi,c)\in\mathcal{A}_t^2}\inf_{Q\in\mathcal{Q}} J^{(\pi,c),Q}(x,y,t) = \inf_{Q\in\mathcal{Q}}\sup_{(\pi,c)\in\mathcal{A}_t^2} J^{(\pi,c),Q}(x,y,t) = (T-t+1)\ln x + F(y,t).$$

Ponadto istnieje optymalny punkt siodłowy $\big((\pi^*,c^*),\eta^*\big)$ *taki, że* η^* *osiąga maksimum w* (2.3), *i strategia inwestora dana jest przez*

$$\pi^*(x,y,t) = \frac{\lambda(y)+\eta_1^*(y,t)}{\sigma(y)},$$
$$c^*(t) = \frac{1}{T-t+1}.$$

W przypadku logarytmu należy zwrócić uwagę na fakt, że dla problemu klasycznego optymalna strategia inwestora π^* nie zależy od horyzontu inwestycyjnego T. Natomiast gdy obecne jest ryzyko modelu, to odporna strategia inwestycyjna zależy od T przez składnik η_1^*.

2.4. Modyfikacje i rozszerzenia problemu

2.4.1. Funkcja kary.

Na użytek wyłącznie tej części pracy założymy, że zbiór $\Gamma = \mathbb{R}^2$. Rodzina miar $\mathcal{Q}$ wyznaczona jest tym razem przez takie η, dla których

$$\mathbb{E}\mathcal{E}\bigg(\int \eta_{1t}dW_t^1 + \eta_{2t}dW_t^2\bigg)_T = 1.$$

Zmieni się także definicja wypłaty dla gry. Tym razem

$$J^{\pi,Q}(x,y,0) = \mathbb{E}_{x,y,0}^{Q}\Big(U(X_T^\pi) + \gamma(Q)\Big),$$

gdzie $\gamma(Q)$ jest nieujemną funkcją na zbiorze miar $\mathcal{Q}$ zwaną *funkcją kary*. $\gamma(Q)$ interpretuje się jako subiektywny stopień przekonania, co do możliwości urzeczywistnienia się scenariusza wyznaczonego miarą Q. I ten też stopień niepewności inwestor uwzględnia w optymalizacji. Pierwszą funkcją, która przychodzi na myśl jako odpowiednia kandydatka dla funkcji kary jest względna entropia miar:

$$H(Q|P) = \mathbb{E}\bigg|\frac{dQ}{dP}\ln\frac{dQ}{dP}\bigg| = \mathbb{E}^Q\int_0^T\big(\eta_{1t}^2+\eta_{2t}^2\big)dt.$$

Dlatego można zaproponować funkcję wypłaty postaci

$$J^{\pi,Q}(x,y,0) = \mathbb{E}_{x,y,0}\bigg(U(X_T^\pi) + \frac{K}{2}\int_0^T\big(\eta_{1t}^2+\eta_{2t}^2\big)dt\bigg),$$

gdzie K jest stałą wybraną w sposób subiektywny przez inwestora. Niestety wypisać rozwiązanie dla tego problemu udaje się wyłącznie dla logarytmicznej funkcji niepewności. W pracy Hernandeza i Schieda [**31**] można odnaleźć rozwiązanie dla problemu ogólniejszego:

$$J^{\pi,Q}(x,y,0) = \mathbb{E}_{x,y,0}^{Q}\bigg(\ln(X_T^\pi) + \int_0^T h(\eta_t)dt\bigg),$$

gdzie h jest funkcją wypukłą. Podobnie jak w innych pracach tych autorów problem został rozwiązany przez połączenie metod analizy wypukłej z teorią stochastycznego sterowania.

Aby nie powielać schematu dowodowego z innych rozdziałów skupimy się wyłącznie na równaniu HJBI i wypiszemy rozwiązanie dla funkcji $h(\eta) = \frac{K}{2}\big(\eta_1^2 + \eta_2^2\big)$.

Równanie HJBI ma postać

$$
\begin{aligned}
&V_t + \frac{1}{2}a^2(y)V_{yy} - \frac{1}{2}a^2(y)\rho^2\frac{V_{xy}^2}{V_{xx}} + \min_{\eta\in\Gamma}\Bigg(a(y)\rho\eta_1 V_y + a(y)\bar{\rho}\eta_2 V_y \\
&\quad + a(y)\rho\big(\lambda(y)+\eta_1\big)\frac{V_{xy}V_x}{V_{xx}} + \frac{1}{2}\big(\lambda(y)+\eta_1\big)^2\frac{V_x^2}{V_{xx}} + \frac{K}{2}\big(\eta_1^2+\eta_2^2\big)\Bigg) \\
&\quad + g(y)V_y + r(y)xV_x = 0,
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

z warunkiem końcowym

$$V(x,y,t) = \ln x.$$

Sugerując się postacią warunku końcowego i zważając na własności logarytmu, rozwiązania poszukujemy w postaci $V(x,y,t) = \ln x + F(y,t)$. Otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
F_t + \frac{1}{2}a^2(y)F_{yy} + \min_{(\eta_1,\eta_2)\in\Gamma}\Bigg(a(y)\rho\eta_1 F_y + a(y)\bar{\rho}\eta_2 F_y + \frac{1}{2}\big(\lambda(y)+\eta_1\big)^2 + \frac{K}{2}\big(\eta_1^2+\eta_2^2\big)\Bigg)& \\
+ g(y)F_y + r(y) = 0.&
\end{aligned}
$$

Minimum w powyższym równaniu jest osiągnięte dla

$$\eta_1^*(y,t) = \frac{-\rho a(y)F_y - \lambda(y)}{1+K}, \qquad \eta_2^*(y,t) = \frac{-\rho a(y)F_y}{K}.$$

Natomiast samo równanie, po wstawieniu do niego η^* ma postać odpowiednią do zastosowania transformacji typu Hopfa-Cole'a i w związku z tym może zostać przekształcone do równania liniowego.

Dla innych użyteczoności typu HARA, ciężko jest wnioskować cokolwiek o istnieniu gładkiego rozwiązania równania (2.10). Z tego powodu w pracy Meanhout [**20**] oraz Uppal i Wang [**38**] autorzy proponują zastąpić składnik $\frac{K}{2}\cdot\big(\eta_1^2+\eta_2^2\big)$ w równaniu (2.10) przez $\frac{K}{2}\cdot V\cdot\big(\eta_1^2+\eta_2^2\big)$. Jako dodatkowe uzasadnienie dla wprowadzenia tego składnika do równania może służyć fakt, iż jest to równanie HJBI dla problemu

$$J^{\pi,Q^\eta}(x,y,t) = \mathbb{E}_{x,y,t}^{Q^\eta}\exp\bigg(\int_t^T K(\eta_{1s}^2+\eta_{2s}^2)ds\bigg)U(X_T^\pi).$$

Tu czynnik $\exp\Big(\int_t^T K(\eta_{1s}^2+\eta_{2s}^2))ds\Big)$ może być interpretowany jako funkcja kary o charakterze multiplikatywnym.

2.4.2. Model wieloczynnikowy.

W pracy założyliśmy, że współczynniki w dynamice aktywów finansowych zależą wyłącznie od jednego czynnika, który nie jest przedmiotem obrotu. Z pewnością dokładniejszy model można uzyskać, gdy uwzględnimy więcej czynników. Na przykład dla rynku akcji dobry model otrzymamy gdy uwzględnimy krótkoterminową stopę procentową, długoterminową stopę procentową oraz stopę dywidendy (Brennan i wsp [**4**]). Jednak dla modelu wieloczynnikowego nie dysponujemy pełnym rozwiązaniem dla postawionego problemu. Aby przedstawić napotykane problemy rozważymy model dwuczynnikowy

$$\begin{cases} dB_t &= r(Y_t)B_t dt, \\ dS_t &= S_t b(Y_t)dt + S_t\sigma(Y_t)dW_t^1, \\ dY_t^1 &= g_1(Y_t)dt + a_1(Y_t)\big(\rho_1 dW_t^1 + \bar{\rho}_1 dW_t^2\big), \\ dY_t^2 &= g_2(Y_t)dt + a_2(Y_t)\big(\rho_2 dW_t^1 + \bar{\rho}_2 dW_t^3\big). \end{cases}$$

W tym przypadku dowód twierdzenia weryfikacyjnego nie ulegnie zmianie. Ale samo twierdzenie weryfikacyjne będzie można zastosować jeśli znalezione zostanie odpowiednio regularne rozwiązanie równania

$$\begin{aligned} &F_t + \frac{1}{2}a_1^2(y)F_{y_1y_1} + \frac{1}{2}a_2^2(y)F_{y_2y_2} + \rho_1\rho_2 a_1(y)a_2(y)F_{y_1y_2} \\ &\quad + \frac{\gamma}{2(1-\gamma)}\frac{\big(\rho_1 a_1(y)F_{y_1} + \rho_2 a_2(y)F_{y_2}\big)^2}{F} + \bigg(g_1(y) + \frac{\gamma}{1-\gamma}\rho_1 a_1(y)\lambda(y)\bigg)F_{y_1} \\ &\quad + \bigg(g_2(y) + \frac{\gamma}{1-\gamma}\rho_2 a_2(y)\lambda(y)\bigg)F_{y_2} + \min_{\eta\in\Gamma}\bigg(\bar{\rho}_1\eta_2 a_1(y)F_{y_1} + \bar{\rho}_2\eta_3 a_2(y)F_{y_2} \\ &\quad + \frac{1}{(1-\gamma)}\rho_1 a(y)\eta_1 F_{y_1} + \frac{1}{(1-\gamma)}\rho_2 a_2(y)\eta_1 F_{y_2} + \frac{\gamma}{2(1-\gamma)}\big(\lambda(y)+\eta_1\big)^2 F\bigg) + \gamma r(y)F = 0. \end{aligned}$$

Jednakże transformacje, których użyliśmy dla przypadku jednoczynnikowego zawiodą, gdy zechcemy użyć ich w celu usunięcia wyrażenia nieliniowego:

$$\frac{\big(\rho_1 a_1(y)F_{y_1} + \rho_2 a_2(y)F_{y_2}\big)^2}{F}.$$

To sprawia, że należy szukać innych metod aby wykazać, przy możliwie słabych założeniach, istnienie klasycznych regularnych rozwiązań dla równania tego typu. Badania nad nimi będą przez autora kontynuowane w przyszłości.

ROZDZIAŁ 3

Użyteczność typu CARA oraz problem Markowitza

W tym rozdziale rozwiązywane są dwa zagadnienia optymalizacyjne. Jeden związany z funkcją użyteczności typu CARA (ang. constant absolute risk aversion), drugi natomiast dotyczy funkcji kwadratowej i problemu Markowitza. Elementem łączącym obydwa zagadnienia jest portfel $\bar{X}$ dany tym razem za pomocą dynamiki

$$\begin{cases} \bar{X}_t = r\bar{X}_t dt + \bar{\pi}_t\big(b(Y_t) - r\big)dt + \bar{\pi}_t\sigma(Y_t)dW_t^1, \\ \bar{X}_s = \bar{x}, \end{cases} \tag{3.1}$$

gdzie $\bar{x}$ oznacza kapitał początkowy inwestora. Tak jak i w poprzednim rozdziale traktujemy b oraz σ jako wielkości skalarne. Aby uniknąć komplikacji z wyznaczaniem rozwiązania opisanych problemów inwestycyjnych, wygodniej będzie posługiwać się wartością przyszłą portfela. Bardziej precyzyjnie przez X_t oznaczać będziemy T -wartość przyszłą kapitału:

$$X_t = e^{(T-t)r}\bar{X}_t, \qquad \pi_t = e^{(T-t)r}\bar{\pi}_t.$$

Można zatem dynamikę portfela przepisać w następujący sposób:

$$dX_t = \pi_t\big(b(Y_t) - r\big)dt + \pi_t\sigma(Y_t\big)dW_t^1.$$

Bez straty dla ogólności możemy założyć, że stopa procentowa r jest równa 0, co daje

$$dX_t = \pi_t b(Y_t)dt + \pi_t\sigma(Y_t)dW_t^1. \tag{3.2}$$

Uwaga . *Należy zwrócić uwagę, że w przedstawionym problemie dopuszczamy ujemną wartość portfela. Należy również spodziewać się, że w takiej sytuacji optymalny portfel też będzie mógł przyjmować wartości ujemne. Warto ponadto zaznaczyć, że założenie o deterministycznej stopie procentowej jest niezbędne, aby rozwiązanie problemu dla dynamiki* (3.2) *móc przekształcić do rozwiązania problemu dla dynamiki* (3.1).

Podajemy też odpowiednią definicję strategii dopuszczalnej.

Definicja 3.0.1. *Sterowanie (lub strategia)* $\pi = \{\pi_t \mid s \leqslant t \leqslant T\}$ *jest dopuszczalna na przedziale* $[s,T]$, $\pi \in \mathcal{A}_s^3$, *jeśli*

(1) π *jest progresywnie mierzalny względem filtracji* $\{\mathcal{F}_t^W \mid s \leqslant t \leqslant T\}$,

(2) *dla dowolnego punktu startowego* $y \in \mathbb{R}$

$$P\left(\int_s^T |c_t|dt + \int_s^T |\pi_t b(Y_t(y,s))|dt + \int_s^T \pi_t^2\sigma^2(Y_t(y,s))dt < \infty\right) = 1,$$

(3) *dla dowolnego punktu startowego* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *i dowolnej miary* $Q \in \mathcal{Q}$

$$\mathbb{E}_{x,y,s} \sup_{s \leq t \leq T} |U(X_t^\pi)| < \infty.$$

$\mathcal{A}_s^3$ jest podzbiorem $\mathcal{A}_s(x,y)$ dla każdego $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (dla rozważanych w tym rozdziale funkcji $\mathrm{Dom}(U) = \mathbb{R}$). Warunek (3) w definicji został tak skonstruowany, aby obejmował warunek **A3'** ze stwierdzenia 1.3.8 dla rozważanych w tym rozdziale funkcji U. Strategię dopuszczalną interpretujemy jako część kapitału zainwestowaną w instrument ryzykowny S.

