Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Jagiellońskiego

Grzegorz Kosiorowski

Funkcje wiodące i segmenty izolujące

Rozprawa doktorska pod kierunkiem
prof. dr hab. Klaudiusza Wójcika

Kraków, 2011

Spis treści

Spis oznaczeń

- $\#A$ - moc zbioru A.
- ∂A - brzeg zbioru A.
- $\operatorname{int} A$ - wnętrze zbioru A.
- $\overline{A}$ - domknięcie zbioru A.
- τ_A - topologia zbioru A.
- diamA - średnica zbioru A.
- D_r - dysk w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ o środku w 0 i promieniu r.
- $\cdot$ - standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$.
- $||\cdot||$ - standardowa norma w $\mathbb{R}^n$.
- $\varphi(x), \varphi(t,x)$ - orbita (trajektoria) punktu x lub (t,x) względem danego układu dynamicznego φ.
- $\varphi^{\pm}(x)$, $\varphi^{\pm}(t,x)$ - dodatnia/ujemna półorbita (półtrajektoria) punktu x lub (t,x) względem danego układu dynamicznego φ.
- $\alpha(x)/\omega(x)$ - dodatni/ujemny zbiór graniczny punktu (x) względem danego układu dynamicznego.
- $C(A,B)$ -zbiór funkcji ciągłych z A do B.
- $C(A)$ -zbiór funkcji ciągłych z A do $\mathbb{R}$.
- $C^k(A,B)$ -zbiór funkcji klasy C^k z A do B.
- $\operatorname{tr}(A)$ - ślad macierzy A.
- $\sigma(A)$ - widmo (zbiór wartości własnych) macierzy A.
- $f \simeq g$ - f jest homotopijne z g.
- $d(f)$ - stopień Brouwera odwzorowania f.
- $\operatorname{ind}(f)$ - indeks punktu stałego odwzorowania f.
- $i(\varphi, U)$ - indeks punktu stacjonarnego potoku φ w zbiorze U.
- $L(f)$ - liczba Lefschetza odwzorowania f.
- $N(f)$ - liczba Nielsena odwzorowania f.

Wstęp

W nowoczesnej teorii równań różniczkowych wiele zagadnień, pierwotnie badanych technikami analitycznymi, znalazło rozwiązania przy użyciu podejścia topologicznego. Szczególnie pożyteczne okazały się metody teorii punktów stałych, a zwłaszcza teorii stopnia topologicznego i indeksu punktu stałego.

Niniejsza rozprawa doktorska poświęcona jest badaniu i porównaniu dwóch metod tego typu, stosowanych do wykrywania okresowych, ograniczonych bądź zanikających (tj. zmierzających do 0, gdy czas dąży do nieskończoności) rozwiązań równań różniczkowych zadanych na $\mathbb{R}^n$.

Pierwszą z tych metod jest teoria funkcji wiodących. Jej początki wiążą się z nazwiskiem M.A.Krasnosielskiego i sięgają przełomu lat 50. i 60. XX wieku. Sama idea jest prostym i naturalnym rozszerzeniem pojęcia pola gradientowego. W przypadku równania gradientowego zadanego na $\mathbb{R}^n$ wzorem $x' = \nabla G(x)$ ($G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest tu funkcją klasy C^1), wielu informacji dostarcza spostrzeżenie, że w każdym punkcie pole gradientowe ∇G jest ortogonalne do odpowiedniej poziomicy funkcji G. Dzięki temu dowiadujemy się, że G rośnie wzdłuż rozwiązań badanego równania, co implikuje np. nieistnienie rozwiązań okresowych. Funkcja wiodąca w klasycznym ujęciu jest po prostu funkcją $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, która poza pewnym dyskiem rośnie wzdłuż rozwiązań danego równania postaci $x' = f(t, x)$. Oczywiście, może istnieć więcej niż jedna funkcja wiodąca dla danego równania. Okazuje się, że jeśli istnieje układ funkcji wiodących, których suma modułów zmierza do nieskończoności, gdy $||x||$ zmierza do nieskończoności (czyli zupełny układ funkcji wiodących), a stopień Brouwera gradientu jednej z tych funkcji na wspomnianym dysku (zwany indeksem funkcji wiodącej) jest niezerowy, to zagadnienie $x' = f(t, x)$; $x(a) = x(b)$ (dla zadanych liczb rzeczywistych a, b) posiada rozwiązanie.

Dzięki temu wynikowi, przy odpowiednich dodatkowych założeniach, można wykryć rozwiązania okresowe i ograniczone odpowiednich równań różniczkowych, a rozszerzając pojęcie funkcji wiodacej, również rozwiązania zanikające.

Druga metoda wywodzi się z pomysłów T.Ważewskiego. Jest to teoria segmentów izolujących, stworzona przez R.Srzednickiego. Segment izolujący jest pewnym szczególnym przypadkiem zbioru Ważewskiego (czyli zbioru domkniętego, dla którego zbiór wyjścia też jest domknięty) w rozszerzonej przestrzeni fazowej. Dla takiego segmentu z ustalonym zbiorem wyjścia oblicza się pewien niezmiennik — tak zwaną liczbę Lefschetza. Niezerowość tego niezmiennika pociąga za sobą istnienie odpowiednich rozwiązań.

Motywacją do stworzenia niniejszej pracy była obserwacja pewnych analogii pomiędzy obydwiema teoriami. Nie tylko pozwalają one na osiągnięcie podobnych rezultatów, ale posługują się też dość podobnymi niezmiennikami. Naturalnym zatem jest postawienie pytania: czy któraś z tych teorii nie jest szczególnym przypadkiem drugiej? A może są one równoważne? W tej pracy postaramy się udzielić satysfakcjonujących odpowiedzi.

Rozprawa została podzielona na cztery rozdziały i zakończona dodatkiem. Rozdział pierwszy poświęcony jest ustaleniu podstawowych oznaczeń i definicji. Przypomina również kolejno: elementy teorii stopnia Brouwera, liczby Nielsena i wyniki dotyczące bloków izolujących.

Rozdział drugi dotyczy teorii funkcji wiodących. W pierwszej jego części przedstawione są klasyczne wyniki tej teorii. W drugiej – konstrukcja kryterium zwartości zbioru rozwiązań ograniczonych równania $x' = f(x)$. Okazuje się, że samo istnienie zupełnego układu funkcji wiodących jest na to warunkiem wystarczającym. W trzeciej części badamy naturalne rozszerzenie pojęcia funkcji wiodącej na funkcje zależne od czasu. Ze względu na trudności ze zdefiniowaniem indeksu takiej funkcji, nie jest to rozszerzenie trywialne. Być może dlatego do tej pory ten temat (wedle wiedzy autora) poruszały jedynie trzy artykuły, głównie zajmujące się wykrywaniem rozwiązań zanikających. Podrozdział ten nie stanowi tylko kompilacji wspomnianych prac, ale też korektę bądź uogólnienie ich rezultatów oraz przygotowanie wyników rozdziału czwartego.

W rozdziale trzecim omawiana jest teoria segmentów izolujących. Najpierw przedstawiamy konstrukcję segmentów izolujących okresowych i g-segmentów dla potoków oraz podstawowe twierdzenia o segmentach wraz z zastosowaniami. Następnie pojawiają się twierdzenia przygotowujące rezultaty ostatniego rozdziału: o strukturze zbioru niezmienniczego w segmencie i o ciągach segmentów. Ostatnie dwa podrozdziały zajmuje konstrukcja segmentów izolujących dla homotopii i zastosowanie tej konstrukcji do wykrywania punktów stałych dla odwzorowań i obliczania liczb Nielsena.

Ostatni, czwarty rozdział poświęcony jest przewodniemu motywowi pracy: porównaniu obydwu metod. Twierdzenie 4.1 i kolejne wnioski z niego pokazują, że wszystkie rezultaty klasycznej teorii funkcji wiodącej da się uzyskać przy pomocy teorii segmentów izolujących. Dalsze wyniki tego rozdziału pokazują, że rozszerzenie pojęcia funkcji wiodącej na przypadek zależny od czasu również nie daje twierdzeń mocniejszych niż teoria segmentów. Z kolei przykład 4.4 dowodzi, że teorie te nie są równoważne: w istocie, teoria segmentów izolujących jest dużo mocniejsza. Tym bardziej, że przedstawione w tej pracy twierdzenia nie wyczerpują zastosowań segmentów (przykłady innych zastosowań pojawiają się między innymi w [**SW**],[**WZ1**]).

Pracę kończy dodatek A, przedstawiający współczesny stan badań nad teorią funkcji wiodących. Zawiera on głównie uogólnienia klasycznych twierdzeń uzyskiwane przy pomocy pewnego osłabienia ich założeń.

Na zakończenie, chciałbym serdecznie podziękować mojemu promotorowi, profesorowi Klaudiuszowi Wójcikowi, za wspaniałą opiekę naukową, podsuwanie intrygujących pomysłów na badania i poświęcony czas. Każdemu doktorantowi życzyłbym takiego promotora.

Praca zawiera własne (lub wspólne z promotorem) wyniki autora. Są to:

- Porównanie teorii funkcji wiodących i teorii segmentów izolujących, czyli cały rozdział 4, którego główne twierdzenie pochodzi z pracy [**Ko1**].
- Wyniki związane z kryterium zwartości zbioru orbit ograniczonych zawarte w podrozdziale 2.2, przede wszystkim twierdzenie 2.15, prostszy dowód twierdzenia 2.16 i zawarte we wspomnianym podrozdziale przykłady, pochodzące z pracy [**Ko2**].
- Podrozdziały 3.3 i 3.4, zawierające wyniki dotyczące konstrukcji segmentów izolujących dla odwzorowań i ich związków z liczbą Nielsena, w szczególności twierdzenia 3.22 i 3.24, pochodzące z pracy [**KW**].
- Wyniki związane z funkcjami wiodącymi zależnymi od czasu - poza dowodami z rozdziału 4 są to w szczególności: kontrprzykład do twierdzenia Avramescu (twierdzenie 2.21), poprawiona wersja tego twierdzenia (twierdzenie 2.26) i topologiczna wersja twierdzenia Lagody i Parasyuka (twierdzenie 2.32). Wyniki te nie były dotąd publikowane.
- Wyniki cząstkowe, związane ze strukturą zbioru niezmienniczego w segmencie (obserwacje 3.11, 3.12 i 3.15). Wyniki te nie były dotąd publikowane.

Autor jest stypendystą programu „Doctus - Małopolski fundusz stypendialny dla doktorantów”, współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Dlatego, autor chciałby wyrazić również podziękowania dla wszystkich europejskich podatników, którzy to stypendium sfinansowali, niezależnie, czy dobrowolnie, czy też pod przymusem.