3.1. Preferencje typu CARA

W przypadku funkcji użyteczności typu CARA (ang. constant absolute risk aversion utility), oprócz problemu czysto inwestycyjnego, możliwe jest również rozwiązanie zagadnienia związanego z zabezpieczeniem ryzyka niefinansowego pochodzącego od instrumentu pochodnego $\beta(Y_T)$. Jest to w zasadzie jedyna znana funkcja użyteczności, dla której możliwe jest rozwiazanie problemu tego typu. Rozwiązanie przedstawione w tym rozdziale pochodzi z pracy Zawiszy [**43**]. Należy wspomnieć również o pracy Zhanga i Siu [**40**], w której metoda równań HJBI stosowana jest również do funkcji użyteczności CARA, ale w modelu portfela dla ubezpieczyciela. Wypłata w przypadku użyteczności CARA ma postać:

$$J^{\pi,Q}(x,y,t) = \mathbb{E}^Q_{x,y,t}\Big(-e^{-\gamma X_T^\pi + \gamma\beta(Y_T)}\Big).$$

3.1.1. Równanie HJBI.

Biorąc pod uwagę postać dynamiki (3.2) punkt siodłowy (π^*, η^*) oraz wartość gry V zostaną wyznaczone przez rozwiązanie równania

$$\begin{aligned} V_t + \frac{1}{2}a^2(y)V_{yy} - \frac{1}{2}a^2(y)\rho^2\frac{V_{xy}^2}{V_{xx}} + g(y)V_y + \min_{\eta\in\Gamma}\Big(& a(y)\rho\eta_1 V_y + a(y)\bar{\rho}\eta_2 V_y \\ - a(y)\rho\big(\lambda(y)+\eta_1\big)\frac{V_{xy}V_x}{V_{xx}} - \frac{1}{2}\big(\lambda(y)+\eta_1\big)^2\frac{V_x^2}{V_{xx}}\Big) &= 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

z warunkiem końcowym

$$V(x,y,t) = -e^{-\gamma x + \gamma\beta(y)}.$$

Poszukując rozwiązania postaci

$$V(x,y,t) = -e^{-\gamma x}F(y,t)$$

równanie (3.3) przekształcamy do

$$\begin{aligned} F_t + \frac{1}{2}a^2(y)F_{yy} - \frac{1}{2}\rho^2 a^2(y)\frac{F_y^2}{F} + \Big(g(y) - \rho a(y)\lambda(y)\Big)F_y \\ + \max_{(\eta_1,\eta_2)\in\Gamma}\Big(a(y)\bar{\rho}\eta_2 F_y - \frac{1}{2}\big(\lambda(y)+\eta_1\big)^2 F\Big) = 0, \end{aligned}$$

z warunkiem końcowym

$$F(y,T) = \exp\big(\gamma\beta(y)\big).$$

Aby usunąć nieliniowy składnik $\frac{1}{2}\rho^2 a^2(y)\frac{F_y^2}{F}$ rozważamy dwa przypadki:

Przypadek I $\big(\boldsymbol{\rho^2 \neq 1}\big)$

$$F(y,t) = \big(\alpha(y,t)\big)^{\frac{1}{1-\rho^2}} = \big(\alpha(y,t)\big)^{\frac{1}{\bar{\rho}^2}}. \tag{3.4}$$

Tego typu transformacja dla zagadnienia klasycznego została zaproponowana w pracy Musieli i Zariphopoulou [**25**]. Różniczkowanie F prowadzi do:

$$\begin{aligned} F_t &= \frac{1}{1-\rho^2}\alpha_t \cdot (\alpha)^{\frac{\rho^2}{1-\rho^2}}, \\ F_y &= \frac{1}{1-\rho^2}\alpha_y \cdot (\alpha)^{\frac{\rho^2}{1-\rho^2}}, \\ F_{yy} &= \frac{1}{1-\rho^2}\frac{\rho^2}{1-\rho^2}\alpha_y^2 \cdot (\alpha)^{\frac{1}{1-\rho^2}-2} + \alpha_{yy} \cdot (\alpha)^{\frac{\rho^2}{1-\rho^2}}. \end{aligned}$$

Podstawiając otrzymane pochodne mamy

$$\begin{aligned} &\alpha_t + \frac{1}{2}a^2(y)\alpha_{yy} + \Big(g(y) - \rho\lambda(y)a(y)\Big)\alpha_y \\ &+ \max_{(\eta_1,\eta_2)\in\Gamma}\left(\bar{\rho}\eta_2 a(y)\alpha_y - \frac{\bar{\rho}^2}{2}\big(\lambda(y)+\eta_1\big)^2\alpha\right) = 0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\alpha(y,T) = \exp\big(\bar{\rho}^2\gamma\beta(y)\big).$$

Należy zwrócić uwagę, że równanie (3.5) ma postać równania HJB. Można zatem podać jego stochastyczną reprezentację.

Stwierdzenie 3.1.1. *Jeżeli funkcje λ oraz β są ograniczone , g, a, $a\cdot\lambda$ spełniają warunek Lipschitza i α jest ograniczonym gładkim rozwiązaniem równania* (3.5), *to*

$$\alpha(y,t) = \max_{\eta\in\mathcal{M}}\mathbb{E}^{Q^\eta}_{y,t}\exp\left(\int_t^T -\frac{\bar{\rho}^2}{2}\big(\eta_{1s}+\lambda(Y_s)\big)^2 ds + \bar{\rho}^2\gamma\beta(Y_T)\right),$$

gdzie

$$dY_t = \big(g(Y_t) - \rho\lambda(Y_t)a(Y_t)\big)dt + a(Y_t)\big(\rho dW_t^1 + \bar{\rho}dW_t^2\big)$$

i

$$\frac{dQ^\eta}{dP} = \mathcal{E}\left(\int \eta_{2t}dW_t^2\right)_T.$$

W szczególności α jest ściśle dodatnie i odgraniczone jednostajnie od zera.

Szkic dowodu. Dowód przeprowadzany jest tak jak dla standardowego twierdzenia weryfikacyjnego.
Ustalmy $(y,t)\in\mathbb{R}\times[0,T)$. Wybierzmy dowolne $\eta\in\mathcal{M}$ i zastosujmy wzór Itô uzyskując dynamikę dla procesu

$$\exp\left(\int_t^s -\frac{\bar{\rho}^2}{2}(\eta_{1s}+\lambda(Y_s))^2 ds\right)\alpha(Y_s,s), \qquad t\le s\le T.$$

Powtarzamy poszczególne kroki dowodu twierdzenia weryfikacyjnego 1.3.2. Otrzymujemy nierówność

$$\alpha(y,t) \ge \mathbb{E}^{Q^\eta}_{y,t}\exp\left(\int_t^T -\frac{\bar{\rho}^2}{2}\big(\eta_{1s}+\lambda(Y_s)\big)^2 + \bar{\rho}^2\gamma\beta(Y_s)ds\right).$$

Przy czym równość zachodzi, gdy za η podstawimy borelowsko mierzalne sterowanie Markowa $\eta^*(y,t)$, dla którego osiągnięte jest maksimum w równaniu (3.5). $\square$

Przypadek II ($\rho^2 = 1$)
W tym przypadku stosujemy transformację:

$$F(y,t) = e^{\alpha(y,t)}.$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned}\alpha_t + \frac{1}{2}a^2\alpha_{yy} + \Big(g(y) - \rho\lambda(y)a(y)\Big)\alpha_y \\ + \max_{(\eta_1,\eta_2)\in\Gamma}\Big(-\frac{1}{2}\big(\lambda(y)+\eta_1\big)^2 + \bar\rho\eta_2 a(y)\alpha_y\Big) = 0,\end{aligned}$$

z warunkiem

$$\alpha(y,T) = \gamma\beta(y).$$

Mamy również:

Stwierdzenie 3.1.2. *Jeżeli funkcje λ oraz β są ciągłe i ograniczona, g, a, $a\cdot\lambda$ spełniają warunek Lipschitza i α jest ograniczonym rozwiązaniem równania* (3.6)*, to*

$$\alpha(y,t) = \max_{\eta\in\mathcal{M}} \mathbb{E}^{Q^\eta}_{y,t}\bigg(\int_t^T -\frac{1}{2}(\eta_1 + \lambda(Y_s))^2 ds + \gamma\beta(Y_T)\bigg),$$

gdzie

$$dY_t = \big(g(Y_t) - \rho\lambda(Y_t)a(Y_t)\big)dt + a(Y_t)\big(\rho dW_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}dW_t^2\big)$$

i

$$\frac{dQ^\eta}{dP} = \mathcal{E}\bigg(\int \eta_{2t} dW_t^2\bigg)_T.$$

3.1.2. Twierdzenie i jego dowód.

Twierdzenie 3.1.3. *Jeśli funkcje β, g, a, $a\cdot\lambda$ spełniają warunek Lipschitza i są ograniczone, λ jest ciągła i ograniczona, $a(y) > \varepsilon > 0$, to istnieje F nieujemne rozwiązanie równania*

$$\begin{aligned}F_t + \frac{1}{2}a^2(y)F_{yy} - \frac{1}{2}\rho^2a^2(y)\frac{F_y^2}{F} + \Big(g(y) - \rho\lambda(y)a(y)\Big)F_y \\ + \max_{(\eta_1,\eta_2)\in\Gamma}\Big(\bar\rho\eta_2 a(y)F_y - \frac{1}{2}\big(\lambda(y)+\eta_1\big)^2 F\Big) = 0,\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$F(y,T) = \exp(\gamma\beta(y)), \tag{3.7}$$

ograniczone wraz z pochodną F_y oraz odgraniczone jednostajnie od zera. Ponadto

$$\sup_{\pi\in\mathcal{A}_t^3}\inf_{Q\in\mathcal{Q}} J^{\pi,Q}(x,y,t) = \inf_{Q\in\mathcal{Q}}\sup_{\pi\in\mathcal{A}_t^3} J^{\pi,Q}(x,y,t) = -e^{-\gamma x}F(y,t),$$

oraz istnieje optymalna para sterowań $(\pi^*(y,t), \eta^*(y,t))$ taka, że borelowsko mierzalna funkcja η^* osiąga maksimum w (3.6) *i optymalna strategia inwestora dana jest przez*

$$\pi^*(x,y,t) = \frac{\rho a(y)}{\gamma\sigma(y)}\frac{F_y}{F} + \frac{\lambda(y) + \eta_1^*(y,t)}{\gamma\sigma(y)}.$$

Dowód. Wystarczy wykazać trzy warunki **A1**, **A2**, **A3'** podane w stwierdzeniu 1.3.8.

A1) Istnienie rozwiązania równania (3.6) wynika z twierdzenia 5.2.1.

A2) Istnienie borelowso mierzalnej funkcji η^*, dla której osiągnięte jest maksimum w (3.6) wynika z twierdzenia 1.1.15. Dopuszczalność startegii inwestora $\pi^*(x,y,t)$ wynika z faktu, że funkcje $\pi^* b$, $\pi^*\sigma$ są ograniczone. Proces $Z_t = e^{-\gamma X_t^{\pi^*}}$ spełnia równanie

$$\begin{aligned} dZ_t =& \big(-\gamma\pi^*(Y_t,t)b(Y_t) + \frac{1}{2}\gamma^2(\pi^*(Y_t,t)\sigma(Y_t))^2\big)Z_t dt \\ &- \gamma\pi^*(Y_t,t)\sigma(Y_t)Z_t dW_t^1. \end{aligned}$$

Stosując lemat 1.1.14 otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^Q_{x,y,t}\left(\sup_{t\le s\le T}|V(X_s^{\pi^*},Y_s,s)|\right) = \mathbb{E}^Q_{x,y,t}\left(\sup_{t\le s\le T}|e^{-\gamma X_s^{\pi^*}}\big(\alpha(Y_s,s)\big)^\delta|\right) \\ &\le \left(\mathbb{E}\left(\frac{dQ}{dP}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}_{x,y,t}\sup_{t\le s\le T}|e^{-\gamma X_s^{\pi^*}}F(Y_s,s)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \end{aligned}$$

dla dowolnej miary $Q \in \mathcal{Q}$.