ROZDZIAŁ 1

Podstawowe definicje i oznaczenia

Pierwszy rozdział poświęcimy przypomnieniu i wprowadzeniu najważniejszych pojęć i podstawowych twierdzeń, które są niezbędne do zdefiniowania funkcji wiodących i segmentów izolujących oraz sformułowania podstawowych twierdzeń ich dotyczących.

1.1. Lokalne procesy i potoki

Definicja 1.1. Niech X będzie lokalnie zwartą przestrzenią metryczną, a $D \subset \mathbb{R} \times X$ — zbiorem otwartym takim, że dla każdego $x \in X$ zbiór $I_x := \{t : (t,x) \in D\}$ jest przedziałem otwartym (α_x, ω_x), gdzie

$$-\infty \leq \alpha_x < 0 < \omega_x \leq \infty.$$

Potokiem lokalnym (lub *lokalnym układem dynamicznym*) na X nazywamy funkcję ciągłą $\varphi : D \to X$, dla której

$$t \in (\alpha_x, \omega_x) \Rightarrow \alpha_{\varphi(t,x)} = \alpha_x - t$$

i zachodzą równości:

$$\varphi(0,x) = x, \tag{1.1}$$

$$\varphi(s+t,x) = \varphi(t, \varphi(s,x)). \tag{1.2}$$

Jeżeli $D = \mathbb{R} \times X$, to potok lokalny $\varphi : \mathbb{R} \times X \to X$ nazywamy *potokiem (globalnym)*.

Jeśli I_x będzie postaci $[0, \omega_x)$, przy pozostałych oznaczeniach niezmienionych, to φ nazywamy *semipotokiem lokalnym* (lub *lokalnym semiukładem dynamicznym*).

Przykład 1.2 (Potok generowany przez pole wektorowe). Niech M będzie gładką rozmaitością, a $v : M \to TM$ gładkim polem wektorowym na niej. Dla $x_0 \in M$ istnieje dokładnie jedno $u_{x_0} : I_{x_0} \to M$ wysycone rozwiązanie problemu Cauchy'ego

$$\begin{cases} x' = v(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}.$$

Definiujemy $D = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times M : t \in I_x\}$ i funkcję $\varphi : D \ni (t,x) \to u_x(t) \in M$. Wtedy φ jest lokalnym układem dynamicznym na M. Mówimy, że jest on *generowany przez pole* v. Dowodzi się, że jeżeli M jest zwarta, to φ jest potokiem globalnym.

Definicja 1.3. Niech X będzie przestrzenią metryczną i $D \subset \mathbb{R} \times X \times \mathbb{R}$ zbiorem otwartym. Mówimy, że $\Phi : D \to X$ jest *procesem lokalnym* na X jeżeli funkcja

$$\varphi : D \ni ((\sigma, x), t) \to (\sigma + t, \Phi(\sigma, x, \sigma + t)) \in \mathbb{R} \times X$$

jest potokiem lokalnym na $\mathbb{R} \times X$. Zbiór $\mathbb{R} \times X$ nazywamy *rozszerzoną przestrzenią fazową*. Będziemy używać oznaczenia $\Phi_{(\sigma,t)}(x)$ zamiast $\Phi(\sigma, x, t)$. Wtedy

$$\Phi_{(\sigma,\sigma)} = \mathrm{id}_{\mathrm{X}}, \quad \Phi_{(\sigma,t)} = \Phi_{(s,t)} \circ \Phi_{(\sigma,s)}.$$

Pojęcie procesu lokalnego jest motywowane przez własności rozwiązań nieautonomicznych równań różniczkowych: jeżeli $v : \mathbb{R} \times M \to TM$ jest zależnym od czasu, gładkim polem wektorowym na rozmaitości M to układ równań

$$t' = 1, \quad x' = v(t, x)$$

generuje potok lokalny φ na $\mathbb{R} \times M$ i proces lokalny Φ na M taki, że

$$\varphi(s, (t_0, x_0)) = (s + t_0, \Phi_{(t_0,s+t_0)}(x_0))$$

gdzie $\Phi_{(t_0,s)}(x_0)$ jest wartością rozwiązania wysyconego problemu

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

w chwili s.

Definicja 1.4. Niech φ będzie potokiem lokalnym na X. Dla punktu $x \in X$ wyróżniamy zbiory

$$\varphi(x) := \varphi(I_x, x), \qquad \varphi^+(x) := \varphi([0, \omega_x), x), \qquad \varphi^-(x) := \varphi((\alpha_x, 0], x)$$

i nazywamy je, odpowiednio, *orbitą*, *dodatnią półorbitą* i *ujemną półorbitą* punktu x.

Niech $x \in X$. Odwzorowanie $\sigma : I_x \to X$ nazywamy *rozwiązaniem przechodzącym przez* x, jeżeli

$$\sigma(0) = x, \quad \varphi_t(\sigma(\tau)) = \sigma(t + \tau).$$

Mówimy, że zbiór $A \subset X$ jest *niezmienniczy* dla potoku lokalnego φ, jeżeli dla każdego $x \in A$ istnieje rozwiązanie σ przechodzące przez x takie, że $\sigma(I_x) \subset A$.

Punkt x nazywamy *punktem stacjonarnym*, jeżeli $\varphi(x) = \{x\}$. Oczywiście wtedy $A = \{x\}$ jest zbiorem niezmienniczym. Podobna własność zachodzi dla *punktów okresowych*, czyli takich x, dla których $\varphi_T(x) = x$ dla pewnego $T > 0$. Orbita $A = \varphi(x)$ takiego punktu również jest zbiorem niezmienniczym.

Zbiorem orbit ograniczonych dla potoku φ nazywamy zbiór punktów $x \in X$ takich, że $\varphi(x)$ jest zbiorem ograniczonym.

Definicja 1.5. Zbiory

$$\alpha(x) := \bigcap_{t\in(\alpha_x,0]} \overline{\varphi((\alpha_x,t],x)} \qquad \text{oraz} \qquad \omega(x) := \bigcap_{t\in[0,\omega_x)} \overline{\varphi([t,\omega_x),x)}$$

nazywamy odpowiednio *zbiorem α–granicznym* i *ω–granicznym* punktu x.

Łatwo sprawdzić, że jeżeli $\omega(x) \neq \emptyset$ (odpowiednio: $\alpha(x) \neq \emptyset$), to $\omega_x = \infty$ (odpowiednio: $\alpha_x = -\infty$) oraz $\omega(x)$ (odpowiednio: $\alpha(x)$) jest niezmienniczy.

Kolejne definicje pochodzą z [**BS**] i [**S4**]:

Definicja 1.6. Dla $S \subset X$, zbiór

$$A(S) = \{x \in X : \emptyset \neq \omega(x) \subset S\}$$

jest *obszarem przyciągania* zbioru S.

Definicja 1.7. S jest *atraktorem* jeżeli $A(S)$ jest otoczeniem S.

Definicja 1.8. S jest *stabilny* jeśli każde U, będące otoczeniem S, zawiera V – dodatnioniezmiennicze (tj. takie, że dla każdego $x \in V$, $\varphi^+(x) \subset V$) otoczenie S. S jest *asymptotycznie stabilny* jeśli jest zbiorem stabilnym i atraktorem. S jest *globalnie asymptotycznie stabilny* jeśli jest asymptotycznie stabilny i $A(S) = X$.

1.2. Stopień Brouwera i indeks punktu stałego

Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwarty. Mówimy, że funkcja ciągła $f : U \to \mathbb{R}^n$ jest *d-zwarta*, jeżeli $f^{-1}(\{0\})$ jest zwarty.

Twierdzenie 1.9. Istnieje dokładnie jedna funkcja która każdej funkcji d-zwartej przypisuje liczbę całkowitą $d(f)$ (nazywaną *stopniem Brouwera* funkcji f) i spełniająca opisane poniżej warunki:

- (Lokalizacja) Jeżeli $f : U \to \mathbb{R}^n$ jest d-zwarte, $f^{-1}(\{0\}) \subset V \subset U$ i V otwarty, to
$$d(f|_V) = d(f).$$
- (Jedynka) Jeżeli $i : U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ jest inkluzją zbioru otwartego, to
$$d(i) = \begin{cases} 1, & 0 \in U; \\ 0, & 0 \notin U. \end{cases}$$
- (Addytywność) Jeżeli $U_1, U_2 \subset U$ są otwarte, $f|_{U_1}$, $f|_{U_2}$ są d-zwarte i $U_1 \cap U_2 \cap f^{-1}(0) = \emptyset$, to
$$d(f|_{U_1\cup U_2}) = \deg(f|_{U_1}) + \deg(f|_{U_2}).$$
- (Homotopijna niezmienniczość) Jeżeli $F : U \times I \to \mathbb{R}^n$ jest d-zwartą homotopią ($F^{-1}(\{0\})$ zwarty), to
$$d(F_0) = d(F_1).$$

- (Multiplikatywność) Jeżeli $f : U \to \mathbb{R}^n$, $g : V \to \mathbb{R}^m$ są d-zwarte, to $f \times g$ też jest d-zwarte oraz
$$d(f \times g) = d(f) \cdot d(g).$$
- (Rozwiązalność) Jeżeli $d(f) \neq 0$, to istnieje $x \in U$ taki, że $f(x) = 0$.
- (Izomorfizm liniowy) Odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest d-zwarte tylko wtedy, gdy jest izomorfizmem i wtedy
$$d(f) = \operatorname{sgn}\det f.$$
- (Wartość regularna) Jeżeli $f : U \to \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem d-zwartym klasy C^1 oraz 0 jest wartością regularną, to $f^{-1}(\{0\})$ jest zbiorem skończonym oraz
$$d(f) = \sum_{x \in f^{-1}(\{0\})} \operatorname{sgn}\det d_x f.$$

Dla $f : U \to \mathbb{R}^n$ definiujemy $F : U \ni x \to x - f(x) \in \mathbb{R}^n$. Wtedy
$$\operatorname{Fix}(f) := \{x \in U : f(x) = x\} = F^{-1}(\{0\}).$$
Mówimy, że f jest dopuszczalne, jeżeli F jest d-zwarte, czyli $\operatorname{Fix}(f) \subset U$ jest zwarty. Dla takiego f definiujemy *indeks punktu stałego* przez
$$\operatorname{ind}(f) := d(F).$$
Oczywiście, jeżeli $\operatorname{ind}(f) \neq 0$, to $\operatorname{Fix}(f) \neq \emptyset$.

Indeks punktu stałego ma następujące własności:

- (Lokalizacja) Jeżeli $V \subset U$ otwarty, $\operatorname{Fix}(f) \subset V$, to $\operatorname{ind}(f) = \operatorname{ind}(f|_V)$.
- (Funkcja stała) Jeżeli $f : U \ni x \to x_0 \in \mathbb{R}^n$ jest stała, to
$$\operatorname{ind}(f) = \begin{cases} 1, & x_0 \in U; \\ 0, & x_0 \notin U. \end{cases}$$
- (Addytywność) Jeżeli $V, W \subset U$ są otwarte i $f|_V$, $f|_W$ są dopuszczalne i $V \cap W \cap \operatorname{Fix}(f) = \emptyset$, to
$$\operatorname{ind}(f|_{V \cup W}) = \operatorname{ind}(f|_V) + \operatorname{ind}(f|_W).$$
- (Homotopijna niezmienniczość) Jeżeli $F : U \times I \to \mathbb{R}^n$ jest dopuszczalną homotopią, czyli
$$\operatorname{Fix}(F) = \{(x,t) \in U \times I : F(x,t) = x\}$$
jest zwarty, to $\operatorname{ind} F_0 = \operatorname{ind} F_1$.
- (Multiplikatywność) Jeżeli $f : U \to \mathbb{R}^n$, $g : V \to \mathbb{R}^k$ są dopuszczalne, to $f \times g : U \times V \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ jest też dopuszczalne oraz
$$\operatorname{ind}(f \times g) = \operatorname{ind}(f) \cdot \operatorname{ind}(g).$$

- (Komutatywność) Niech $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^k$ będą otwarte, $f : U \to \mathbb{R}^k$, $g : V \to \mathbb{R}^n$ będą ciągłe. Wtedy złożenia
$$gf : f^{-1}(V) \to \mathbb{R}^n, \quad fg : g^{-1}(U) \to \mathbb{R}^k$$
mają ten same zbiór punktów stałych $\mathrm{Fix}\,(fg) = \mathrm{Fix}\,(gf)$ i jeżeli jest on zwarty, to
$$\mathrm{ind}\,(fg) = \mathrm{ind}\,(gf).$$

Definicja 1.10. Mówimy, że przestrzeń metryczna X jest ENR-em (*euklidesowym retraktem otoczeniowym*), jeżeli X jest retraktem zbioru otwartego w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$.

Obserwacja 1.11. Skończone wielościany, skończone CW-kompleksy, rozmaitości topologiczne są ENR-ami.

Niech X będzie ENR-em, $U \subset X$ otwarty i $f : U \to X$ dopuszczalne, czyli $\mathrm{Fix}(f)$ jest zwarty. Niech $V \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwarty i $r : V \to X$, $s : X \to V$ będą takie, że $rs = \mathrm{id}_X$. Rozważmy odwzorowanie
$$sfr_| : r^{-1}(U) \ni x \to sfr(x) \in V.$$

Wtedy zbiory punktów stałych $\mathrm{Fix}\,(f)$, $\mathrm{Fix}\,(sfr_|)$ są homeomorficzne (homeomorfizmy są dane przez restykcje odwzorowań r i s).

Definiujemy indeks punktu stałego f przez
$$\mathrm{ind}\,(f) := \mathrm{ind}\,(sfr_|).$$

Definicja jest poprawna, bo jeżeli $V' \subset \mathbb{R}^k$, $r' : V' \to X$, $s' : X \to V'$ są takie, że $r's' = \mathrm{id}_X$, to dla odwzorowań
$$s'fr_| : r^{-1}(U) \to V', \quad sr'_| : V' \to V$$
mamy
$$(sr'_|)(s'fr_|) = sfr_|, \quad (s'fr_|)(sr'_|) = s'fr'_|$$
więc z komutatywności
$$\mathrm{ind}\,(sfr_|, r^{-1}(U)) = \mathrm{ind}\,(s'fr'_|, r'^{-1}(U)).$$

□

Jeżeli $K \subset \mathrm{Fix}\,(f)$ jest zwarty i otwarty w $\mathrm{Fix}\,(f)$ to definiujemy $\mathrm{ind}(f, K) = \mathrm{ind}\,(f|V)$ gdzie $V \subset U$ jest otwartym otoczeniem K takim, że $V \cap \mathrm{Fix}\,(f) = K$.

Niech X będzie zwartym ENR-em, a F ciałem. Wtedy kompleks homologii singularnych
$$H_*(X, F) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H_i(X, F)$$

jest skończenie generowany (wszystkie przestrzenie wektorowe $H_i(X,F)$ mają wymiar skończony i prawie wszystkie są zerowe). Dla $f : X \to X$ ciągłego definiujemy liczbę Lefschetza $L(f;F) \in F$ przez

$$L(f;F) := \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \mathrm{tr}\, H_i(f).$$

Z definicji wynika, że odwzorowania homotopijne mają takie same liczby Lefschetza.

Obserwacja 1.12. Analogicznie można zdefiniować liczbę Lefschetza używając funktora kohomologii singularnych. Ponieważ F jest ciałem, to $\mathrm{tr}\, H^i(f) = \mathrm{tr}\, H_i(f)$ i w konsekwencji liczby Lefschetza są równe.

Twierdzenie 1.13. Liczba $L(f,\mathbb{Q})$ jest całkowita oraz dla ciała F mamy

$$L(f;F) = \begin{cases} L(f;\mathbb{Q}), & \mathrm{char}\,(F) = 0; \\ L(f;\mathbb{Q}) \bmod p, & \mathrm{char}\,(F) = p. \end{cases}$$

Definiujemy $L(f) := L(f;\mathbb{Q})$.

Twierdzenie 1.14. Macierz $H_*(f) : H_*(X;\mathbb{Q}) \to H_*(X;\mathbb{Q})$ ma współczynniki całkowite i jest równa macierzy homomorfizmu indukowanego na $H_*(X;\mathbb{Z})/\mathrm{Tor}(H_*(X,\mathbb{Z}))$. W szczególności, $L(f)$ nie zależy od części torsyjnej $H_*(X;\mathbb{Z})$.

Twierdzenie 1.15 (Lefschetz). Jeżeli X jest zwartym ENR-em i $f : X \to X$ jest ciągłe, to

$$L(f) = \mathrm{ind}\,(f).$$

W szczególności, jeżeli $L(f) \neq 0$, to f ma punkt stały.

Załóżmy, że X jest ENR-em.

Niech $U \subset X$ będzie otwarty i taki, że $\overline{U}$ jest zwarty. Załóżmy, że φ nie ma punktów stacjonarnych na brzegu U. Ze zwartości $\overline{U}$ istnieje $\epsilon > 0$ takie, że

$$\mathrm{Fix}\,(\varphi_t) \cap \partial U = \emptyset, \quad 0 < t < \epsilon.$$

Wtedy

$$\mathrm{Fix}\,(\varphi_t) \cap U = \mathrm{Fix}\,(\varphi_t) \cap \overline{U}, \quad 0 < t < \epsilon$$

czyli $\varphi|_U$ ma zwarty zbiór punktów stałych, więc indeks punktu stałego $\mathrm{ind}\,(\varphi|_U)$ jest zdefiniowany dla $0 < t < \epsilon$ i z własności homotopii nie zależy od wyboru t. Definiujemy indeks punktu stacjonarnego dla potoku φ w U przez

$$i(\varphi, U) := \mathrm{ind}\,(\varphi|_U), \quad 0 < t < \epsilon.$$

TWIERDZENIE 1.16. *Jeżeli potok φ jest generowany przez ciągłe pole wektorowe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, to*

$$i(\varphi, U) = d(-f|_U).$$

Dowód: Załóżmy, że $0 < T < \epsilon$ definiujemy $H : \overline{U} \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ przez

$$H(x,t) := \begin{cases} \frac{\varphi_t(x)-x}{t}, & \text{gdy } t > 0; \\ f(x), & \text{gdy } t = 0. \end{cases}$$

Z homotopijnej niezmienniczości stopnia wystarczy pokazać, że H jest ciągła. Niech $(x_j, t_j) \to (x, 0) \in \overline{U} \times [0,1]$. Pokażemy, że $H(x_j, t_j) \to H(x, 0)$. Można założyć, że $t_j > 0$. $\frac{d}{dt}(\varphi_t(x)) = f(\varphi_t(x))$, zatem

$$\varphi_t(x) - x = \int_0^{t_j} (f(\varphi_\tau(x)) - x) d\tau$$

Wtedy

$$H(x_j, t_j) - f(x) = \frac{\varphi_t(x_j) - x_j}{t} - f(x) = \frac{1}{t_j} \int_0^{t_j} (f(\varphi(\tau, x_j)) - f(x)) d\tau.$$

Niech $a > 0$ będzie ustalone. $\overline{U} \times [0,T]$ jest zwarty, więc $M = \varphi(\overline{U} \times [0,T])$ jest zwarty. Z jednostajnej ciągłości f na M istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\|\varphi(\tau, x_j)) - x\| < \delta \Rightarrow \|f(\varphi(\tau, x_j)) - f(x)\| < a.$$

Ponieważ $(x_j, t_j) \to (x, 0)$, z ciągłości potoku $\|\varphi(\tau, x_j) - x\| < \delta$ dla $\tau \in [0, t_j]$. □

1.3. Liczba Nielsena

Liczba Nielsena jest homotopijnym niezmiennikiem, który daje dolne ograniczenie na liczbę punktów stałych odwzorowania $f : X \to X$, gdzie X jest zwartym ENR-em. Szczegółowy opis teorii przedstawionej w tym podrozdziale znaleźć można na przykład w [**JM, J**].

Niech X będzie zwartym ENR-em, a $f : X \to X$ – funkcją ciągłą. W zbiorze punktów stałych $\operatorname{Fix}(f)$ definiujemy relację równoważności: $x \sim y$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje łuk $\alpha : [0,1] \to X : \ \alpha(0) = x, \ \alpha(1) = y$, taki, że α jest homotopijne z $f \circ \alpha$ (rel$\{0,1\}$). Relacja ta dzieli zbiór $\operatorname{Fix}(f)$ na klasy równoważności, zwane *klasami Nielsena.*

Okazuje się, że każda klasa Nielsena K jest zwarta, więc można dla niej zdefiniować indeks punktu stałego $\operatorname{ind}(f, K)$. Jeśli $\operatorname{ind}(f, K) \neq 0$, to K nazywamy istotną klasą Nielsena.

DEFINICJA 1.17. *Liczbą Nielsena* dla odwzorowania f nazywamy liczbę istotnych klas Nielsena tego odwzorowania. Oznaczamy ją przez $N(f)$.