A3') Jeśli $\pi \in \mathcal{A}_s^3$ to z definicji dla każdej miary $Q \in \mathcal{Q}$ spełniony jest warunek

$$\mathbb{E}^Q_{x,y,t}\left(\sup_{t\le s\le T} e^{-\gamma X_s^\pi}\right) < \infty,$$

ale $V(x,y,t) = -e^{-\gamma x}F(y,t)$, gdzie F jest funkcją ograniczoną, stąd

$$\mathbb{E}^Q_{x,y,t}\left(\sup_{t\le s\le T}|V(X_s^\pi,Y_s,s)|\right) < \infty.$$

□

Uwaga 3.1.4. *Gdy $\rho^2 \neq 1$, to zamiast ograniczoności funkcji β wystarczy założyć jej ograniczoność z góry. Wtedy twierdzenie będzie obejmowało między innymi opcje o funkcjach wypłaty $\beta(y) = -(y-K)^+$, $\beta(y) = (K-y)^+$, $\beta(y) = -(K-y)^+$.*

3.2. Strategie odporne w modelu Markowitza

3.2.1. Sformułowanie zagadnienia. Niech A będzie ustaloną liczbą rzeczywistą. Klasyczny problem optymalizacyjny zaproponwany przez Markowitza [**21**] polega na znalezieniu strategii inwestycyjnej π^* takiej, że

$$Var_{x,y,0}(X_T^{\pi^*}) \le Var_{x,y,0}(X_T^\pi)$$

dla dowolnej startegii π, dla której $\mathbb{E}(X_T^\pi) = A$. W pierwotnej wersji była to optymalizacja statyczna jednookresowa. Problem został rozszerzony do zagadnienia dynamicznego i rozwiązany w różnych postaciach (Yong i Zhou [**44**], Bielecki i wsp. [**2**]). W analogii do metody zaproponowanej przez Markowitza rozważać będziemy analogiczny problem uwzględniający ryzyko modelu. Celem inwestora jest odnalezienie takiej pary (π^*, Q^*), dla której

$$Var^{Q^*}_{x,y,0}(X_T^{\pi^*}) \le Var^{Q^*}_{x,y,0}(X_T^\pi) \tag{3.8}$$

dla każdej strategii π takiej, że $\mathbb{E}^{Q^*}(X_T^\pi) = A$ oraz

$$Var^{Q}_{x,y,0}(X_T^{\pi^*}) \le Var^{Q^*}_{x,y,0}(X_T^{\pi^*}) \tag{3.9}$$

dla każdej miary Q takiej, że $\mathbb{E}^Q(X_T^{\pi^*}) = A$.

W literaturze pojawiały się rozwiązania problemów opartych o średnią i wariancję uwzględniające również niedokładność modelu. Należy tu wymienić prace Goldfarb i Iyengar [**13**] oraz Tütüncu i Koenig [**37**]. Jednakże obie dotyczyły optymalizacji statycznej, jednookresowej. My natomiast rozważamy sytuację dynamiczną, gdy możemy dokonywać obrotu giełdowego w każdej chwili. Problem ten rozwiązujemy metodą mnożników Lagrange'a. Metoda ta została zaproponowana dla problemu klasycznego w cytowanej już pracy Yong i Zhou [**44**]. Zdefiniujmy

$$J_\theta^{\pi,Q}(x,y,t) := \mathbb{E}_{x,y,t}^Q(X_T^\pi - A)^2 - \theta(E(X_T^\pi) - A).$$

Należy znaleźć taki punkt siodłowy $\big(\pi^*(\theta), Q^*(\theta)\big)$, aby

$$J_\theta^{\pi^*,Q}(x,y,t) \le J_\theta^{\pi^*,Q^*}(x,y,t) \le J_\theta^{\pi,Q^*}(x,y,t).$$

Stwierdzenie 3.2.1. *Niech* $\big(\pi^*(x,y,0,\theta), Q^*(x,y,0,\theta)\big)$ *oznacza punkt siodłowy dla* $J_\theta^{\pi,Q}(x,y,0)$*. Jeżeli istnieje* $\theta^* \in \mathbb{R}$ *taka, że*

$$\mathbb{E}_{x,y,0}^{Q^*(x,y,0,\theta^*)}(X_T^{\pi^*(x,y,0,\theta^*)}) = A,$$

to para $(Q^*(x,y,0,\theta^*), \pi^*(x,y,0,\theta^*))$ *jest rozwiązaniem problemu* (3.8) — (3.9).

Jeśli $D := A - \frac{\theta}{2}$, to mamy

$$J_\theta^{\pi,Q}(x,y,t) = \mathbb{E}_{x,y,t}^Q(X_T^\pi - A)^2 - \theta(E(X_T^\pi) - A) = \mathbb{E}_{x,y,t}^Q(X_T^\pi - D)^2 - D^2 + A^2 + \theta A.$$

Zatem bez straty dla ogólności można przyjąć, że

$$J_D^{\pi,Q}(x,y,t) = \mathbb{E}_{x,y,t}^Q(X_T^\pi - D)^2.$$

3.2.2. Równanie HJB i jego transformacja.

Należy rozwiązać równanie

$$V_t + \frac{1}{2}a^2(y)V_{yy} - \frac{1}{2}a^2(y)\rho^2\frac{V_{xy}^2}{V_{xx}} + g(y)V_y + \max_{\eta\in\Gamma}\Bigg(a(y)\rho\eta_1V_y + a(y)\bar{\rho}\eta_2V_y$$
$$- a(y)\rho\big(\lambda(y) + \eta_1\big)\frac{V_{xy}V_x}{V_{xx}} - \frac{1}{2}\big(\lambda(y) + \eta_1\big)^2\frac{V_x^2}{V_{xx}}\Bigg) = 0,$$

z warunkiem końcowym

$$V(x,y,T) = (x-D)^2.$$

Tym razem poszukujemy rozwiązań postaci

$$V(x,y,t) = (x-D)^2F(y,t).$$

Otrzymujemy

$$F_t + \frac{1}{2}a^2(y)F_{yy} - \rho^2a^2(y)\frac{F_y^2}{F} + \big(g(y) - 2\rho a(y)\lambda(y)\big)F_y$$
$$+ \max_{\eta\in\Gamma}\Bigg(-a(y)\rho\eta_1\rho F_y + a(y)\bar{\rho}\eta_2F_y - \big(\eta_1 + \lambda(y)\big)^2F\Bigg) = 0.$$

Według wiedzy autora powyższe równanie nie było znane w literaturze nawet, gdy rozpatrywano klasyczny problem Markowitza. Analogicznie jak w poprzednich rozdziałach składnik nieliniowy $\rho^2 a^2(y)\dfrac{F_y^2}{F}$ usuwamy wprowadzając odpowiednią transformację. Należy rozważyć trzy przypadki.

Przypadek pierwszy: $\rho^2 < \frac{1}{2}$.

W takiej sytuacji podstawiamy

$$F(y,t) = \Big(\alpha(y,t)\Big)^{\delta}, \qquad \delta = \frac{1}{1-2\rho^2}.$$

Równanie redukuje się do

$$\begin{aligned}\alpha_t + \frac{1}{2}a^2(y)\alpha_{yy} + \big(g(y) - 2\rho a(y)\lambda(y)\big)\alpha_y \\ + \max_{\eta\in\Gamma}\Big(-\eta_1\rho a(y)\alpha_y + \bar{\rho}a(y)\eta_2\alpha_y - (1-2\rho^2)\big(\eta_1+\lambda(y)\big)^2\alpha\Big) = 0.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Dla powyższego równania mamy również reprezentację stochastyczną.

Stwierdzenie 3.2.2. *Jeżeli α jest ograniczonym rozwiązaniem równania* (3.10)*, λ jest ciągła i ograniczona, a g i $a\cdot\lambda$ spełniają warunek Lipschitza, to*

$$\alpha(y,t) = \max_{\eta\in\mathcal{M}} \mathbb{E}^{Q^\eta}_{y,t}\exp\bigg(\int_t^T -(1-2\rho^2)\big(\eta_1+\lambda(Y_s)\big)^2 ds\bigg),$$

gdzie

$$dY_t = g(Y_t)dt - 2\rho a(Y_t)\lambda(Y_t)dt + a(Y_t)(\rho dW_t^1 + \bar{\rho}dW_t^2)$$

i

$$\frac{dQ^\eta}{dP} = \mathcal{E}\bigg(\int(-\eta_{1t})dW_t^1 + \eta_{2t}dW_t^2\bigg)_T.$$

Przypadek drugi: $\rho^2 > \frac{1}{2}$

W równaniu (3.10) (max) należy zamienić na (min).

Przypadek trzeci: $\rho^2 = \frac{1}{2}$

Tym razem dopowiednią transformacją będzie transformacja

$$F(y,t) = e^{\alpha(y,t)}.$$

i równanie przyjmuje postać

$$\begin{aligned}\alpha_t + \frac{1}{2}a^2(y)\alpha_{yy} + \big(g(y) - 2\rho a(y)\lambda(y)\big)\alpha_y \\ + \max_{\eta\in\Gamma}\Big(-\eta_1\rho a(y)\alpha_y + \bar{\rho}\eta_2 a(y)\alpha_y - \big(\eta_1+\lambda(y)\big)^2\Big) = 0.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Stwierdzenie 3.2.3. *Jeżeli α jest ograniczonym rozwiązaniem równania* (3.11)*, λ ciągła i ograniczona, a, g oraz $a\cdot\lambda$ spełniają warunek Lipschitza, to*

$$\alpha(y,t) = \max_{\eta\in\mathcal{M}} \mathbb{E}^{Q^\eta}_{y,t}\bigg(-\int_t^T \big(\eta_{1s}+\lambda(Y_s)\big)^2 ds\bigg),$$

gdzie

$$dY_t = g(Y_t)dt - 2\rho a Y_t\lambda(Y_t)dt + a(Y_t)\big(\rho dW_t^1 + \bar{\rho}dW_t^2\big)$$

i

$$\frac{dQ^\eta}{dP} = \mathcal{E}\bigg(\int -\eta_{1t} dW^1_t + \eta_{2t} dW^2_t\bigg)_T.$$

3.2.3. Rozwiązanie problemu Markowitza.

Twierdzenie 3.2.4. *Jeśli funkcja λ jest ciągła i ograniczona, g, a, $a\cdot\lambda$ są ograniczone i spełniają warunek Lipschitza, $a(y) > \varepsilon > 0$, to istnieje F ograniczone wraz z pochodną F_y oraz odgraniczone jednostajnie od zera rozwiązanie równania*

$$\begin{aligned} F_t + \frac{1}{2}a^2(y)F_{yy} - \rho^2 a^2(y)\frac{F_y^2}{F} + (g(y) - 2\rho a(y)\lambda(y))F_y \\ + \max_{\eta\in\Gamma}\bigg(-\eta_1\rho a(y)F_y + \bar{\rho}a(y)\eta_2 F_y - (\eta_1 + \lambda(y))^2 F\bigg) = 0, \end{aligned} \tag{3.12}$$

z warunkiem końcowym

$$F(y, T) = 1.$$

Ponadto

$$\inf_{\pi\in\mathcal{A}^3_t}\sup_{Q\in\mathcal{Q}} J^{\pi,Q}(x, y, t) = \sup_{Q\in\mathcal{Q}}\inf_{\pi\in\mathcal{A}^3_t} J^{\pi,Q}(x, y, t) = (x - D)^2 F(y, t)$$

oraz istnieje optymalna para sterowań $(\pi^*(y, t), \eta^*(y, t))$ taka, że borelowsko mierzalna funkcja η^* osiąga maksimum w (3.12) i strategia inwestora dana jest przez

$$\pi^*(x, y, t) = -\frac{\rho a(y)(x - D)}{\sigma(y)}\frac{F_y}{F} - \frac{(\lambda(y) + \eta^*_1(y, t))(x - D)}{\sigma(y)}. \tag{3.13}$$

.

Dowód. Dowód przebiega analogicznie do dowodów twierdzeń dla funkcji HARA oraz CARA. Sprawdzamy trzy warunki **A1** – **A3’** podane w stwierdzeniu 1.3.8.

A1) Istnienie nieujemnego i ograniczonego rozwiązania równania (3.12) wynika z twierdzenia 5.2.1.

A2) Istnienie borelowsko mierzalnej funkcji $\eta^*(y, t)$, dla której maksimum w (3.6) jest osiągnięte, wynika z twierdzenia mmm. Jeśli

$$\zeta(y) := -\frac{\rho a(y)}{\sigma(y)}\frac{F_y}{F} - \frac{(\lambda(y) + \eta^*_1(y, t))}{\sigma(y)}, \tag{3.14}$$

to funkcje ζb oraz $\zeta\sigma$ są ograniczone. Istnieje zatem X - jednoznaczne rozwiązanie równania

$$dX_t = \zeta(Y_t)b(Y_t)(X_t - D)dt + \zeta(Y_t)\sigma(Y_t)(X_t - D)dW^1_t$$

takie, że $\mathbb{E}_{x,y,t}(X_T)^2 < \infty$. Niech $Z_t = (X_t - D)^4$. Ze wzoru Itô wynika, że Z spełnia równanie

$$dZ_t = \big(4\zeta(Y_t)b(Y_t) + 6\zeta^2(Y_t)\sigma^2(Y_t)\big)Z_t dt + 4\zeta(Y_t)\sigma(Y_t)Z_t dW^1_t.$$

Ze stwierdzenia 1.1.14 wynika, że dla dowolnej miary $\mathcal{Q} \in Q$

$$\mathbb{E}^{Q}_{x,y,t}\bigg(\sup_{t\le s\le T}|U(X^{\pi}_s)|\bigg) = \mathbb{E}^{Q}_{x,y,t}\bigg(\sup_{t\le s\le T}|(X^{\pi^*}_s - D)^2|\bigg)$$

$$\le \bigg(\mathbb{E}\Big(\frac{dQ}{dP}\Big)^2\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg(\mathbb{E}_{x,y,t}\sup_{t\le s\le T}|(X^{\pi^*}_s - D)^2|^2\bigg)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

A3') Jeśli $\pi \in \mathcal{A}^3_t$ to z definicji dla każdej miary $Q \in \mathcal{Q}$ spełniony jest warunek

$$\mathbb{E}^{Q}_{x,y,t}\bigg(\sup_{t\le s\le T}|X^{\pi}_s - D|^2\bigg) < \infty.$$

Ale $V(x,y,t) = (x-D)^2F(y,t)$, gdzie F jest funkcją ograniczoną. Stąd

$$\mathbb{E}^{Q}_{x,y,t}\bigg(\sup_{t\le s\le T}|V(X^{\pi}_s, Y_s, s)|\bigg) < \infty.$$