WŁASNOŚĆ 1.18. Zachodzą poniższe zależności:

- $\#\mathrm{Fix}\,(f) \geq N(f)$.
- Jeśli $f, g : X \to X$ i $f \simeq g$, to $N(f) = N(g)$.
- Jeśli f jest stała, to $N(f) = 1$.
- $N(\mathrm{id}_X) = \begin{cases} 1, \text{ jeżeli } \chi(X) \neq 0 \\ 0, \text{ jeżeli } \chi(X) = 0 \end{cases}$.
- Jeśli X jest jednospójny, to $N(f) = \begin{cases} 1, \text{ jeżeli } L(f) \neq 0 \\ 0, \text{ jeżeli } L(f) = 0 \end{cases}$.
- Jeśli $X = \mathbb{S}^1$, to $N(f) = |L(f)| = |1 - d(f)|$.
- (Wecken) Jeśli X jest rozmaitością zwartą, n-wymiarową, $n \neq 2$, a $f : X \to X$ jest homeomorfizmem to istnieje $g : X \to X$, homotopijne z f i takie, że $\#\mathrm{Fix}\,(g) = N(g) = N(f)$. Dla $n = 2$ twierdzenie to jest prawdą, o ile $\chi(X) \geq 0$.

W tej pracy szczególnie istotna będzie teoria relatywnej liczby Nielsena dla odwzorowań par zwartych ENR-ów $f : (X, A) \to (X, A)$, po raz pierwszy wprowadzona w [**Sc1**], rozwinięta np. w [**Zh**]. Niech K będzie klasą Nielsena dla $f : X \to X$. *K zachowuje swój indeks w A*, jeśli $\mathrm{ind}\,(f, K) = \mathrm{ind}\,(f|_A, K \cap A)$.

Definicja 1.19. Liczba Nielsena domknięcia $N(f, \mathrm{cl}\,(X \setminus A))$ [1] to liczba klas Nielsena, które nie zachowują swojego indeksu w A.

Ta liczba również jest niezmiennikiem homotopijnym i stanowi dolne ograniczenie na ilość punktów stałych f na $\overline{(X \setminus A)}$. Przedstawienie konkretnych przykładów dotyczących relatywnej liczby Nielsena odłożymy do rozdziału 3.4.

1.4. Bloki izolujące

Niech X będzie metryczna, lokalnie zwarta i φ niech będzie potokiem (lokalnym) na X. Dla $Z \subset X$ definiujemy

$$Z^- = \{x \in Z : \varphi(x, [0, t]) \not\subset Z \ \forall t > 0\},$$

$$Z^+ = \{x \in Z : \varphi(x, [-t, 0]) \not\subset Z \ \forall t > 0\},$$

$$\mathrm{Inv}^\pm(Z) = \{x \in Z : \varphi^\pm(x) \subset Z\}, \quad \mathrm{Inv}(Z) = \mathrm{Inv}^+(Z) \cap \mathrm{Inv}^-(Z),$$

oraz funkcje czasu wyjścia z Z i wejścia do Z, $\sigma^\pm : Z \to [0, \infty]$ przez

$$\sigma^+(x) = \sup\{t \geq 0 : \varphi(x, [0, t]) \subset Z\},$$

$$\sigma^-(x) = \sup\{t \geq 0 : \varphi(x, [-t, 0]) \subset Z\}.$$

Definicja 1.20. Zbiór $B \subset X$ nazywamy *zbiorem Ważewskiego* dla potoku φ jeśli B i B^- są domknięte w X.

[1] W tym miejscu cl jest formalną notacją – jak się okaże w podrozdziale 3.4, nie oznacza to domknięcia zbioru $(X \setminus A)$, co podkreślam, nie używając ustalonego w tej pracy zapisu $\overline{(X \setminus A)}$.

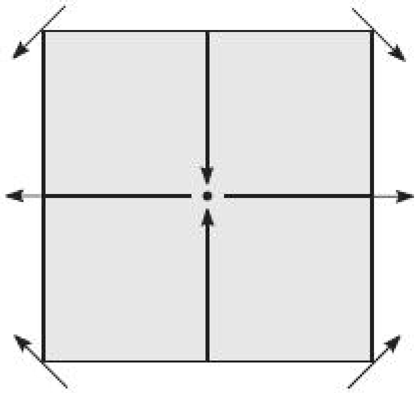
Dowodzi się, że jeśli B jest zbiorem Ważewskiego, a $B^* = \{x \in B : \varphi^+(x) \setminus B \neq \emptyset\}$, to σ^+, funkcja czasu wyjścia z B, jest ciągła na B^*. Jeśli dodatkowo $B^\pm$ są zbiorami zwartymi, to $\sigma\pm$ są ciągłe na B.

Definicja 1.21. Zbiór $B \subset X$ nazywamy *blokiem izolującym*, jeżeli

$$B = \overline{\operatorname{int} B},$$

B, B^- i B^+ są zwarte, oraz dla $x \in \partial B \setminus (B^+ \cup B^-)$,

$$\sigma^\pm(x) < \infty, \quad \varphi(x, [-\sigma^-(x), \sigma^+(x)]) \subset \partial B.$$



Rysunek 1.1. Najbardziej klasyczny przykład bloku izolującego: otoczenie punktu siodłowego na płaszczyźnie. Zbiorem B jest zacieniowany kwadrat, pogrubiona część brzegu (czyli prawa i lewa krawędź) stanowi zbiór wyjścia B^-, zaś pozostała część brzegu (czyli dolna i górna krawędź) to zbiór wejścia B^+.

Twierdzenie 1.22 (Srzednicki). Niech B będzie blokiem izolującym takim, że B i B^- są zwartymi ENR-ami. Wtedy

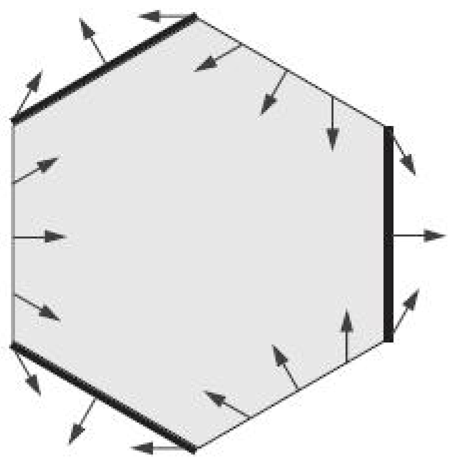
$$i(\varphi, \operatorname{int} B) = \chi(B, B^-) = \chi(B) - \chi(B^-).$$

W szczególności, jeżeli $\chi(B) - \chi(B^-) \neq 0$, to istnieje punkt stacjonarny $x_0 \in \operatorname{int} B$.

Dowód: Ustalmy $0 < T < \epsilon$ i rozważmy homotopię

$$H : B \times [0,1] \ni (x,t) \to \begin{cases} \varphi_{tT}(x), & tT \leq \sigma^+(x), \\ \varphi_{\sigma^+(x)}(x), & tT \geq \sigma^+(x), \end{cases}$$

gdzie σ^+ jest funkcją czasu wyjścia z bloku B. Ponieważ $H_0 = \mathrm{id_B}$, więc z homotopijnej niezmienniczości liczby Lefschetza i twierdzenia



RYSUNEK 1.2. Ilustracja twierdzenia 1.22. Zacieniowany obszar B jest blokiem izolującym dla potoku φ, którego zachowanie na ∂B opisują strzałki. Pogrubiona część ∂B to B^-. $i(\varphi, \operatorname{int} B) = \chi(B) - \chi(B^-) = 1 - 3 = -2$, a zatem w $\operatorname{int} B$ istnieje punkt stacjonarny potoku φ.

Lefschetza wynika, że $\chi(B) = L(H_0) = L(H_1) = \operatorname{ind}(H_1)$. Rozważmy rozłączne podzbiory otwarte B zdefiniowane przez

$$U = \{x \in B : \sigma^+(x) < \frac{T}{2}\}, \quad V = \{x \in B : \sigma^+(x) > T\}.$$

łatwo sprawdzić, że

$$\operatorname{Fix}(H_1) \subset U \cup V.$$

Wtedy z addytywności indeksu punktu stałego mamy

$$\operatorname{ind}(H_1) = \operatorname{ind}(H_1|_U) + \operatorname{ind}(H_1|_V).$$

Ponadto, $H_1(U) \subset B^-$ i $H_1|_{B^-} = \mathrm{id}_{B^-}$, czyli z własności komutatywności indeksu i liczby Lefschetza wynika, że

$$\chi(B^-) = \operatorname{ind}(H_1|_U),$$

więc ostatecznie

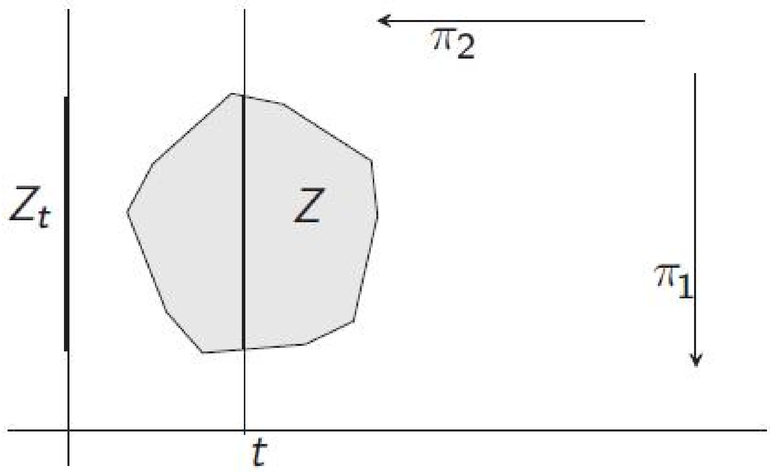
$$\operatorname{ind}(H_1|_V) = \chi(B) - \chi(B^-),$$

ale $H_1|_V = \varphi_T$ co kończy dowód.

1.5. Inne

Często w kolejnych rozdziałach pracy będą rozważane zbiory postaci $I \times U$, gdzie I jest przedziałem w $\mathbb{R}$ (współrzędną czasową potoku lub homotopii), a U jest podzbiorem przestrzeni fazowej X (współrzędną przestrzenną potoku lub homotopii). W takiej sytuacji obowiązują używał poniższe nazwy i oznaczenia (jak na rysunku 1.3):

- π_1 jest naturalnym rzutowaniem $I \times U$ na I ($\pi_1(t, x) = t$).
- π_2 jest naturalnym rzutowaniem $I \times U$ na U ($\pi_2(t, x) = x$).



RYSUNEK 1.3. Ilustracja oznaczeń: oś pozioma jest osią czasu, oś pionowa symbolizuje przestrzeń X.

- Jeśli $Z \subset I \times U$, to $Z_t = \{z \in \mathbb{R}^n \colon (t, z) \in Z\}$.
- $Z \subset I \times U$ jest T-okresowy, jeśli dla każdego $\tau \in I$, $Z_\tau = Z_{\tau+T}$.

Wszędzie, gdzie w tej pracy pojawiają się grupy homologii lub kohomologii, chodzi o homologie lub kohomologie singularne o współczynnikach wymiernych, o ile nie zostanie wyraźnie zaznaczone, że jest inaczej.