$\square$

Dotychczas został rozwiązany wyłącznie problem Lagrange'a. Dla $D \in \mathbb{R}$ została odnaleziona optymalna para $(\pi^*(D), Q^*)$. Ponadto miara Q^* nie zależy ani od początkowego poziomu kapitału x ani od wartości D. Aby zastosować stwierdzenie 3.2.1 należy wykazać, że istnieje takie D^*, dla którego

$$\mathbb{E}^{Q^*(D^*)}_{x,y,0}(X^{\pi^*(D^*)}_T) = A.$$

Wiadomo, że optymalna strategia inwestora dana jest przez

$$\pi^*(x,y,t) = -\frac{\rho a(y)(x-D)}{\sigma(y)}\frac{F_y}{F} - \frac{(\lambda(y)+\eta^*_1(y,t))(x-D)}{\sigma(y)}.$$

Niech

$$\zeta(y,t) := -\frac{\rho a(y)}{\sigma(y)}\frac{F_y}{F} - \frac{(\lambda(y)+\eta^*_1(y,t))}{\sigma(y)}.$$

Wtedy $X^{\pi^*(D)}_t$ spełnia równanie

$$\begin{aligned} dX_t =&(X_t - D)\zeta(Y_t,t)(b(Y_t) + \eta^*_1(Y_t,t)\sigma(Y_t))dt \\ &+ (X_t - D)\zeta(Y_t,t)\sigma(Y_t)dW^{\eta 1}_t. \end{aligned}$$

Oznaczmy

$$\begin{aligned} \phi(Y) := \exp\bigg(&\int_0^T \zeta(Y_s)(b(Y_s) + \eta^*_1(Y_s,s)\sigma(Y_s))ds \\ &- \frac{1}{2}\int_0^T \zeta^2(Y_s,s)\sigma^2(Y_s)ds + \int_0^T \zeta(Y_s,s)\sigma(Y_s)dW^{\eta^* 1}_s\bigg). \end{aligned}$$

Możemy zapisać

$$X_T = D + (x-D)\phi(Y).$$

Mamy zatem

$$\mathbb{E}^{Q^*}_{x,y,0}(X^{\pi^*}_T) = D + (x-D)\mathbb{E}^{Q^*}_{y,0}\phi(Y), \tag{3.15}$$

czyli

$$D^* = \frac{A - x\mathbb{E}^{Q^*}_{y,0}\phi(Y)}{1 - \mathbb{E}^{Q^*}_{y,0}\phi(Y)}, \quad \text{gdy } \mathbb{E}^{Q^*}_{y,0}\phi(Y) \neq 1.$$

Uwaga 3.2.5. *Należy zaznaczyć, że jeśli* $\mathbb{E}_{y,0}^{Q^*}\phi(Y) = 1$*, to równanie* (3.15) *posiada rozwiązanie wyłącznie jeśli* $x_0 = A$*. Pozostaje zatem pytanie czy dla* $x_0 \neq A$ *odporny problem Markowitza ma rozwiązanie. Wydaje się jednak, że teoria równań HJB nie jest dobrym narzędziem do rozwikłania tego problemu.*

Przedstawiony rezultat opatrzony został prostym przykładem.

Przykład 3.2.6 (Model Blacka– Scholesa).

$$\begin{cases} dS_t = bS_t dt + \sigma S_t dW_t, \\ \Gamma = [-R, R], \\ \lambda > R. \end{cases}$$

Model ten związany jest z równaniem

$$\alpha_t + \min_{\eta \in \Gamma}\Big((\eta_1 + \lambda)^2 \alpha \Big) = 0.$$

Wtedy

$$\pi^*(x,t) = \frac{(\lambda - R)(x - D^*)}{\sigma}, \quad D^* = \frac{A - x_0 e^{-\frac{(\lambda-R)^2 T}{\sigma^2}}}{1 - e^{-\frac{(\lambda-R)^2 T}{\sigma^2}}}, \quad \eta^* = -R,$$

gdzie x_0 oznacza kapitał początkowy inwestora.

ROZDZIAŁ 4

Problem inwestycyjny z nieskończonym horyzontem czasowym

4.1. Sformułowanie problemu i twierdzenia weryfikacyjne

W poprzednich rozdziałach rozwiązywane były problemy ze skończonym horyzontem inwestycyjnym. Tym razem rozważamy funkcję wartości postaci

$$J^{\pi,c,\eta}(x,y) := \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}^{Q_t^\eta}_{x,y,t} \int_0^t e^{-ws} U(c_s X_s^{\pi,c}) ds,$$

gdzie U jest funkcją nieujemną i

$$\frac{dQ_t^\eta}{dP} = \mathcal{E}\left(\int \eta_{1s} dW_s^1 + \eta_{2s} dW_s^2\right)_t, \qquad (\eta_1,\eta_2) \in \mathcal{M}.$$

Dla ustalonego punktu $(x,y) \in \mathrm{Dom(U)} \times \mathbb{R}$ funkcja

$$h(t) := \mathbb{E}^{Q_t^\eta}_{x,y,t} \int_0^t e^{-ws} U(c_s X_s^{\pi,c}) ds$$

jest rosnąca i ciagła, zatem $J^{\pi,c,\eta}(x,y)$ jest dobrze zdefiniowana. W tym przypadku również poszukiwany jest punkt siodłowy $\big((\pi^*,c^*),\eta^*\big)$. Definicja rodziny strategii dopuszczalnych, $\mathcal{A}(x,y)$, analogiczna jak dla skończonego horyzontu czasowego. Dla uproszczenia notacji traktujemy współczynniki b oraz σ jako skalary. Wyniki przenoszą się w naturalny sposób na przypadek, gdy σ jest kwadratową macierzą odwracalną.

Modyfikacje postawionego problem były rozważane w pracy Hansen i wsp. [**15**]. Jednak praca ta analizuje problem z ekonomicznego punktu widzenia i nie są przeprowadzane dowody twierdzenia weryfikacyjnego ani twierdzenia o istnieniu rozwiązania odpowiedniego równania HJBI. Jeżeli chodzi o klasyczne problemy inwestycyjne (nie uwzględniające ryzyka modelu) to rozdział ten najbliżej związany jest z pracą Hernandeza i Fleminga [**17**]. Do rozwiązania postawionego zagadnienia wykorzystany zostanie oparator

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\pi,c,\eta}V(x,y) = {} & \frac{1}{2}a^2(y)V_{yy} + \frac{1}{2}\pi^2\sigma^2(y)x^2V_{xx} \\ & + \rho\pi\sigma(y)a(y)xV_{xy} + a(y)\big(\rho\eta_1 + \bar{\rho}\eta_2\big)V_y \\ & + g(y)V_y + \pi\big(b(y) - r(y) + \eta_1\sigma(y)\big)xV_x + r(y)xV_x - cxV_x.\end{aligned}$$

Problem zostanie związany z równaniem

$$\min_{\eta\in\Gamma}\max_{\pi\in\mathbb{R}}\max_{c>0}(\mathcal{L}^{\pi,c,\eta}V(x,y) - wV(x,y) + U(cx)) = 0,$$

przez następujące twierdzenie weryfikacyjne:

Twierdzenie 4.1.1. *Niech będzie dana nieujemna funkcja $V \in C^2(\mathrm{Dom}(U)\times\mathbb{R})$ i dopuszczalne sterowania Markowa $\big((\pi^*(x,y), c^*(x,y)), \eta^*(x,y)\big)$ takie, że*

$$\mathcal{L}^{\pi^*(x,y),c^*(x,y),\eta}V(x,y)+U(xc^*(x,y))-wV(x,y)\geqslant 0, \tag{4.1}$$

$$\mathcal{L}^{\pi,c,\eta^*(x,y)}V(x,y)+U(cx)-wV(x,y)\leqslant 0, \tag{4.2}$$

$$\mathcal{L}^{\pi^*(x,y),c^*(x,y),\eta^*(x,y)}V(x,y)+U(xc^*(x,y))-wV(x,y)=0 \tag{4.3}$$

dla dowolnych $\eta\in\Gamma$, $(\pi,c)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty)$, $(x,y)\in\mathrm{Dom}(U)\times\mathbb{R}$. *Niech ponadto dla dowolnych* $(x,y)\in\mathrm{Dom}(U)\times\mathbb{R}$, $\eta\in\mathcal{M}$ *istnieje ciąg* $\{t_k,\ k=1,2,3,\ldots\}$, $\lim_{k\to+\infty}t_k=+\infty$ *taki, że*

$$\begin{aligned}&\lim_{t_k\to+\infty}\mathbb{E}_{x,y}^{Q_{t_k}^\eta}\left(e^{-wt_k}V(X_{t_k}^{\pi^*,c^*},Y_{t_k})\right)=0,\\ &\mathbb{E}_{x,y}^{Q_{t_k}^\eta}\left(\sup_{0\le s\le t_k}|V(X_s^{\pi^*,c^*},Y_s)|\right)<\infty.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Wtedy

$$J^{\pi,c,\eta^*}(x,y)\leqslant V(x,y)\leqslant J^{\pi^*,c^*,\eta}(x,y)$$

dla $(\pi,c)\in\mathcal{A}$, $\eta\in\mathcal{M}$, *i*

$$V(x,y)=J^{\pi^*,c^*,\eta^*}(x,y).$$

Dowód. Ustalmy $(x,y)\in\mathrm{Dom}(U)\times\mathbb{R}$. Wybierzmy dowolne $\eta\in\mathcal{M}$ i rozważmy układ równań różniczkowych

$$\begin{cases}dX_t=&r(Y_t)X_tdt+\pi^*(X_t,Y_t)\big(b(Y_t)-r(Y_t)\big)X_tdt\\ &+\pi^*(X_t,Y_t)X_t\sigma(Y_t)dW_t^1-c^*(X_t,Y_t)X_tdt,\\ dY_t=&g(Y_t)dt+a(Y_t)\big(\rho dW_t^1+\bar\rho dW_t^2\big).\end{cases} \tag{4.5}$$

Zapiszmy Q^η-dynamikę układu (4.5). Stosując transformację Girsanova 1.1.8 mamy

$$\begin{cases}dX_t=&r(Y_t)X_tdt\pi_t^*\big(b(Y_t)-r(Y_t)X_tdt+\eta_{1t}\sigma(Y_t)\big)X_tdt\\ &+\pi_t^*\sigma(Y_t)X_tdW_t^{1\eta}-c_t^*X_tdt,\\ dY_t=&\big(g(Y_t)+a(Y_t)(\eta_{1t}\rho+\eta_{2t}\bar\rho)\big)dt+a(Y_t)(\rho dW_t^{\eta1}+\bar\rho dW_t^{\eta2}),\end{cases} \tag{4.6}$$

gdzie $\pi_t^*=\pi^*(X_t,Y_t)$, $c_t^*=c^*(X_t,Y_t)$ i $(W_s^{\eta1},\ W_s^{\eta2})$ jest Q^η - procesem Wienera danym przez

$$\begin{cases}dW_t^{\eta1}=dW_t^1-\eta_{1t}dt,\\ dW_t^{\eta2}=dW_t^2-\eta_{2t}dt.\end{cases}$$

Jeśli zastosujemy wzór Itô do procesu (4.6) i funkcji $e^{-wt}V$, to otrzymamy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{x,y}^{Q_t^\eta}\big(V(X_{t\wedge T_n},Y_{t\wedge T_n})\big)=V(x,y)&+\mathbb{E}_{x,y}^{Q_t^\eta}\int_0^{t\wedge T_n}e^{-ws}(\mathcal{L}^{\pi_s^*,\eta_s}V(X_s,Y_s)-wV(X_s,Y_s))ds\\ &+\mathbb{E}_{x,y}^{Q_t^\eta}\int_0^{t\wedge T_n}M_sdW_s^\eta,\end{aligned}$$

gdzie $(T_n,n=1,2,\ldots)$, $(T_n\nearrow+\infty)$ jest lokalizującym ciągiem momentów stopu takim, że

$$\mathbb{E}_{x,y}^{Q_t^\eta}\int_0^{t\wedge T_n}M_sdW_s^\eta=0.$$

Wykorzystując (4.1) mamy

$$\mathbb{E}_{x,y}^{Q_{t_k}^{\eta}}\big(e^{-w(t_k\wedge T_n)}V(X_{t_k\wedge T_n},Y_{t_k\wedge T_n})\big) \geqslant V(x,y) - \mathbb{E}_{x,y}^{Q_{t_k}^{\eta}}\int_0^{t_k\wedge T_n} e^{-ws}U(c_s^*X_s)ds.$$

Przechodząc do granicy ($n\to\infty$) i ($t_k\to+\infty$) i korzystając z (4.4) otrzymujemy

$$V(x,y)\leqslant J^{\pi^*,c^*,\eta}(x,y).$$

Jeśli zastąpimy η przez η^* i użyjemy (4.3), to

$$V(x,y)=J^{\pi^*,c^*,\eta^*}(x,y).$$

Następnie wybieramy dowolne $(\pi,c)\in\mathcal{A}$ i stosujemy wzór Itô do układu

$$\begin{cases} dX_t = r(Y_t)X_tdt + \pi_t\big(b(Y_t)-r(Y_t)+\eta_{1t}^*\sigma(Y_t)\big)X_tdt + \pi_t\sigma(Y_t)X_tdW_t^{\eta^*1} - c_tX_tdt,\\ dY_t = \big(g(Y_t)+a(Y_t)\big(\eta_{1t}^*\rho+\eta_{2t}^*\bar\rho\big)\big)dt + a(Y_t)\big(\rho dW_t^{\eta^*1}+\bar\rho dW_t^{\eta^*2}\big).\end{cases}$$

Powtarzając metodę zaprezentowaną powyżej i używając (4.2) dostajemy

$$\mathbb{E}_{x,y}^{Q_t^{\eta^*}}\big(e^{-w(t\wedge T_n)}V(X_{t\wedge T_n}^{\pi,c},Y_{t\wedge T_n})\big) \leq V(x,y) - \mathbb{E}_{x,y}^{Q_t^{\eta^*}}\int_0^{t\wedge T_n} e^{-ws}U(c_sX_s^{\pi,c}).$$

Ponieważ V jest nieujemne, to

$$V(x,y)\geqslant J^{\pi,c,\eta^*}(x,y).$$

□

Z rezultatów przedstawionych w rozdziale pierwszym wynika, że prawdziwy jest też analogon stwierdzenia 1.3.8

Stwierdzenie 4.1.2. *Niech spełnione będą jednocześnie następujące trzy warunki:*

B1) *Istnieje nieujemne rozwiązanie klasyczne równania*

$$\min_{\eta\in\Gamma}\max_{\pi\in\mathbb{R}}\mathcal{L}^{\pi,\eta}V(x,y,t)+\max_{c>0}\big(U(cx)-cxV_x\big)-wV(x,y)=0$$

takie, że $V_{xx}<0$.

B2) *Sterowanie Markowa* $(\pi^*(x,y),c^*(x,y))$ *dane przez*

$$\pi^*(x,y) = -\frac{\rho a(y)}{\sigma(y)}\frac{V_{xy}}{V_{xx}} - \frac{b(y)+\eta_1^*(x,y,t)\sigma(y)}{\sigma^2(y)}\frac{V_x}{V_{xx}},$$
$$c^*(x,y)\in\arg\max_{c>0}(U(cx)-cxV_x)$$

jest strategią dopuszczalną.

B3) *Dla dowolnych* $(x,y)\in\mathrm{Dom}(U)\times\mathbb{R}$, $\eta\in\mathcal{M}$ *istnieje ciąg* $\{t_k,\ k=1,2,3,\ldots\}$, $\lim_{k\to+\infty}t_k=+\infty$ *taki, że*

$$\lim_{t_k\to+\infty}\mathbb{E}_{x,y}^{Q_{t_k}^{\eta}}\left(e^{-wt_k}V(X_{t_k}^{\pi^*,c^*},Y_{t_k})\right)=0$$

oraz

$$\mathbb{E}_{x,y}^{Q_{t_k}^{\eta}}\left(\sup_{0\leq s\leq t_k}|V(X_s^{\pi^*,c^*},Y_s)|\right)<\infty.$$

Wtedy

$$J^{\pi,c,\eta^*}(x,y) \leqslant V(x,y) \leqslant J^{\pi^*,c^*,\eta}(x,y)$$

dla dowolnych $(\pi, c) \in \mathcal{A}$, $\eta \in \mathcal{M}$ *oraz*

$$V(x,y) = J^{\pi^*,c^*,\eta^*}(x,y).$$

4.2. Rozwiązanie problemu dla użyteczności typu HARA

Okazuje się, że problem posiada rozwiązanie, jeśli preferencje inwestora dane są za pomocą funkcji HARA. Dla ustalenia uwagi przyjmiemy, że $\gamma \in (0,1)$. Wprowadzimy klasę strategii dopuszczalnych.

Definicja 4.2.1. *Strategia* $(\pi, c) = \{(\pi_t, c_t) \mid 0 \leqslant t < +\infty\}$ *jest dopuszczalna ,* $(\pi, c) \in \mathcal{A}$*, jeśli spełnia następujące warunki:*

(1) (π, c) *jest progresywnie mierzalny względem filtracji* $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t\geqslant 0}$,

(2) *dla dowolnego punktu startowego* $y \in \mathbb{R}$ *i dla dowolnego* $T \in (0, +\infty)$

$$P\biggl(\int_0^T |c_t|dt + \int_0^T |\pi_t\bigl(b(Y_t(y)) - r(Y_t)\bigr)|dt + \int_0^T \pi_t^2\sigma^2(Y_t(y))dt < \infty\biggr) = 1.$$

Równanie, które należy rozwiązać jest postaci

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}a^2(y)V_{yy} - \frac{1}{2}a^2(y)\rho^2\frac{V_{xy}^2}{V_{xx}} + \min_{\eta\in\Gamma}\biggl(a(y)\rho\eta_1 V_y + a(y)\bar{\rho}\eta_2 V_y \\
&\quad - a(y)\rho\bigl(\lambda(y)+\eta_1\bigr)\frac{V_{xy}V_x}{V_{xx}} - \frac{1}{2}\bigl(\lambda(y)+\eta_1\bigr)^2\frac{V_x^2}{V_{xx}}\biggr) + g(y)V_y + r(y)xV_x \\
&\quad + \max_{c\in I}\bigl(-cxV_x + U(cx)\bigr) - wV = 0.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Wykorzystując używaną już w niniejszej rozprawie transformację

$$V(x,y) = \frac{x^\gamma}{\gamma}(\alpha(y))^\delta, \qquad \delta = \frac{1-\gamma}{\gamma\rho^2 + 1 - \gamma}$$

sprowadzamy powyższe równanie do postaci

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}a^2(y)\alpha_{yy} + \biggl(g(y) + \frac{\gamma\rho}{1-\gamma}a(y)\lambda(y)\biggr)\alpha_y \\
&\quad + \min_{(\eta_1,\eta_2)\in\Gamma}\biggl(\bar{\rho}\eta_2 a(y)\alpha_y + \frac{\rho}{(1-\gamma)}a(y)\eta_1\alpha_y + \frac{\gamma}{2\delta(1-\gamma)}\bigl(\lambda(y)+\eta_1\bigr)^2\alpha\biggr) \\
&\quad + \biggl(\frac{\gamma}{\delta}r(y) - \frac{w}{\delta}\biggr)\alpha + \frac{1-\gamma}{\delta}\alpha^{1-\frac{\delta}{1-\gamma}} = 0.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Możemy sformułować odpowiednie twierdzenie. Ponieważ warunek **B3** jest dosyć krępujący, nie będzie to niestety rezultat tak mocny jak rezultaty dotyczące skończonego horyzontu inwestycyjnego.

Twierdzenie 4.2.2. *Jeśli funkcje* a, g, $a\cdot\lambda$, λ, r *oraz stałe* γ *i* ρ *spełniają założenia twierdzenia 5.3.4* [1]*, to istnieje dostatecznie duże* w*, dla którego istnieje* α *– ograniczone wraz z pochodną* α_y *i odgraniczone od zera rozwiązanie równania* (4.8)

[1] W przypadku stałych γ i ρ chodzi o to, aby $-1 < 1 - \dfrac{1}{1-\gamma+\gamma\rho^2} < 0$.

Niech ponadto sterowanie $(\pi^*(y), c^*(y), \eta^*(y))$ będzie takie, że borelowsko mierzalne η^* osiąga maksimum w (4.8) i strategia inwestora dana jest przez

$$\pi^*(x,y) = \frac{\rho\delta a(y)}{(1-\gamma)\sigma(y)}\frac{\alpha_y}{\alpha} + \frac{\lambda(y)+\eta_1^*(y)}{(1-\gamma)\sigma(y)},$$
$$c^* = \big(\alpha(y)\big)^{\frac{\delta}{\gamma-1}}.$$

Wtedy

$$J^{\pi,c,\eta^*}(x,y) \leqslant V(x,y) \leqslant J^{\pi^*,c^*,\eta}(x,y)$$

dla dowolnego $(\pi, c) \in \mathcal{A}$ oraz $\eta \in \mathcal{M}$ takiego, że

$$\lim_{t_k\to+\infty} \mathbb{E}_{x,y}^{Q_{t_k}^{\eta}}\left(e^{-wt_k}\big(X_{t_k}^{\pi^*,c^*}\big)^{\gamma}\right) = 0.$$

Dowód. Wykazujemy, że spełnione są wszystkie trzy warunki w stwierdzeniu 4.1.2.

B1) Istnienie rozwiązania równania (4.8) wynika z twierdzenia 5.3.4. Stąd istnieje klasyczne rozwiązanie równania (4.7) postaci $V(x,y) = \frac{x^\gamma}{\gamma}(\alpha(y))^\delta$

B2) Istnienie mierzalnej funkcji η^* dla której osiągnięte jest minimum w (4.8) wynika z twierdzenia o mierzalnym wyborze 1.1.15. Dopuszczalność strategi (π^*, c^*) wynika z faktu, że funkcje $\pi^*(b-r)$, $\pi^*\sigma$ oraz c^* są ograniczone.

B3) Po pierwsze, należy wykazać, że istnieje ciąg $\{t_k,\ k = 1,2,3,\ldots\}$, $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$ taki, że

$$\lim_{t_k\to+\infty} \mathbb{E}_{x,y}^{Q_{t_k}^{\eta^*}}\left(e^{-wt_k}V(X_{t_k}^{\pi^*,c^*}, Y_{t_k})\right) = 0. \tag{4.9}$$

Postać tezy tego twierdzenia gwarantuje, że powyższego warunku nie trzeba sprawdzać dla pozostałych miar Q^η Wiadomo, że proces X^{π^*} spełnia równanie

$$\begin{aligned} dX_t =& r(Y_t)X_t dt + \pi^*(X_t,Y_t)\big(b(Y_t) - r(Y_t)\big)X_t dt \\ &+ \pi^*(X_t,Y_t)X_t\sigma(Y_t)dW_t^1 - c^*(X_t,Y_t)X_t dt. \end{aligned}$$

Stosując wzór Ito do funkcji $e^{-wt}V$ i powtarzając kroki dowodu twierdzenia 4.1.1 otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x,y}^{Q_t^{\eta^*}}\big(e^{-wt}V(X_t,Y_t)\big) &= V(x,y) - \mathbb{E}_{x,y}^{Q_t^{\eta^*}}\int_0^t e^{-ws}U(c_s^*X_s)ds. \\ &= V(x,y) - \frac{1}{\gamma}\mathbb{E}_{x,y}^{Q_t^{\eta^*}}\int_0^t e^{-ws}(\alpha(Y_s))^{\frac{\delta}{\gamma-1}}X_s^\gamma ds. \end{aligned}$$

Ponieważ V jest funkcją nieujemną i α jest ograniczone to

$$V(x,y) \geq \varepsilon\mathbb{E}_{x,y}^{Q_t^*}\int_0^t e^{-ws}X_s^\gamma ds.$$

Stąd istnieje taki ciąg $\{t_k,\ k = 1,2,3,\ldots\}$, że

$$\lim_{t_k\to+\infty} \mathbb{E}_{x,y}^{Q^*}\left(e^{-wt_k}\big(X_{t_k}^{\pi^*,c^*}\big)^{\gamma}\right) = 0.$$

Ponieważ α jest ograniczone i odgraniczone jednostajnie od 0, to dostajemy (4.9).

Po drugie, dla dowolnego $t \in (0, +\infty)$ i $\eta \in \mathcal{M}$ warunek

$$\mathbb{E}_{x,y}^{Q_t^\eta}\Big(\sup_{0\le s\le t}|V(X_s^{\pi^*,c^*}, Y_s)|\Big) = \mathbb{E}_{x,y}^{Q_t^\eta}\Big(\sup_{0\le s\le t}\frac{1}{\gamma}|X_s^{\pi^*,c^*}|^\gamma\big((\alpha(Y_s)\big)^\delta\Big) < \infty$$

jest spełniony ponieważ funkcje $\pi^*(b-r)$, $\pi^*\sigma$, c^* oraz α są ograniczone.

□

Przykład 4.2.3. Dla klasycznego modelu Blacka Scholesa

$$\begin{cases} dB_t = rB_t dt, \\ dS_t = bS_t dt + \sigma S_t dW_t \end{cases}$$

należy rozwiązać równanie

$$\big(r + \frac{\gamma}{1-\gamma}K_R^2\big)F + (1-\gamma)F^{\frac{-\gamma}{1-\gamma}} - wF = 0,$$

gdzie

$$K_R = \begin{cases} \lambda - R & \text{jeżeli} \quad \lambda > R, \\ 0 & \text{jeżeli} \quad -R < \lambda < R, \\ \lambda + R & \text{jeżeli} \quad \lambda < -R. \end{cases}$$

Rozwiązanie równania ma sens wtedy, gdy

$$(r + \frac{\gamma}{1-\gamma}K_R^2) < w.$$

Wtedy

$$F = \left(\frac{(w - r - \frac{\gamma}{1-\gamma}K_R^2)}{1-\gamma}\right)^{\gamma-1},$$

natomiast

$$\pi^* = \frac{K_R}{(1-\gamma)\sigma}, \quad c^* = F^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad \eta^* = K_R - \lambda.$$

ROZDZIAŁ 5

Rozwiązania klasyczne wybranych nieliniowych równań cząstkowych

Dowody przedstawione w poprzednich rozdziałach korzystały niejednokrotnie z twierdzeń dotyczących istnienia i jednoznaczności wybranych nieliniowych równań cząstkowych. Dotychczas w literaturze poświęconej zagadnieniom odpornej optymalizacji portfela powoływano się na rezultaty, które wymagały aby współczynniki równania odpowiedniego równania dyfuzji były ograniczone wraz z pochodnymi do drugiego rzędu włącznie [(Fleming i Rischel [**8**], rozdział VI, twierdzenie 6.2) oraz (Fleming i Soner [**9**], rozdział IV twierdzenie 4.2)]. Tu pokazujemy, że wystarczy aby współczynniki były ograniczone oraz spełniały globalny warunek Lipschitza. Rozdział został podzielony na trzy części. W pierwszej przypomniane są rezultaty dotyczące równań parabolicznych, w tym wzór Feynmana-Kaca. W drugiej zajmujemy się równaniami parabolicznymi pojawiającymi się dla problemów inwestycyjnych ze skończonym horyzontem inwestycyjnym. Trzecia natomiast jest poświęcona równaniom eliptycznym istotnym dla problemów z rozdziału czwartego.