ROZDZIAŁ 2

Funkcje wiodące

2.1. Klasyczne wyniki teorii funkcji wiodących

Podstawy teorii funkcji wiodących (pierwotnie: potencjałów wiodących) stworzył M.A. Krasnosielski wraz ze swoimi współpracownikami. Twierdzenia z tego podrozdziału pochodzą z prac [**Kr1**],[**Kr2**],[**KP**],[**KS**] (prostsze dowody niektórych z nich można znaleźć w [**AO**]). Poniżej będą zacytowane za książką [**KZ**]. W różnych pracach definicje funkcji wiodącej mogą się nieznacznie różnić od siebie - w szczególności, nierówność (2.2) bywa skierowana w przeciwną stronę. Jednak, mutatis mutandis, wszystkie przedstawione poniżej twierdzenia pozostają prawdziwe. Konsekwencje poważniejszych zmian i uogólnień przedstawię w dodatku A.

Rozważmy nieautonomiczne równanie różniczkowe

$$x' = f(t, x), \tag{2.1}$$

gdzie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest ciągłym i lokalnie lipschitzowskim ze względu na x polem wektorowym.

Definicja 2.1. Funkcję $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ klasy C^1 nazywamy *funkcją wiodącą* dla pola wektorowego f jeśli istnieje $R > 0$ takie, że:

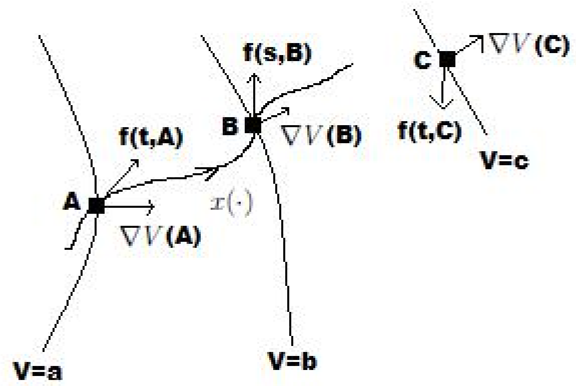
$$\nabla V(x) \cdot f(t, x) > 0 \tag{2.2}$$

dla $||x|| \geq R$, $t \in \mathbb{R}$.

Definicja doskonale odzwierciedla nazwę „funkcja wiodąca”: poza dyskiem o zadanym promieniu $R > 0$ wektor gradientu funkcji V wskazuje „mniej więcej ten sam kierunek” co pole wektorowe f, a co za tym idzie, trajektorie, będące rozwiązaniami równania (2.1), podążają „mniej więcej w kierunku wskazywanym przez gradient V” (patrz rysunek 2.1). Ta własność jest motywem przewodnim wszelkich przyszłych modyfikacji pojęcia funkcji wiodącej. W istocie, wartość funkcji wiodącej, poza dyskiem o promieniu R, rośnie wzdłuż rozwiązań równania (2.1), gdyż dla x - rozwiązania (2.1) zachodzi:

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot f(t, x(t)) > 0,$$

o ile $\|x(t)\| \geq R$.



Rysunek 2.1. Pole wektorowe f (oczywiście, poza kulą o promieniu R) musi wskazywać „mniej więcej ten sam kierunek” co gradient funkcji wiodącej V, tak jak w punktach A i B. Sytuacja taka, jak w punkcie C jest niedopuszczalna. Jako, że gradient V jest prostopadły do przedstawionych poziomic ($a < b$), to trajektoria $x(\cdot)$ „podąża w kierunku wyższych poziomic” V.

Definicja 2.2. *Indeksem funkcji wiodącej* V nazywamy liczbę:

$$\operatorname{Ind} V = \mathrm{d}\,(\nabla V|_{D_R}), \tag{2.3}$$

gdzie $D_R = \{x \in \mathbb{R} : \|x\| < R\}$ i d jest stopniem lokalnym Brouwera.

Z własności lokalizacji stopnia Brouwera i warunku (2.2) wynika, że dla każdego $r \geq R$ zachodzi:

$$\operatorname{Ind} V = \mathrm{d}\,(\nabla V|_{D_r}).$$

Definicja 2.3. Funkcja wiodąca $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dla pola wektorowego f jest *koercytywna* jeżeli

$$\lim_{\|x\|\to\infty} V(x) = \infty. \tag{2.4}$$

Znaczenie koercytywności pokazuje poniższa własność:

Własność 2.4. Niech $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie koercytywna. Jeżeli istnieje $R > 0$ takie, że $\nabla V(x) \neq 0$, gdy $|x| \geq R$, to $\mathrm{d}\,(\nabla V|_{D_r}) = 1$ dla $r > R$.

Poniżej przedstawimy ideę dowodu Własności 2.4 opartą na innym pomyśle niż ma to miejsce w oryginalnym dowodzie w [**KZ**].

Idea dowodu Własności 2.4: Niech φ będzie potokiem generowanym przez $x' = -\nabla V(x)$. $V(\varphi_t(x)) \leq V(x)$ dla $t \geq 0$, więc z koercytywności wynika, że dla każdego $M > 0$ zbiór $\{x \in \mathbb{R}^n : \quad V(x) \leq M\}$ jest zwarty, stąd dodatnie orbity φ są ograniczone, czyli są określone dla $t \in [0, +\infty)$. Ponadto, φ_t nie ma punktów stałych w $\{x : \|x\| = R\}$ dla $t > 0$, bo potoki gradientowe nie mają orbit okresowych, a wszystkie punkty stacjonarne są zawarte w D_R. Z Twierdzenia 1.16 otrzymujemy, że dla $t > 0$ zachodzi

$$d(\nabla V|_{D_R}) = d(\mathrm{id} - \varphi_t|_{D_R}).$$

Wystarczy pokazać, że

$$d(\mathrm{id} - \varphi_t|_{D_R}) = 1.$$

Dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ zbiór $\omega(x)$ jest niepusty i zawiera się w zbiorze punktów stacjonarnych dla φ, czyli w zbiorze zer ∇V, a więc zawiera się w kuli otwartej D_R.

Niech $M = \max_{\|x\| \leq R} V(x)$ i $N > M$. Wtedy $\overline{D_R} \subset V^{-1}((-\infty, N])$. Istnieje $r > 0$ takie, że

$$\overline{D_R} \subset V^{-1}((-\infty, N]) \subset D_r.$$

Niech $S = \{x : \|x\| = r\}$. Dla każdego $x \in S$ istnieje $t_x > 0$ takie, że $\varphi(t_x, x) \in V^{-1}((-\infty, N))$. Z ciągłości φ istnieje U_x otoczenie x takie, że $\varphi_{t_x}(U_x) \subset V^{-1}((-\infty, N))$. Ponieważ $V^{-1}((-\infty, N))$ jest dodatnio niezmienniczy, więc $\varphi_t(U_x) \subset V^{-1}((-\infty, N))$ dla $t > t_x$. Ze zwartości S wynika, że istnieje $t > 0$ takie, że $\varphi_t(S) \subset D_r$. Wtedy

$$d(\nabla V|_{D_R}) = d(\nabla V|_{D_r}) = d(\mathrm{id} - \varphi_t|_{D_r)}).$$

Ponadto, homotopia

$$H(x, s) = x - s\varphi_t(x)$$

pokazuje, że $d(\mathrm{id} - \varphi_t|_{D_r}) = d(\mathrm{id}\,|_{D_r)}) = 1$.

Niech $V_1, \ldots, V_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($k \geq 1$) będą funkcjami wiodącymi dla f, spełniającymi (2.2) dla $R > 0$.

Definicja 2.5. $V_1, \ldots, V_k$ jest *układem zupełnym funkcji wiodących* jeśli

$$\lim_{\|x\| \to \infty} |V_1(x)| + \ldots + |V_k(x)| = \infty. \tag{2.5}$$

Z własności (2.2) oraz własności homotopii stopnia Brouwera natychmiast otrzymujemy:

$$\mathrm{Ind}\, V_i = \mathrm{Ind}\, V_1, \quad i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Powyższą liczbę nazywamy *indeksem zupełnego układu funkcji wiodących.*

Dla równania różniczkowego (2.1) rozważam $\Omega = [a, b] \times \mathbb{R}^n$.

TWIERDZENIE 2.6 (Krasnosielski). *Załóżmy, że $V_1, \ldots, V_k$ jest zupełnym układem funkcji wiodących dla pola wektorowego f takim, że* $\operatorname{ind} V_1 \neq 0$. *Wtedy równanie* (2.1) *posiada przynajmniej jedno rozwiązanie takie, że $x(a) = x(b)$.*

Rozważamy nadal równanie 2.1 dla $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Niech teraz $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie funkcją ciągłą, T-okresową ze względu na t i lokalnie lipschitzowską ze względu na x. Z twierdzenia 2.6 natychmiast otrzymujemy wniosek:

WNIOSEK 2.7. *Załóżmy, że $V_1, \ldots, V_k$ jest zupełnym układem funkcji wiodących dla pola wektorowego f takim, że* $\operatorname{ind} V_1 \neq 0$. *Wtedy równanie* (2.1) *posiada przynajmniej jedno rozwiązanie T-okresowe.*

Teorię funkcji wiodących można też zastosować do wykrywania rozwiązań ograniczonych, określonych na całym zbiorze $\mathbb{R}$. Niech $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

TWIERDZENIE 2.8 (Krasnosielski). *Załóżmy, że $V_1, \ldots, V_k$ jest zupełnym układem funkcji wiodących dla pola wektorowego f takim, że* $\operatorname{ind} V_1 \neq 0$. *Wtedy równanie* (2.1) *posiada przynajmniej jedno rozwiązanie ograniczone.*

W tym miejscu warto zauważyć, że z własności 2.4 wynika, że pojedyncza koercytywna funkcja wiodąca sama tworzy układ zupełny funkcji wiodących.

PRZYKŁAD 2.9. Podamy warunek wystarczający na istnienie zupełnego układu funkcji wiodących dla perturbacji pewnych równań hamiltonowskich. Niech J będzie standardową macierzą symplektyczną wymiaru $2n \times 2n$, czyli

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Załóżmy, że $G, H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ są klasy C^2, $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ jest ciągła i lokalnie lipschitzowska ze względu na z, T-okresowa ze względu na t i istnieje $R > 0$ takie, że dla $\|z\| > R,\ t \in [0, T]$ zachodzi

$$\nabla G(z) \cdot J\nabla H(z) > \max\{\|q(t,z) \cdot \nabla G(z)\|, \|q(t,z) \cdot \nabla H(z)\|\}, \tag{2.6}$$

i

$$\lim_{\|z\| \to \infty} \|G(z)\| + \|H(z)\| = \infty. \tag{2.7}$$

Wtedy $\{G, -H\}$ tworzy zupełny układ funkcji wiodących dla równania:

$$z' = J\nabla(G + H)(z) + q(t, z). \tag{2.8}$$

W szczególności, jeśli $\operatorname{Ind} G \neq 0$, to (2.8) ma rozwiązanie T-okresowe.

Istotnie, dla $\|z\| > R$, $t \in [0,T]$ i $f(t,z) = J\nabla(G+H)(z) + q(t,z)$ dostaję:

$$\nabla G(z) \cdot f(t,z) = \nabla G(z) \cdot J\nabla H(z) + \nabla G(z) \cdot q(t,z) > 0,$$
$$-\nabla H(z) \cdot f(t,z) = -\nabla H(z) \cdot J\nabla G(z) - \nabla H(z) \cdot q(t,z) =$$
$$\nabla G(z) \cdot J\nabla H(z) - \nabla H(z) \cdot q(t,z) > 0.$$

□

W wielu przypadkach w znalezieniu zupełnego układu funkcji wiodących pomaga właściwa funkcja wiodąca.

Definicja 2.10. Funkcję $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ klasy C^1 nazywamy *regularną funkcją wiodącą* dla pola wektorowego f jeśli istnieje $\alpha_0 > 0$, $R > 0$ i funkcja $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ klasy C^1 takie, że:

$$\lim_{\|x\|\to\infty} W(x) = \infty,$$

$$\nabla V(x) \cdot f(t,x) > \alpha_0 ||\nabla V(x)||||f(t,x)||, \tag{2.9}$$
$$||\nabla W(x)|| < ||\nabla V(x)||,$$

dla $\|x\| \geq R$, $t \in \mathbb{R}$, $(t,x) \in \Omega$.

Obserwacja 2.11. Jeśli dla pola wektorowego f istnieje regularna funkcja wiodąca V to istnieje dla niego też zupełny układ funkcji wiodących o tym samym indeksie, co V. Układ ten tworzą funkcje V i $V + \alpha_0 W$.

Przykład 2.12. Rozważmy jednowymiarowe równanie:

$$x''(t) + ax'(t) + f(x) = g(t,x,x'),$$

gdzie g jest T-okresowe ze względu na pierwszą zmienną. Równanie to jest równoważne układowi:

$$\begin{cases} x'(t) = y \\ y'(t) = -f(x) - ay - g(t,x,y) \end{cases}. \tag{2.10}$$

Załóżmy, że liczby:

$$k_1 = \liminf_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \ k_2 = \limsup_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

są skończone i tego samego znaku, a g spełnia warunek:

$$\lim_{|x|+|y|\to\infty} \frac{g(t,x,y)}{|x|+|y|} = 0.$$

Wtedy $V(x,y) = ax^2 + 2xy$ jest regularną funkcją wiodącą dla pola wektorowego zadanego układem (2.10) o indeksie -1, jeśli liczby k_i są ujemne, zaś $V(x,y) = -a^3x^2 - 2a^2xy - 2ay^2 - 4a\int_0^x f(s)ds$ jest regularną funkcją wiodącą dla tego samego pola wektorowego o indeksie 1, o ile liczby k_i są dodatnie i $a \neq 0$.

W obydwu tych wypadkach, na podstawie wniosku 2.7 i obserwacji 2.11 istnieje T-okresowe rozwiązanie zadanego równania.

2.2. Funkcje wiodące i zwartość zbioru orbit ograniczonych

Używając metody funkcji wiodących, możemy otrzymać więcej informacji, niż tylko te o istnieniu rozwiązań. W tym podrozdziale, na podstawie pracy [**Ko2**] pokażemy, jak przy pomocy funkcji wiodących sformułować kryterium (przestrzennej) zwartości zbioru orbit ograniczonych.

Własność ta jest o tyle ważna, że zbiór orbit ograniczonych w wielu zagadnieniach jest naturalnym kandydatem na zbiór niezmienniczy izolowany. Na przykład, używając teorii indeksu Conleya do badania rozmaitych własności danego układu dynamicznego, koniecznym jest zapewnienie sobie istnienia zwartego zbioru niezmienniczego izolowanego dla którego konstruuje się otoczenie izolujące.

W przypadku nieautonomicznym niejasnym byłoby samo sformułowanie „zwartość zbioru orbit ograniczonych”, zatem w tym podrozdziale ograniczę się do równań autonomicznych postaci:

$$x' = f(x), \tag{2.11}$$

gdzie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest funkcją lokalnie lipschitzowską. Równanie to zadaje (przynajmniej lokalny) układ dynamiczny φ.

Definicja 2.13. Funkcję ciągłą $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazywamy *funkcją słabo wiodącą dla pola wektorowego f* [1] jeśli istnieje $R > 0$ takie, że

$$V(\varphi_{t_0}(x)) < V(\varphi_{t_1}(x)) \tag{2.12}$$

dla $t_1 > t_0$, jeśli tylko $\|\varphi_t(x)\| \geq R$ dla każdego $t \in [t_0, t_1]$.

Oczywiście, każda funkcja wiodąca jest też słabo wiodąca. Analogicznie jak dla funkcji wiodących można zdefiniować:

Definicja 2.14. $V_1, \ldots, V_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest *zupełnym układem funkcji słabo wiodących* jeżeli wszystkie te funkcje są słabo wiodące i:

$$\lim_{\|x\| \to \infty} |V_1(x)| + \ldots + |V_k(x)| = \infty. \tag{2.13}$$

Twierdzenie 2.15. *Jeśli istnieje $V_1, \ldots, V_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — zupełny układ funkcji słabo wiodących dla pola wektorowego f, to zbiór orbit ograniczonych φ jest zwarty.*

[1] Określenie to zostało stworzone wyłącznie na potrzeby tej pracy. W istocie, jest to globalna funkcja Lapunowa. Nazwa ma podkreślić podobieństwo z funkcjami wiodącymi zdefiniowanymi przez Krasnosielskiego.

Warty podkreślenia w tym twierdzeniu jest brak konieczności uzyskania informacji o indeksie funkcji V_i. W zamian, nie ma żadnej gwarancji, że zbiór orbit ograniczonych jest niepusty[2].

DOWÓD. Niech $R > 0$ będzie takie, że ((2.12)) zachodzi dla każdego V_i i $||x|| > R$. Definiujemy:

$$M = \max_{i\in\{1,\dots,k\}} \max_{||x||\le R} |V_i(x)|.$$

Dla dowolnie wybranego $c > M$ definiujemy:

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall i \in \{1,\dots k\}\ -c \le V_i(x) \le c\}.$$

Warto zauważyć, że zbiór A jest zwarty dzięki (2.13).

Niech punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ będzie taki, że jego orbita $\varphi(x_0)$ jest ograniczona, ale nie zawiera się w A. Stąd, istnieje $i \in \{1,\dots k\}$ i $t_0 \in \mathbb{R}$ takie, że $V_i(\varphi_{t_0}(x_0)) > c$ (lub też $i \in \{1,\dots k\}$ i $t_0 \in \mathbb{R}$ takie, że $V_i(\varphi_{t_0}(x_0)) < -c$. Jednak dowód wtedy jest analogiczny, więc bez utraty ogólności możemy rozważać tylko pierwszy z tych przypadków). V_i silnie rośnie wzdłuż orbit w $(\mathbb{R}^n \setminus D_R)$ i $D_R \subset \operatorname{int} A$, zatem z ograniczoności $\varphi(x_0)$

$$\lim_{t\to\infty} V_i(\varphi_t(x_0)) = \sup_{t\ge t_0} V_i(\varphi_t(x_0)) = l,$$

gdzie $l \in (c, +\infty)$. Jako, że $\varphi^+(x_0)$ jest ograniczone, $\omega(x_0) \neq \emptyset$ i $\omega(x_0) \subset V_i^{-1}(\{l\})$ (w szczególności, $l \neq +\infty$ and $\omega(x_0) \cap A = \emptyset$). $\omega(x_0)$ jest zbiorem niezmienniczym, więc składa się z całych orbit, zawierających się w $V_i^{-1}(\{l\})$. Jednocześnie (ponieważ V_i jest silnie rosnąca wzdłuż orbit poza A), nie istnieją orbity zawarte w pojedynczej poziomicy V_i, dlatego taki punkt x_0 (i, co za tym idzie, taka orbita ograniczona) nie może istnieć.

Zatem, zbiór orbit ograniczonych B jest niezmienniczym podzbiorem zbioru zwartego A, podobnie jak jego domknięcie $\overline{B}$. Jednakże, $\overline{B}$ jest ograniczony, czyli składa się wyłącznie z orbit ograniczonych, dlatego $B = \overline{B}$. Ostatecznie, B jest domkniętym podzbiorem zbioru zwartego, czyli B jest zwarty. □

Dzięki powyższemu twierdzeniu można znacząco uprościć dowód kryterium uzyskanego w [**TQ**]:

TWIERDZENIE 2.16 (Tusen,Qi). *Zbiór orbit ograniczonych B jest zwarty i globalnie asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja ciągła $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, taka, że $\lim_{||x||\to\infty} g(x) = -\infty$ i zbiór domknięty ograniczony $K \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $f(x) \neq 0$ dla $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ i*

[2] Dodatkowo, w późniejszych rozdziałach pojawi się obserwacja, że w twierdzeniach o funkcjach wiodących założenie (2.2) można ograniczyć do pewnych poziomic V_i. W tym twierdzeniu efekt zwartości jest na tyle „globalny”, że i założenie (2.2) musi być spełnione globalnie. Dlatego tego podrozdziału nie da się przełożyć na język segmentów izolujących.

$g(\varphi_t(x)) > g(x)$ dla $\varphi_{[0,t]}(x) \subset \mathbb{R}^n \setminus K$, $t > 0$ (czyli g jest wiodąca poza zbiorem K).

Poniżej udowodnimy tylko zwartość i asymptotyczną stabilność zbioru B przy założeniu istnienia funkcji g. Implikacja w przeciwną stronę jest natychmiastowym wnioskiem z pewnej własności udowodnionej w [**BS**], tak jak pokazano w [**TQ**].

W dowodzie skorzystamy z lematu pochodzącego z [**S4**] (Twierdzenie 2.4.):

LEMAT 2.17 (Srzednicki). *Jeśli istnieje A - zwarty podzbiór $\mathbb{R}^n$ taki, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$ zachodzi $\varphi^+(x) \cap A \neq \emptyset$, wtedy istnieje niepusty, zwarty, niezmienniczy i globalnie asymptotycznie stabilny zbiór S.*

DOWÓD. Z twierdzenia 2.15 natychmiast wynika, że B jest zbiorem zwartym (bo g jest wiodąca poza każdym dyskiem zawierającym zbiór K i $\lim_{\|x\|\to\infty} |g(x)| = \infty$).