5.1. Podstawowe fakty dotyczące parabolicznych równań różniczkowych cząstkowych

Dowody głównych rezultatów tego rozdziału oparte są o wzór Feynmana-Kaca, dlatego w pierwszej kolejności zostaną przywołane rezultaty dotyczące problemu Cauchy'ego

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}a^2(y)u_{yy} - wu + f(y,t) = 0, & (y,t) \in \mathbb{R} \times [0,T), \\ u(y,T) = \beta(y), & y \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{5.1}$$

Definicja 5.1.1. *Powiemy, że funkcja a spełnia warunek* UEL*, jeśli jest ograniczona oraz*

$$\begin{aligned} &a(y) > \varepsilon > 0, && y \in \mathbb{R}, \\ &|a(y) - a(\bar{y})| \le L|y - \bar{y}|, && y, \bar{y} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Twierdzenie 5.1.2 (Friedman [**11**], Rozdział 6, Twierdzenie 4.6). *Jeżeli funkcja a spełnia warunek UEL, funkcja β jest ciągła o nośniku zwartym, $f \equiv 0$ oraz $w = 0$, to dla każdgo $T > 0$ istnieje klasyczne (klasy $C^{2,1}(\mathbb{R} \times [0,T)) \cap C(\mathbb{R} \times [0,T])$) rozwiązanie u problemu* (5.1) *postaci*

$$u(y,t) = \int_R \beta(x)p(y,t;x,T),$$

gdzie p i p_y są funkcjami ciągłymi na $\mathbb{R} \times [0,T) \times \mathbb{R}$. Ponadto istnieją stałe $c,\ C > 0$ takie, że

$$|p_y(y,t;x,T)| \le \frac{C}{T-t} \exp\left(-\frac{c}{2}\frac{|x-y|^2}{T-t}\right) \tag{5.2}$$

dla wszystkich $(y,t,x,T) \in \mathbb{R} \times [0,T) \times \mathbb{R}$.

Przytaczamy również słabą wersję wzoru Feynmana-Kaca. Mocniejsze wersje, z których nie będziemy jednak korzystać, można odnaleźć w pracy Heath i Schweizer [**16**] oraz Becherer i Schweizer [**1**]. Niech $C_b(U)$ oznacza przestrzeń funkcji ciągłych i ograniczonych na U.

Twierdzenie 5.1.3 (Wzór Feynmana-Kaca). *Jeśli funkcja a spełnia warunek UEL, $f \in C_b(\mathbb{R} \times [0,T])$, to*

$$u(y,t) = \mathbb{E}_{y,t}\left(e^{-wT}\beta(Y_T) + \int_t^T e^{-ws} f(Y_s,s)\right)$$

jest jednoznacznym klasycznym rozwiązaniem problemu Cauchy'ego (5.1) *w klasie funkcji ograniczonych.*

Uwaga 5.1.4. *Ze wzoru Feynmana-Kaca 5.1.3 wynika, że funkcja $x \to p(y,t;x,T)$ z twierdzenia 5.1.2 jest gęstością zmiennej losowej Y_T, gdy proces Y jest rozwiązaniem problemu*

$$\begin{cases} dY_s = a(Y_s)dW_s, \\ Y_t = x. \end{cases}$$

Stwierdzenie 5.1.5. *Twierdzenie 5.1.3 zachodzi również gdy $f \in C_b(\mathbb{R} \times [0,T))$*

Dowód. Przedłużmy funkcję f do funkcji ograniczonej i borelowsko mierzalnej na $\mathbb{R} \times [0,T]$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i zdefiniujmy funkcję

$$v_\varepsilon(y) := \mathbb{E}_{y,T-\varepsilon}\left(\beta(Y_T) + \int_{T-\varepsilon}^T f(Y_s,s)\right).$$

Ze wzoru Feynmana-Kaca wynika, że funkcja

$$u_\varepsilon(y,t) = \mathbb{E}_{y,t}\left(v_\varepsilon(Y_{T-\varepsilon}) + \int_t^{T-\varepsilon} f(Y_s,s)\right)$$

jest jednoznacznym rozwiązaniem problemu

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}a^2(y)u_{yy} + f(y,t) = 0, & (y,t) \in \mathbb{R} \times [0,T-\varepsilon), \\ u(y,T) = v_\varepsilon(y), & y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Z własności Markowa(twierdzenie 1.1.12) wynika natomiast, że dla wszystkich $\varepsilon > 0$

$$u_\varepsilon(y,t) = \mathbb{E}_{y,t}\left(e^{-wT}\beta(Y_T) + \int_t^T e^{-ws} f(Y_s,s)ds\right).$$

□

5.2. Równania paraboliczne

Sekcja ta jest dedykowana równaniom semiliniowym typu

$$\begin{cases} u_t + a(y)u_{yy} + H(y,t,u,u_y) = 0, & (y,t) \in \mathbb{R} \times [0,T), \\ u(y,T) = \beta(y), & y \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{5.3}$$

gdzie H jest funkcją ciągłą. To właśnie równania tego typu wykorzystywane były w poprzednich rozdziałach. Dowody przedstawiane w tym rozdziale przeprowadzane są w sposób analogiczny do tych przedstawionych w pracach Becherer i Schweizer [**1**] dla równań reakcji dyfuzji. Dla zagadnień optymalnego wyboru portfela największe znaczenie mają rozwiązania, które są ograniczone wraz z pochodną względem zmiennej przestrzennej y. Przez $C_b^{1,0}$ oznaczymy przestrzeń funkcji ciągłych i ograniczonych na $\mathbb{R} \times [0,T]$ mających ograniczoną pochodną wzgledem zmiennej y na $\mathbb{R} \times [0,T)$. Przenormujemy tą przestrzeń wprowadzając:

$$\|u\|_\kappa := \sup_{(y,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]} e^{-\kappa(T-t)}|u(y,t)| + \sup_{(y,t)\in\mathbb{R}\times[0,T)} e^{-\kappa(T-t)}|u_y(y,t)|.$$

Tak zbudowana przestrzeń jest przestrzenią Banacha.

Odwołując się do reprezentacji Feynmana-Kaca 5.1.3 i lematu 5.1.5 definiujemy operator

$$\mathcal{T}u(y,t) := \mathbb{E}_{y,t}\bigg(\beta(Y_T) + \int_t^T H\big(y,s,u(Y_s,s),u_y(Y_s,s)\big)ds\bigg).$$

Twierdzenie 5.2.1. *Jeżeli a spełnia warunek UEL, β ograniczona i globalnie lipschitzowska i H jest funkcją ciągłą na $\mathbb{R} \times [0,T] \times \mathbb{R} \times [0,T]$ taką, że dla pewnej stałej K*

$$\begin{aligned} &|H(y,t,u,p)| \le K\big(1+|u|+|p|\big), \\ &|H(y,t,u,p) - H(y,t,\bar{u},\bar{p})| \le K\big(|u-\bar{u}|+|p-\bar{p}|\big), \end{aligned} \tag{5.4}$$

to istnieje klasyczne i jednoznaczne rozwiązanie równania (5.3) *w przestrzeni* $C_b^{1,0}$.

Dowód. Dowód opiera się na wykorzystaniu twierdzenia Banacha o punkcie stałym. Pokażemy, że operator $\mathcal{T}$ jest odwzorowaniem zwężającym w normie $\|\cdot\|_\kappa$ dla odpowiednio dużego κ.

Najpierw pokażemy, że $\mathcal{T}$ prezkształca $C_b^{1,0}$ w $C_b^{1,0}$. Wybierzmy dowolne $u \in C_b^{1,0}$. Ponieważ β jest ograniczona oraz zachodzą warunki (5.4), to funkcja $\mathcal{T}u(y,t)$ jest ograniczona. Wystarczy pokazać, że pochodna względem zmiennej y, $D_y\mathcal{T}u$, również. Wprowadźmy dwie następujące funkcje:

$$\begin{aligned} v^1(y,t) :&= \mathbb{E}_{y,t}\Big(\beta(Y_T)\Big), \\ v^2(y,t) :&= \mathbb{E}_{y,t}\bigg(\int_t^T H\big(Y_s,s,u(Y_s,s),u_y(Y_s,s)\big)ds\bigg). \end{aligned}$$

Ze wzoru Feynmana-Kaca 5.1.3 wynika, że obie funkcje są różniczkowalne. Ponieważ β spełnia globalny warunek Lipschitza, to z odpowiedniego oszacowania w twierdzeniu 1.1.11 wynika, że v^1 spełnia go również wzgledem zmiennej y, ponadto stała lipschitzowska nie zależy od zmiennej t. W związku z tym pochodna v^1_y jest ograniczona. Aby wykazać, że pochodna funkcji v^2 jest ograniczona skorzystamy z twierdzenia Fubiniego, twierdzeń o różniczkowaniu pod znakiem całki i oszacowania (5.2). Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}|v_y^2(y,t)| &= \left|D_y\mathbb{E}_{y,t}\bigg(\int_t^T H(Y_s,s,u(Y_s,s),u_y(Y_s,s))ds\bigg)\right| \\ &= \left|D_y\bigg(\int_t^T\int_{\mathbb{R}} H(z,s,u(z,s),u_y(z,s))p(y,t,z,s)dzds\bigg)\right| \\ &\le \int_t^T\int_{\mathbb{R}} |H(z,s,u(z,s),u_y(z,s))||p_y(y,t,z,s)|dzds \\ &\le \int_t^T\int_{\mathbb{R}} |H(z,s,u(z,s),u_y(z,s))|\frac{C}{s-t}\exp\bigg(-c\frac{|z-y|^2}{s-t}\bigg)dzds \\ &\le \frac{KC\sqrt{2\pi}}{\sqrt{c}}(1+\|u\|_\kappa)\int_t^T\frac{1}{\sqrt{s-t}}ds = \frac{KC\sqrt{2\pi}}{\sqrt{c}}(1+\|u\|_\kappa)\sqrt{T-t}.\end{aligned}$$

Następne dwa oszacowania dowiodą, że $\mathcal{T}$ jest odwzorowaniem zwężającym dla odpowiednio dużego parametru κ. Mamy

$$\begin{aligned}&e^{-\kappa(T-t)}\big|\mathcal{T}u(y,t)-\mathcal{T}v(y,t)\big| \\ &\le e^{-\kappa(T-t)}\mathbb{E}_{y,t}\int_t^T |H(Y_s,s,u(Y_s),u_y(Y_s))-H(Y_s,s,v(Y_s),v_y(Y_s))|ds \\ &\le Ke^{-\kappa(T-t)}\mathbb{E}_{y,t}\int_t^T\big(|u(Y_s)-v(Y_s)|+|u_y(Y_s)-v_y(Y_s)|\big)ds \\ &\le e^{-\kappa(T-t)}\int_t^T \|u-v\|_\kappa e^{\kappa(T-s)}ds \le \frac{M}{\kappa}\|u-v\|_\kappa\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}&e^{-\kappa(T-t)}\big|D_y(\mathcal{T}u(y,t)-\mathcal{T}v(y,t))\big| = \\ &e^{-\kappa(T-t)}\left|D_y\mathbb{E}_{y,t}\int_t^T\big(H(Y_s,s,u(Y_s),u_y(Y_s))-H(Y_s,s,v(Y_s),v_y(Y_s))\big)ds\right| \\ &\le e^{-\kappa(T-t)}\int_t^T\int_{\mathbb{R}}\big|H(y,s,u(x),u_y(x))-H(y,s,v(x),v_y(x))\big||p_y(y,t,x,s)|dxds \\ &\le e^{-\kappa(T-t)}\int_t^T\int_{\mathbb{R}}\big(|u(x)-v(x)|+|u_y(x)-v_y(x)|\big)\frac{C}{s-t}\exp\bigg(-\frac{c(x-y)^2}{2(s-t)}\bigg)dxds \\ &\le \bar{M}e^{\kappa t}\|u-v\|_\kappa\int_t^T\frac{e^{-\kappa s}}{\sqrt{s-t}}ds \\ &\le \bar{M}e^{\kappa t}\|u-v\|_\kappa\bigg(\int_t^T(s-t)^{-\frac{3}{4}}ds\bigg)^{\frac{2}{3}}\bigg(\int_t^T e^{-3\kappa s}ds\bigg)^{\frac{1}{3}} \le \frac{L}{\sqrt[3]{\kappa}}\|u-v\|_\kappa,\end{aligned}$$

gdzie stałe M, $\bar{M}$, L zależą wyłacznie od T. Stąd istnieje dostatecznie duże κ, dla którego $\mathcal{T}$ jest odwzorowaniem zwężającym w normie $\|\cdot\|_\kappa$. Wobec tego $\mathcal{T}$ ma dokładnie jeden punkt stały w $C_b^{1,0}$ i ze wzoru Feynmana-Kaca 5.1.3 wynika, że jest on jednoznacznym rozwiązaniem problemu (5.3) w klasie $C_b^{1,0}$. $\square$

W zagadnieniach dotyczących konsumpcji z rozdziału drugiego istotne okazały się być rozwiązania równania postaci

$$
\begin{aligned}
(5.5)\qquad & \alpha_t + \frac{1}{2}a^2(y)\alpha_{yy} + \nu_1(y)\alpha_y + \min_{(\eta_1,\eta_2)\in\Gamma}\Big(\bar{\rho}\eta_2 a(y)\alpha_y + \rho\nu a(y)\eta_1\alpha_y \\
& + \nu_2(y)\big(\lambda(y)+\eta_1\big)^2\alpha\Big) + \nu_3(y)\alpha + \frac{1}{1-q}\alpha^q = 0, \qquad q<1,
\end{aligned}
$$

z warunkiem końcowym

$$\alpha(y,T) = 1.$$

Zdefiniujemy

$$H(y,t,u,p) = \min_{\eta\in\Gamma} h(y,t,u,p,\eta),$$

gdzie

$$h(y,t,u,p,\eta) := \nu_1(y)p + \bar{\rho}\eta_2 a(y)p + \rho\nu a(y)\eta_1 p + \nu_2(y)\big(\lambda(y)+\eta_1\big)^2 u + \nu_3(y)u + f(y,t).$$