K jest zbiorem zwartym. Zatem można zdefiniować:

$$m = \min_{x\in K} g(x), \ M = \max_{x\in K} g(x).$$

Dla ustalonych $c < m$ i $C > M$ można zdefiniować:

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : c \leq g(x) \leq C\}.$$

Zbiór A jest zwarty i taki, że

$$\varphi^+(x) \cap A \neq \emptyset,$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$. Istotnie, jeżeli $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus A$ wtedy dla każdego $x \in \varphi^+(x_0)$ zachodzi $g(x) > g(x_0)$. Dlatego, $\varphi^+(x)$ jest ograniczne i, analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 2.15, $\emptyset \neq \omega^+(x) \subset K$. Zatem $\varphi^+(x) \cap A \neq \emptyset$, jako, że $K \subset \operatorname{int} A$.

Teraz można zastosować lemat 2.17 dla zbioru A. Stąd, istnieje niepusty, zwarty, niezmienniczy i globalnie asymptotycznie stabilny zbiór S. Ze zwartości i niezmienniczości S wynika, że składa się on z orbit ograniczonych, zatem B jest zbiorem niezmienniczym zawierającym globalnie asymptotycznie stabilny zbiór S. Jednocześnie, dla każdego $x \in B$, $\alpha(x)$ jest niepusty, zwarty i niezmienniczy, zatem (znów ze zwartości i globalnej asymptotycznej stabilności S) $\alpha(x) \cap S \neq \emptyset$. Dlatego, dla każdego V - otoczenia S, $\varphi^-(x) \cap V \neq \emptyset$. Stąd i z definicji stabilności, orbita x musi się zawierać w dowolnym otoczeniu S, więc $x \in S$, a zatem $B = S$. □

Poniżej przedstawimy przykład zastosowania Twierdzenia 2.15 w sytuacji, gdy Twierdzenie 2.16 nie działa.

PRZYKŁAD 2.18. Funkcję $f = (u, v) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nazywamy *antyholomorficzną* jeżeli $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ są funkcjami klasy C^1 oraz

$$u_x = -v_y, \ u_y = v_x. \tag{2.14}$$

Funkcje takie posiadają interesującą własność: f jest funkcją antyholomorficzną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja holomorficzna $(G,H) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ taka, że $f = \nabla G = J\nabla H$, gdzie $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. W szczególności, układ $z' = f(z)$ jest w takiej sytuacji jednocześnie gradientowy i hamiltonowski. Istotnie, jeśli f jest antyholomorficzna, wtedy z faktu, że $u_y = v_x$ i lematu Poincarégo istnieje $G : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ takie, że $f = \nabla G$. Jednocześnie, $u_x = -v_y$ i ponownie lemat Poincarégo dowodzi, że istnieje $H : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ takie, że $f = J\nabla H$, więc $\nabla G = J\nabla H$. Ostatnia równość jest tak naprawdę równaniami Cauchy'ego-Riemanna dla (G,H), zatem (G,H) jest holomorficzna. Z drugiej strony, jeśli (G,H) jest holomorficzna i $f = \nabla G = J\nabla H$, to f spełnia (2.14), więc f jest antyholomorficzna.

Rozważmy wielomian

$$f : \mathbb{C} \ni z \to a_n\bar{z}^n + a_{n-1}\bar{z}^{n-1} + \ldots + a_1\bar{z} + a_0 \in \mathbb{C},\ a_i \in \mathbb{R}.$$

Wielomian ten jest antyholomorficzny, a zatem istnieją zdefiniowane powyżej funkcje G i H i układ $z' = f(z)$ jest gradientowy oraz hamiltowski. W ogólnym przypadku, funkcja g z twierdzenia 2.16 nie musi istnieć. Jednakże, funkcje G i $G + H$ tworzą zupełny układ funkcji wiodących (poza dyskiem zawierającym punkty stałe układu), zatem zbiór orbit ograniczonych jest zwarty (na podstawie kryterium 2.15).

Na tym przykładzie można zauważyć, że w ogólnym przypadku twierdzenia 2.15 nie ma szans na rozszerzenie tezy o stabilność zbioru orbit ograniczonych. Układ $z' = \bar{z}$ posiada tylko jedno rozwiązanie ograniczone, które nie jest stabilne. Jest to jednocześnie przykład sytuacji, w której funkcja g z twierdzenia 2.16 nie istnieje.

2.3. Funkcje wiodące zależne od czasu

Do tej pory jako funkcje wiodące rozważaliśmy odwzorowania określone na przestrzeni fazowej $\mathbb{R}^n$. Naturalnym rozwinięciem pojęcia funkcji wiodącej jest rozważanie jej jako funkcji określonej na rozszerzonej przestrzeni fazowej $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Takie rozszerzenie pojęcia okazało się przydatne w wykrywaniu rozwiązań ograniczonych, oraz jeszcze silniejszych własności typu asymptotycznej zbieżności. Po raz pierwszy funkcja wiodąca zależna od czasu (dokładniej, od czasu zależna była nie sama funkcja, ale warunek „wiedzenia") była zastosowana przez Avramescu w pracy [**Av1**] do wykrywania rozwiązań zanikających. W mniej lub bardziej zakamuflowany sposób, funkcje wiodące zależne od czasu pojawiły się ponadto w dwu pracach: [**Or1**] i [**LP**].

W artykule [**Av1**] rozważana była następująca sytuacja: Dane jest równanie (2.1) (czyli $x' = f(t,x)$ z odpowiednimi założeniami) i funkcja $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klasy C^1 spełniająca warunek $G(t) \geq 1$ [3] dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

W takiej sytuacji, można postawić następującą definicję:

DEFINICJA 2.19. Funkcję $V_G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ klasy C^1 na zbiorze $\mathbb{R}^n \setminus D_r$, dla pewnego $r > 0$ nazywamy *funkcją prawie G-wiodącą*[4], jeśli spełnia warunek:

$$\frac{d}{dt} V_G(G(t)x(t)) > 0,$$

dla rozwiązania $x(\cdot)$ o ile $x(t) \in \mathbb{R}^n \setminus D_r$.

Jeśli dodatkowo:

$$\lim_{||x|| \to +\infty} V_G(x) = +\infty,$$

to V_G nazywamy *koercytywną funkcją prawie G-wiodącą.*

DEFINICJA 2.20. Rozwiązanie $x(\cdot)$ równania (2.1) nazywamy *zanikającym* jeśli

$$\lim_{x \to -\infty} x(t) = \lim_{x \to +\infty} x(t) = 0.$$

Jeśli warunek ten spełniony jest tylko w $+\infty$, rozwiązanie to nazywamy *prawostronnie zanikającym.*

Avramescu podał dowód następującego twierdzenia:

TWIERDZENIE 2.21. *Jeśli dla równania* (2.1) *istnieje koercytywna funkcja prawie G-wiodąca, to równanie to posiada co najmniej jedno rozwiązanie takie, że dla pewnego* $\gamma > 0$

$$\|x(t)\| \leq \frac{\gamma}{G(t)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

W szczególności, jeśli G spełnia warunek koercytywności czyli, gdy $\lim_{|t| \to +\infty} G(t) = +\infty$, *to równanie* (2.1) *posiada rozwiązanie zanikające.*

Twierdzenie powyższe niestety jest fałszywe. Przykładowo dla równania

$$x'(t) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x}, \text{ jeżeli } ||x|| \geq 1 \\ 2, \text{ jeżeli } x \in (0,1) \\ 4x+2, \text{ jeżeli } x \in (-1,0] \end{cases},$$

funkcji $G(t) = 1+t^2$ oraz $V_G(t) = x^2$ i stałej $r = 2$ założenia twierdzenia są spełnione (patrz przykład 2.28), ale teza nie, gdyż istnieje tylko jedno rozwiązanie ograniczone $x \equiv -\frac{1}{2}$, a ono nie jest zanikające.

Po analizie dowodu, okazuje się, że twierdzenie będzie prawdziwe (nawet w wersji ogólniejszej) jeśli skorygujemy definicję 2.19.

[3] Jako minimum funkcji G można wybrać dowolne $a > 0$, lecz wybór $a = 1$ nie stanowi ograniczenia w stosowaniu odpowiednich wyników.

[4] Zasadność użycia słowa „prawie” za chwilę się wyjaśni

Definicja 2.22. Funkcję $V_G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ klasy C^1 na zbiorze $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, dla pewnego $r > 0$ nazywamy *funkcją G-wiodącą*, jeśli spełnia warunek:

$$\frac{d}{dt} V_G(G(t)x(t)) > 0,$$

dla rozwiązania $x(\cdot)$ o ile $\|x(t)\| \geq \frac{r}{G(t)}$.

Jeśli dodatkowo:

$$\lim_{||x|| \to +\infty} V_G(x) = +\infty,$$

to V_G nazywamy *koercytywną funkcją G-wiodącą.*

Definicja 2.23. *Indeksem funkcji G-wiodącej V_G* nazywamy liczbę:

$$\operatorname{Ind} V_G = \mathrm{d}\,(\nabla V_G|_{D_r}). \tag{2.15}$$

Z własności lokalizacji stopnia Brouwera i definicji funkcji G-wiodącej wynika, że zachodzi:

$$\operatorname{Ind} V_G = \mathrm{d}\,(\nabla V_G|_{D_\rho}),$$

przy założeniu, że

- $\rho > \frac{r}{G_0}$ dla $G_0 = \sup_{t \in \mathbb{R}} G(t) < +\infty$;
- $\rho > 0$ dla $G_0 = \sup_{t \in \mathbb{R}} G(t) = +\infty$;

Analogicznie jak w przypadku własności 2.4 zachodzi:

Własność 2.24. Niech $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie koercytywną funkcją G-wiodącą. Jeżeli istnieje $R > 0$ takie, że $\nabla V_G(x) \neq 0$, gdy $|x| \geq R$, to $\mathrm{d}\,(\nabla V_G|_{D_\rho}) = 1$ dla odpowiednio dużego ρ.

Warto też zauważyć, że tak jak w przypadku klasycznych funkcji wiodących, dowolne dwie funkcje G-wiodące dla f mają taki sam indeks. Wynika to natychmiast z aksjomatu homotopii stopnia Brouwera.