Niech a spełnia warunek UEL oraz ν_1 spełnia warunek Lipschitza i będzie ograniczona, ν_2, ν_3, f są ciągłe i ograniczone. Wtedy wykorzystując nierówność

$$|\min_{\eta\in\Gamma} h(y,t,u,p,\eta) - \min_{\eta\in\Gamma} h(\bar{y},\bar{t},\bar{u},\bar{p},\eta)| \le \max_{\eta\in\Gamma}|h(y,t,u,p,\eta) - h(\bar{y},\bar{t},\bar{u},\bar{p},\eta)|$$

dowodzimy, że spełnione są wszystkie założenia tw. 5.2.1, i istnieje jednoznaczne klasyczne rozwiązanie w klasie $C_b^{1,0}$ równania

$$
\begin{aligned}
(5.6)\qquad & \alpha_t + \frac{1}{2}a^2(y)\alpha_{yy} + \nu_1(y)\alpha_y + \min_{(\eta_1,\eta_2)\in\Gamma}\Big(\bar{\rho}\eta_2 a(y)\alpha_y + \rho\nu a(y)\eta_1\alpha_y \\
& + \nu_2(y)\big(\lambda(y)+\eta_1\big)^2\alpha\Big) + \nu_3(y)\alpha + f(y,t) = 0,
\end{aligned}
$$

$$\alpha(y,T) = 1.$$

Posłużymy się tym faktem wykorzystując twierdzenie Banacha o punkcie stałym do dowodu istnienia rozwiązania równania (5.5). Do konstrukcji odpowiedniego operatora $\mathcal{T}$ wykorzystamy stochastyczną reprezentację rozwiązań równania (5.6), z której niejednokrotnie korzystaliśmy w tej pracy. Jeżeli

$$\chi(t,k,Y) := \int_t^k \big(\nu_2(Y_s)(\lambda(Y_s)+\eta_1)^2 + \nu_3(Y_s)\big)ds, \quad \text{to}$$

$$\alpha(y,t) = \min_{\eta\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_{y,t}^{Q^\eta}\left[\exp\big(\chi(t,T,Y)\big) + \int_t^T \exp\big(\chi(t,k,Y)\big) f(Y_k,k)dk\right],$$

gdzie

$$dY_t = \nu_1(Y_t)dt + a(Y_t)\big(\rho dW_t^1 + \bar{\rho}dW_t^2\big)$$

i

$$\frac{dQ^\eta}{dP} = \mathcal{E}\left(\int \nu\eta_{1t}dW_t^1 + \eta_{2t}dW_t^2\right)_T.$$

Właściwy operator ma zatem postać

$$(5.7)\quad \mathcal{T}_2 u(y,t) = \min_{\eta\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_{y,t}^{Q^\eta}\left[\exp\big(\chi(t,T,Y)\big) + \frac{1}{1-q}\int_t^T \exp\big(\chi(t,k,Y)\big)\Big(u(Y_k,k)\Big)^q dk\right].$$

Operator ten rozpatrywany jest na przestrzeni C_b (funkcji ograniczonych i ciągłych na $\mathbb{R} \times [0,T]$) z normą

$$\|u\|_\kappa^2 := \sup_{(y,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]} e^{-\kappa(T-t)}|u(y,t)|.$$

Przez $C_b^{\geq\varepsilon}$ oznaczmy zbiór funkcji ciągłych, ograniczonych i większych od ε. Jest to podzbiór domknięty przestrzeni Banacha C_b.

Twierdzenie 5.2.2. *Jeżeli funkcja a spełnia warunek* UEL, *funkcje ν_1 spełnia warunek Lipschitza i jest ograniczona, ν_2, ν_3 są ciągłe i ograniczone, to istnieje u jednoznaczne rozwiązanie równania* (5.6) *w klasie C_b. Ponadto istnieje $\varepsilon_1 > 0$ takie, że że u neleży do przestrzeni $C_b^{\geq\varepsilon_1}$.*

Dowód. Istnieją stałe $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ takie, że

$$0 < \varepsilon_1 \leq \exp\big(\chi(t,T,Y)\big) \leq \varepsilon_2.$$

Stąd $\mathcal{T}_2$ przeprowadza $C_b^{\geq\varepsilon_1}$ w $C_b^{\geq\varepsilon_1}$. Wystarczy pokazać, że $\mathcal{T}_2$ jest odwzorowaniem zwężającym w normie $||\cdot||_\kappa^2$ dla odpowiednio dużego κ. Funkcja stała tego operatora będzie rozwiązaniem problemu na mocy twierdzenia 5.2.1. Wystarczy zatem jeśli przeprowadzimy następujące oszacowanie:

$$\begin{aligned}
&e^{-\kappa(T-t)}|\mathcal{T}_2u(y,t) - \mathcal{T}_2v(y,t)| \\
&\leq \max_{\eta\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_{y,t}^{Q^\eta}\left[e^{-\kappa(T-t)}\frac{1}{1-q}\int_t^T \exp\big(\chi(t,k,Y)\big)\left|\Big(u(Y_k,k)\Big)^q - \Big(v(Y_k,k)\Big)^q\right|dk\right] \\
&\leq \varepsilon_2|q|\varepsilon_1^{1-q}\max_{\eta\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_{y,t}^{Q^\eta}\left[e^{-\kappa(T-t)}\frac{1}{1-q}\int_t^T |u(Y_k,k) - v(Y_k,k)|dk\right] \\
&\leq \varepsilon_2|q|\varepsilon_1^{q-1}\frac{1}{1-q}\|u-v\|_\kappa e^{-\kappa(T-t)}\int_t^T e^{\kappa(T-k)}dk \leq \frac{1}{\kappa}\varepsilon_2|q|\varepsilon_1^{q-1}\frac{1}{1-q}\|u-v\|_\kappa^2.
\end{aligned}$$

□

5.3. Równania eliptyczne

W analizie problemów inwestycyjnych z nieskończonym horyzontem inwestycyjnym szczególną rolę odgrywały równania eliptyczne postaci

$$\frac{1}{2}a^2(y)u_{yy} + H(y,u,u_y) - wu = 0, \qquad y\in\mathbb{R}. \tag{5.8}$$

Pokażemy, że tego typu równania mają rozwiązanie ograniczone wraz z pierwszą pochodną u_y. Tym razem również posłużymy się rozwiązaniami równania stochastycznego

$$\begin{cases} dY_t = a(Y_t)dW_t, \\ Y_0 = y. \end{cases} \tag{5.9}$$

Zakładamy w tej części pracy, że spełniony jest warunek

O) Istnieje $p(y,0,x,t)$ gęstość rozkładu dla rozwiązań układu (5.9), ciągła wraz z pochodną p_y na $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times(0,+\infty)$ oraz c, $C > 0$ takie, że

$$|p_y(y,0,x,t)| \leq \frac{C}{t}\exp\left(-\frac{c}{2}\frac{|x-y|^2}{t}\right)$$

dla wszystkich x, $y \in \mathbb{R}$ oraz $t \in (0, +\infty)$.

Stwierdzenie 5.3.1. *Warunek* **O** *jest spełniony, dla procesu Wienera (tzn. gdy $a \equiv 1$).*

Dowód. Z twierdzenia 5.1.2 wynika, że istnieją c, $C > 0$ takie, że

$$|p_y(y, 0, x, 1)| = \frac{|x-y|}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}|x-y|^2\right) \leq C \exp\left(-\frac{c}{2}|x-y|^2\right).$$

Ponieważ nierówność ta zachodzi dla każdego $x, y \in \mathbb{R}$, to

$$|p_y(y, 0, x, t)| = \frac{|x-y|}{t\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{|x-y|^2}{t}\right) \leq \frac{C}{t} \exp\left(-\frac{c}{2}\frac{|x-y|^2}{t}\right).$$

□

Twierdzenie 5.3.2. *Jeżeli funkcja a spełnia warunek UEL oraz* **O**, *f jest ciągła i ograniczona, to istnieje klasyczne i jednoznaczne rozwiązanie równania*

$$\frac{1}{2}a^2(y)u_{yy} + f(y) - wu = 0, \quad y \in \mathbb{R} \tag{5.10}$$

w klasie C_b^1.

Dowód. Z własności Markowa i ze wzoru Feynmana-Kaca 5.1.3 wynika, że funkcja

$$\begin{aligned} v(y,t) &= \mathbb{E}_{y,0}\left(\int_0^t e^{-ws} f(Y_s)ds\right) = \int_0^t e^{-ws}\mathbb{E}_{y,T-t} f(Y_{T-t+s})ds \\ &= \mathbb{E}_{y,T-t}\left(\int_{T-t}^T e^{-w(s-(T-t))} f(Y_s)ds\right) \end{aligned}$$

jest rozwiązaniem problemu

$$\begin{cases} v_t - \frac{1}{2}a^2(y)v_{yy} + wv - f(y) = 0 & (y,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ v(y, 0) = 0 & y \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{5.11}$$

Istotne jest asymptotyczne zachowanie funkcji v. Wprost z jej definicji i z ograniczoności funkcji f wynika, że

$$\lim_{t\to+\infty} v(y,t) = \mathbb{E}_{y,0}\left(\int_0^{+\infty} e^{-ws} f(Y_s)ds\right),$$

przy czym zbieżność ta jest jednostajna. Należy pokazać, że $v_t(\cdot, t)$ jest zbieżne jednostajnie do 0 oraz, że $v_y(\cdot, t)$, $v_{yy}(\cdot, t)$ są zbieżne jednostajnie do pewnej granicy, gdy $t \to \infty$. Z twierdzenia o różniczkowaniu pod znakiem całki mamy

$$v_t(y,t) = \mathbb{E}_{y,0}e^{-wt} f(Y_t).$$

Stąd $\lim_{t\to+\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}} v_t(y,t) = 0$. Ponieważ v spełnia równanie (5.11), to istnieje granica w zbieżności jednostajnej dla v_{yy}. Natomiast dla dostatecznie dużych t_1 i t_2 mamy

$$\begin{aligned}
\big|u_y(y,t_1) - u_y(y,t_2)\big| &= \left|\int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}} e^{-ws} f(z) p_y(y,0,z,s)dzds\right| \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}} e^{-ws}|f(z)|\frac{C}{s}\exp\bigg(-\frac{c}{2}\frac{(z-y)^2}{s}\bigg)dzds \\
&\leq \frac{C\|f\|}{\sqrt{c}}\int_{t_1}^{t_2}\frac{e^{-ws}}{\sqrt{s}}ds \leq \frac{C\|f\|}{\sqrt{c}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-ws}ds \\
&\leq \frac{C\|f\|}{w\sqrt{c}}\big(e^{-wt_1} - e^{-wt_2}\big).
\end{aligned}$$

Zatem istnieje granica w zbieżności jednostajnej dla $v_y(\cdot,t)$. Wyakzane zostało, że jeśli $t \to +\infty$, to $v(\cdot,t)$ i wszystkie interesujace pochodne są zbieżne jednostajnie. Tym samym funkcja będąca granicą:

$$u(y) = \mathbb{E}_{y,0}\bigg(\int_0^{+\infty} e^{-ws} f(Y_s)ds\bigg)$$

spełnia równanie (5.10).

Jednoznaczność rozwiazania wynika z argumentu, który stosowany był w pracy wielokrotnie tzn. jeżeli u jest rozwiazaniem równania (5.10) klasy C_b^1 i zastosujemy wzór Itô do $e^{-wt}u(Y_t)$, to uzyskamy równość

$$u(y) = \mathbb{E}_{y,0}\bigg(\int_0^{+\infty} e^{-ws} f(Y_s)ds\bigg).$$

□

Powyższy wynik sugeruje, że aby rozwiązać równanie (5.8) należy rozważyć operator

$$\mathcal{T}_3 u(y) := \mathbb{E}_y\bigg(\int_0^{+\infty} H(Y_t, u(Y_t), u_y(Y_t))dt\bigg).$$

Operator określony jest na przestrzeni Banacha C_b^1 z klasyczną normą supremową tzn.

$$\|u\| := \sup_{y\in\mathbb{R}}|u(y)| + \sup_{y\in\mathbb{R}}|u_y(y)|.$$

Twierdzenie 5.3.3. *Niech a będzie funkcją spełniającą warunek* UEL *oraz* **O**, *funkcja H niech bedzie ciągła i spełnia*

$$\begin{aligned}
&|H(y,u,p)| \leq L\big(1 + |u| + |p|\big), \\
&|H(y,u,p) - H(y,\bar{u},\bar{p})| \leq K(|u-\bar{u}| + |p-\bar{p}|)
\end{aligned} \tag{5.12}$$

dla dowolnych y, u, p, $\bar{u}$, $\bar{p} \in \mathbb{R}$. Wtedy dla dostatecznie dużego parametru w istnieje klasyczne i jednoznaczne rozwiązanie równania w klasie C_b^1.

Dowód. Z twierdzenia 5.3.2 wynika, że $\mathcal{T}_3$ przekształca C_b^1 w C_b^1. Należy pokazać, że $\mathcal{T}_3$ jest odwzorowaniem zwężającym dla odpowiednio dużego w.

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{T}_3 u(y) - \mathcal{T}_3 v(y)| \\
&\leq \mathbb{E}_{y,0} \int_0^{+\infty} e^{-ws} \big| H(Y_s, u(Y_s), u_y(Y_s)) - H(Y_s, v(Y_s), v_y(Y_s)) \big| ds \\
&\leq \mathbb{E}_{y,0} \int_0^{+\infty} (|u(Y_s) - v(Y_s)| + |u_y(Y_s) - v_y(Y_s)|) ds \\
&\leq \int_0^{+\infty} e^{-ws} K \|u - v\| ds \leq \frac{K}{w} \|u - v\|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&|D_y(\mathcal{T}_3 u(y) - \mathcal{T}_3 v(y))| \\
&= \left| D_y \mathbb{E}_{y,0} \int_0^{+\infty} e^{-ws} \big(H(Y_s, u(Y_s), u_y(Y_s)) - H(Y_s, v(Y_s), v_y(Y_s)) \big) ds \right| \\
&\leq K \|u - v\| \int_0^{\infty} e^{-ws} \int_{\mathbb{R}} |p_y(y, 0, x, s)| dx ds \\
&\leq K \|u - v\| \int_0^{+\infty} e^{-ws} \int_{\mathbb{R}} \frac{C}{s} \exp\left(-\frac{c(x-y)^2}{2s} \right) dx ds \\
&\leq \frac{CK\sqrt{2\pi}}{\sqrt{c}} \|u - v\| \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ws}}{\sqrt{s}} ds \\
&\leq \frac{CK\sqrt{2\pi}}{\sqrt{c}} \|u - v\| \left(\int_0^1 \frac{e^{-ws}}{\sqrt{s}} ds + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-ws}}{\sqrt{s}} \right) \\
&\leq \frac{CK\sqrt{2\pi}}{\sqrt{c}} \|u - v\| \left(\frac{1}{\sqrt[3]{w}} + \frac{1}{w} \right).
\end{aligned}$$

□

W rozdziale czwartym poświęconym problemowi z nieskończonym horyzontem inwestycyjnym, optymalna strategia inwestycyjna została związana z równaniem

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} a^2(y) \alpha_{yy} + \nu_1(y) \alpha_y + \min_{(\eta_1, \eta_2) \in \Gamma} \Big(\bar{\rho} \eta_2 a(y) \alpha_y + \rho \nu a(y) \eta_1 \alpha_y \\
&\qquad + \nu_2 \big(\lambda(y) + \eta_1 \big)^2 \alpha \Big) + \nu_3(y) \alpha + \frac{1}{1-q} \alpha^q = 0, \qquad q < 0, \quad \nu_2 > 0.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Niech

$$\bar{\chi}(s, Y, \eta) := -sw + \int_0^s \big(\nu_2 (\lambda(Y_k) + \eta_{1k})^2 + \nu_3(Y_k) \big) dk.$$

Tworzymy operator:

$$\mathcal{T}_4 u(y) = \min_{\eta \in \mathcal{M}} \lim_{t \to \infty} \mathbb{E}_{y,0}^{Q_t^\eta} \left[\int_0^t \frac{1}{1-q} \exp\Big(\bar{\chi}(s, Y, \eta) \Big) \Big(u(Y_s) \Big)^q ds \right],$$

gdzie

$$\frac{dQ_t^\eta}{dP} = \mathcal{E}\bigg(\int_0^t \nu\eta_{1s}dW_s^1 + \eta_{2s}dW_s^2\bigg),$$
$$dY_t = \nu_1(Y_t)dt + a(Y_t)\big(\rho dW_t^1 + \bar{\rho}dW_t^2\big).$$

Oznaczmy przez

$$\overline{w} := \sup_{y\in\mathbb{R}}\sup_{\eta\in\Gamma}\bigg(\nu_2\big(\lambda(y)+\eta_1\big)^2 + \nu_3(y)\bigg),$$
$$\underline{w} := \inf_{y\in\mathbb{R}}\inf_{\eta\in\Gamma}\bigg(\nu_2\big(\lambda(y)+\eta_1\big)^2 + \nu_3(y)\bigg)$$

Połóżmy również

$$\overline{c}(w) = (1-q)^{\frac{1}{q-1}}\bigg((w-\underline{w})^q(w-\overline{w})\bigg)^{\frac{1}{q^2-1}}$$
$$\underline{c}(w) = \frac{\overline{c}^q(w)}{(1-q)(w-\underline{w})} = (1-q)^{\frac{1}{q-1}}\bigg((w-\underline{w})(w-\overline{w})^q\bigg)^{\frac{1}{q^2-1}}$$

Gdy $q \in (-1,0)$, to $\overline{c}(w) > \underline{c}(w)$.

Twierdzenie 5.3.4. *Jeśli a spełnia warunek* UEL *oraz* **O**, *funkcja ν_1 spełnia globalny warunek Lipschitza i jest ograniczona, λ, ν_3 jest ciągła i ograniczona oraz $q \in (-1,0)$, to istnieje dostatecznie duże w, dla którego operator $\mathcal{T}_4$ jest kontrakcją przekształcającą zbiór $C_b^{\geq\underline{c}(w)} \cap C_b^{\leq\overline{c}(w)}$ w $C_b^{\geq\underline{c}(w)} \cap C_b^{\leq\overline{c}(w)}$. Ponadto punkt stały tego operatora spełnia równanie* (5.13).

Dowód. Z twierdzenia 5.3.3 wynika, że funkcja $\mathcal{T}_4 u$ dla dostatecznie dużego w spełnia odpowiednie równanie różniczkowe. Ponadto wielkość w nie zależy od funkcji u ponieważ stała Lipschitza K obecna w założeniach twierdzenia 5.3.3 od u nie będzie zależała. Stąd operator $\mathcal{T}_4$ przekształca przestrzeń $C_b^{\geq\underline{c}(w)} \cap C_b^{\leq\overline{c}(w)}$ w $C_b^{\geq\underline{c}(w)} \cap C_b^{\leq\overline{c}(w)}$. Należy pokazać, że $\mathcal{T}_4$ jest zwężające dla dużego w. Wybierzmy dowolne $u,\, v \in C_b^{\geq\underline{c}(w)} \cap C_b^{\leq\underline{c}(w)}$.

$$\begin{aligned}|\mathcal{T}_4 u(y,t) - \mathcal{T}_4 v(y,t)| &\leq \max_{\eta\in\mathcal{M}}\lim_{t\to+\infty}\mathbb{E}_{y,0}^{Q_t^\eta}\int_0^t \frac{1}{1-q}e^{(\overline{w}-w)s}|u^q(Y_s) - v^q(Y_s)|dt \\ &\leq \frac{|q|}{1-q}(\underline{c}(w))^{q-1}\frac{1}{w-\overline{w}}\|u-v\| \\ &= |q|(w-\underline{w})^{1/(q+1)}(w-\overline{w})^{-1/(q+1)}\|u-v\|.\end{aligned}$$

Ponieważ

$$\lim_{w\to+\infty}|q|\bigg(\frac{w-\underline{w}}{w-\overline{w}}\bigg)^{\frac{1}{q+1}} < 1,$$

to istnieje dostatecznie duże w, dla którego $\mathcal{T}_4$ jest kontrakcją. Z twierdzenia 5.3.3 wynika, że punkt stały tego operatora spełnia równanie (5.13). $\square$

Bibliografia

[1] Becherer, D.; Schweizer, M. *Classical solutions to reaction-diffusion systems for hedging problems with interacting Itô and point processes.* Ann. Appl. Probab. 15 (2005), no. 2, 1111–1144.

[2] Bielecki, T. R. ; Jin, H ; Pliska, S. R. Zhou, X. *Continuous-time mean-variance portfolio selection with bankruptcy prohibition.* Math. Finance 15 (2005), no. 2, 213–244.

[3] Bielecki, T. R.; Pliska, S. R. *Risk-sensitive dynamic asset management.* Appl. Math. Optim. 39 (1999), no. 3, 337–360.

[4] Brennan, M. J.; Schwartz, E. S.; Lagnado, R. *Strategic asset allocation. Computational financial modelling.* J. Econom. Dynam. Control 21 (1997), no. 8-9, 1377–1403.

[5] Cont R. *Model uncertainty and its impact on the pricing of derivative instruments.* Math. Financ 16(3)(2006),519–547

[6] Ellsberg, D. : *Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms*, Q. J. Econ. 75 (1961), 643–669.

[7] Fan, K. *Minimax theorems.* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 39 (1953), 42–47.

[8] Fleming, W. H.; Rishel, R. W. *Deterministic and stochastic optimal control.* Applications of Mathematics, No. 1. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.

[9] Fleming, W. and Soner, H.M.: *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions.* Second edition, Springer, New York.(2006).

[10] FöllmerH., Gundel A., (2006) *Robust projections in the class of martingale measures.* Illinois J. Math. 50 (2006), 439-472.

[11] Friedman, A. *Stochastic differential equations and applications.* Vol. 1. Probability and Mathematical Statistics, Vol. 28. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975.

[12] Gilboa I, Schmeidler D. *Maxmin expected utility with non-unique prior.* J Math Econ 18 (1989), 141–153

[13] Goldfarb, D.; Iyengar, G. *Robust portfolio selection problems.* Math. Oper. Res. 28 (2003), no. 1, 1–38.

[14] Gundel A. *Robust utility maximization for complete and incomplete market models.* Finance Stoch. 9 (2005),no. 2, 151-176.

[15] Hansen, L. P.; Sargent, T. J.; Turmuhambetova, G; Williams, N. *Robust control and model misspecification.* J. Econom. Theory 128 (2006), no. 1, 45–90.

[16] Heath, D.; Schweizer, M. *Martingales versus PDEs in finance: an equivalence result with examples.* J. Appl. Probab. 37 (2000), no. 4, 947–957

[17] Fleming, W. H.; Hernandez-Hernandez, D. *An optimal consumption model with stochastic volatility.* Finance Stoch. 7 (2003), no. 2, 245–262.

[18] Hernández D. ; Schied A. *Roboust utility maximization in a stochastic factor models.* Statist. Decisions 24 (2006),no.1, 109–125.

[19] Knight, F.H. (1921), *Risk, Uncertainty and Profit*, Boston: Houghton Mifflin.

[20] Maenhout, P. *Robust portfolio rules and detection-error probabilities for a mean-reverting risk premium.* J. Econom. Theory 128 (2006), no. 1, 136–163.

[21] Markowitz H. (1952) Portfolio selection. J Finance 7: 77–91

[22] Mataramvura S., Øksendal B., *Risk minimizing portfolios and HJBI equations for stochastic differential games*, Stochastics 80 (2008), no 4, 317-337.

[23] Merton RC *Liftime portfolio selection under uncertainty*

[24] Merton R. C. Optimum consumption and portfolio rules in a countinous-time model. J Econ Theory 3, 373–413

[25] Musiela M., Zariphopoulou T., *An Example of Indifference Prices under Exponential Preferences.* Finance Stoch. 8 (2004), no. 2, 229-239.

[26] Øksendal, B. *Stochastic differential equations. An introduction with applications.* Sixth edition. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[27] Øksendal, B.; Sulem A. *A game theoretic approach to martingale measures in incomplete markets.* E-print, University of Oslo 24 (2006).

[28] Øksendal, B.; Sulem, A. *Risk indifference pricing in jump diffusion markets.* Math. Finance 19 (2009), no. 4, 619–637.

[29] Pham, H. *Continuous-time stochastic control and optimization with financial applications. Stochastic Modelling and Applied Probability*, 61. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[30] Pham, H. *Smooth solutions to optimal investment models with stochastic volatilities and portfolio constraints.* Appl. Math. Optim. 46 (2002), no. 1, 55-78.

[31] Hernández-Hernández, D.; Schied, A. *A control approach to robust utility maximization with logarithmic utility and time-consistent penalties.* Stochastic Process. Appl. 117 (2007), no. 8, 980–1000.

[32] Schied A.; Wu CT. *Duality theory for optimal investments under model uncertainty.* Statist Decisions 23(2005), no. 3, 199 - 217.

[33] Schied A.*Robust optimal control for a consumption-investment problem* . Math. Methods. Oper. Res. 67 (2008), no. 1, 1-20.

[34] Siu, T. K. *A game theoretic approach to option valuation under Markovian regime-switching models.* Insurance Math. Econom. 42 (2008), no. 3, 1146–1158.

[35] Stoikov S., Zariphopoulou T.*Optimal investments in the presence of unhedgeable risks and under CARA preferences*, IMA Volume Series, Institute for Mathematics and its Applications, in press (2009).

[36] Talay D., Zheng Z., *Worst case model risk management*, Finance Stoch. 6 (2002), no. 4, 517-537.

[37] Tütüncü, R. H.; Koenig, M. *Robust asset allocation.* Ann. Oper. Res. 132 (2004), 157–187.

[38] Uppal, R. Wang, T *Model misspecification and underdiversification* Journal of Finance 58 Issue 6 (2003), 2465-2486,

[39] Wagner, D. H. *Survey of measurable selection theorems: an update.* Measure theory, Oberwolfach 1979 (Proc. Conf., Oberwolfach, 1979), 176–219, Lecture Notes in Math., 794, Springer, Berlin-New York, 1980.

[40] Zhang, X; Siu, T. K. *Optimal investment and reinsurance of an insurer with model uncertainty.* Insurance Math. Econom. 45 (2009), no. 1, 81–88.

[41] Zariphopoulou T., *Optimal investment and consumption models with nonlinear stock dynamics.* Math. Methods Oper. Res. 50 (1999), no. 2, 271-296.

[42] Zariphopoulou T., *A solution approach to valuation with unhedgeable risks*, Finance Stoch. 5 (2001), no. 1, 61-82.

[43] Zawisza D. *Robust portfolio selection under exponential preferences* Appl. Math. 37 (2010), 215-230

[44] Zhou X. ; Li, D. *Continuous time mean variance portfolio selection: A stochastic LQ framework.* Applied Mathematics and Optimization 42 (2000), 19–33.