Definicja 2.25. Układ funkcji G-wiodących (dla ustalonego $r > 0$) $V_G^1, V_G^2, \ldots, V_G^k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N})$ klasy C^1 na zbiorze $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ nazywamy *układem zupełnym funkcji G-wiodących*, jeśli spełniają warunek koercytywności:

$$\lim_{||x|| \to \infty} |V_G^1(x)| + \ldots + |V_G^k(x)| = +\infty,$$

Prawdziwe wówczas jest twierdzenie:

Twierdzenie 2.26. *Niech $V_G^1, V_G^2, \ldots, V_G^k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie zupełnym układem funkcji G-wiodących dla pola wektorowego f, takim, że $\operatorname{Ind} V_G^1 \neq 0$.*

Wtedy równanie (2.1) *posiada co najmniej jedno rozwiązanie $x(\cdot)$ takie, że dla pewnego $\gamma > 0$ zachodzi*

$$\|x(t)\| \leq \frac{\gamma}{G(t)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

W szczególności, jeśli G spełnia warunek koercytywności, to równanie (2.1) *posiada rozwiązanie zanikające.*

Dowód tego twierdzenia zaprezentujemy w podrozdziale 4.2.

Warto zauważyć, że dla $G \equiv 1$ natychmiast sytuacja sprowadza się do twierdzenia Krasnosielskiego o rozwiązaniu ograniczonym.

Z powyższego twierdzenia i twierdzenia 2.4 wynika natychmiast:

WNIOSEK 2.27. *Jeśli dla równania* (2.1) *istnieje koercytywna funkcja G-wiodąca, to równanie to posiada co najmniej jedno rozwiązanie spełniające warunek:*

$$\exists_{\gamma>0} \forall_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\| \leq \frac{\gamma}{G(t)}.$$

Poniżej podajemy przykładowe zastosowanie podanego twierdzenia:

PRZYKŁAD 2.28. Udowodnimy, że równanie (2.1) posiada co najmniej jedno rozwiązanie zanikające, o ile dla każdego $x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}$ zachodzi $x \cdot f(t,x) > ||x||^2$.

W szczególności, założenie to jest spełnione, gdy $f = (f_1, \ldots, f_n)$ i dla każdego i zachodzi $f_i(t,x) = g_i(t,x)x_i + h_i(t,x)$, gdzie $g_i(t,x) > 1$ i $x_ih_i(t,x) \geq 0$.

Niech $V_G(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ i $G(t) = 1 + t^2$. Wtedy

$$\frac{d}{dt}V_G(G(t)x(t)) = 2x(t)G(t) \cdot (x(t)G'(t) + f(t,x)G(t)) =$$

$$= 2G(t)(||x(t)||^2G'(t) + G(t)x(t) \cdot f(t,x) =$$

$$= (2t^2+2)(x(t) \cdot f(t,x)t^2 + 2||x||^2t + x(t) \cdot f(t,x)).$$

Jako, że dla dowolnych $t \in \mathbb{R}$,$x \in \mathbb{R}^n$ zachodzi $x(t) \cdot f(t,x) > ||x||^2 \geq 0$, więc $\frac{d}{dt}V_G(G(t)x(t)) > 0$. Zatem G i V_G spełniają założenia twierdzenia 2.26 (a dokładnie wniosku z tego twierdzenia), czyli rozwiązanie zanikające istnieje.

W artykule [**Or1**], autor po raz pierwszy wykorzystał funkcje wiodące istotnie zależne od czasu. Nie tworzył jednak szerszej teorii, a jedynie pewien przykład zastosowania naturalnie sformułowanego pojęcia. Poniżej przedstawimy sytuację badaną przez Ortegę.

Rozważamy rozszerzoną przestrzeń fazową $[0,\infty) \times \mathbb{R}^3$, przy czym $\mathbb{R}^3$ rozkładamy na $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, ze współrzędnymi $\xi \in \mathbb{R}^2$ i $z \in \mathbb{R}$. W tym zbiorze rozważamy układ równań:

$$\begin{cases} \xi' = F(t,\xi,z) \\ z' = G(t,\xi,z) \end{cases}. \tag{2.16}$$

Niech $\varphi, \psi : [0,\infty) \to (0,\infty)$ będą funkcjami malejącymi, klasy C^1, takimi, że $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0$.

Dla funkcji $V(t, \xi, z)$ definiujemy

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \xi} \cdot F + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot G. \tag{2.17}$$

Jest to oczywiście pochodna V wzdłuż trajektorii potoku generowanego przez układ (2.16) w rozszerzonej przestrzeni fazowej.

Definicja 2.29. Funkcję V w tej sytuacji nazywamy wiodącą na zbiorze $A \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^3$, gdy dla każdego $x \in A$, $\dot{V}(x) > 0$.

Ortega rozważał trzy konkretne funkcje:

$V_1(t, \xi, z) = \psi(t) - z$; $V_2(t, \xi, z) = \psi(t) + z$; $V_3 = ||\xi||^2 - \varphi(t)^2$.

Twierdzenie 2.30 (Ortega). *Przy powyższych oznaczeniach, niech V_1 i V_2 będą funkcjami wiodącymi na zbiorze $A_1 = \{(t, \xi, z) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 : \ ||\xi|| \leq \varphi(t)\}$, a V_3 niech będzie funkcją wiodącą na zbiorze $A_3 = \{(t, \xi, z) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 : \ ||\xi|| = \varphi(t), \ |z| \leq \psi(t)\}$. Wtedy dla każdego $z \in [-\psi(0); \psi(0)]$ istnieje przynajmniej jedno rozwiązanie prawostronnie zanikające układu* (2.16)*, takie, że:*

$$||\xi(0)|| < \varphi(0), \ z(0) = z_0.$$

Prostszy dowód tego twierdzenia, z zastosowaniem teorii segmentów izolujących, przedstawimy również w podrozdziale 4.2.

Ostatnie twierdzenie tego rozdziału jest, o ile mi wiadomo, najsilniejszym rezultatem dotyczącym zastosowania zależnych od czasu funkcji wiodących do wykrywania rozwiązań ograniczonych. Zainspirowane jest wynikami nieopublikowanej jeszcze pracy [**LP**] (patrz dodatek A), jednak opiera się jedynie na założeniach topologicznych i posiada o wiele prostszy dowód.

Rozważamy równanie: $x' = f(t, x)$, gdzie $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Jak w przypadku pracy [**Or1**], dla funkcji $U(t, x)$ definiujemy pochodną U wzdłuż trajektorii potoku w rozszerzonej przestrzeni fazowej:

$$\dot{U}_f = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} f. \tag{2.18}$$

Definicja 2.31. Funkcja $V(\cdot) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ jest *funkcją wiodącą* na zbiorze $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, jeśli $\dot{V}_f(t, x) > 0$ dla $(t, x) \in G$.

Twierdzenie 2.32. *Załóżmy, że dla pola wektorowego f istnieje V - funkcja wiodąca na zbiorze G.*

A. *Istnieją liczby v^*, v_* $(v^* > v_*)$, a także przestrzennie ograniczona (tj. taka, że $\pi_2(\mathfrak{V})$ jest zbiorem ograniczonym) spójna składowa $\mathfrak{V}$ zbioru $V^{-1}([v_*, v^*])$ taka, że $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus G \subset \operatorname{int} \mathfrak{V}$. Niech $\mathfrak{V}^- = \partial \mathfrak{V} \cap V^{-1}(v^*)$.*

B. *Istnieje $\tau < 0$ takie, że dla każdego $t < \tau$ spełniony jest następujący warunek: istnieje ograniczony podzbiór M_t zbioru $\mathfrak{V}_t$ taki, że zbiór $\{t\} \times (M_t \cap \mathfrak{V}_t^-)$ jest retraktem zbioru $\{(s,x) \in \mathfrak{V}^- : s \geq t\}$, ale nie jest retraktem $\{t\} \times M_t$.*

Wtedy równanie $x' = f(t,x)$ posiada rozwiązanie ograniczone $x_*(\cdot)$, którego wykres zawiera się w $\mathfrak{V}$.

Dowód. Zbiór $\mathfrak{V}^-$ jest zbiorem wyjścia z $\mathfrak{V}$ dla potoku φ generowanego przez pole wektorowe f w rozszerzonej przestrzeni fazowej $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (z definicji funkcji wiodącej).

Niech $t_0 < \tau$ i M_{t_0} będzie zbiorem spełniającym warunek B. Niech $r : \{(s,x) \in \mathfrak{V}^- : s \geq t_0\} \to \{t_0\} \times (M_{t_0} \cap \mathfrak{V}_{t_0}^-)$ będzie retrakcją z tego samego warunku. Pokażemy najpierw, że istnieje rozwiązanie $x_0(\cdot)$ równania $x' = f(t,x)$, dla którego $x_0(t_0) \in M_{t_0}$ i $(s, x_0(s)) \in \mathfrak{V}$ dla każdego $s \geq t_0$.

Dla dowodu nie wprost, załóżmy, że tak nie jest, czyli, że orbita każdego punktu z M_{t_0} w skończonym czasie opuszcza zbiór $\mathfrak{V}$.

Z definicji $\mathfrak{V}$ i $\mathfrak{V}^-$ są domknięte, a zatem $\mathfrak{V}$ jest zbiorem Ważewskiego. Stąd funkcja czasu wyjścia σ^-, określona na M_{t_0} jest ciągła i przyjmuje tylko skończone wartości (ze względu na założenie dowodu nie wprost). Wobec tego, ciągłe jest też odwzorowanie $p : \{t_0\} \times M_{t_0} \ni (t_0, x) \to \varphi(\sigma^-(t_0,x), (t_0,x)) \in \{(s,x) \in \mathfrak{V}^- : s \geq t_0\}$. Dodatkowo, $p(t_0,x) = (t_0,x)$ dla $(t_0,x) \in \{t\} \times (M_t \cap \mathfrak{V}_t^-)$ (gdyż dla takich punktów $\sigma^-(t_0,x) = 0$). Złożenie $r \circ p$ jest zatem retrakcją $\{t\} \times M_t$ na $\{t\} \times (M_t \cap \mathfrak{V}_t^-)$, co jest sprzeczne z warunkiem B.

Zatem, dla każdego $t < \tau$ istnieje rozwiązanie $x(\cdot)$ równania $x' = f(t,x)$, dla którego $x(t) \in M_t$ i $(s, x(s)) \in \mathfrak{V}$ dla każdego $s \geq t$. Wobec tego możemy rozważyć ciąg malejący takich liczb t_n, zbieżny do $-\infty$ i otrzymamy ciąg rozwiązań $x_n(\cdot)$, takich, że $(s, x_n(s)) \in \mathfrak{V}$ dla każdego $s \geq t_n$.

Dowód można zakończyć standardowo: $\mathfrak{V}_0$ jest zbiorem zwartym, więc z ciągu $\{x_n(0)\}$ można wybrać podciąg zbieżny do $x_* \in \mathfrak{V}_0$. Z ciągłej zależności od warunków początkowych i domkniętości $\mathfrak{V}$ rozwiązanie $x^*(\cdot)$ zagadnienia $x' = f(t,x)$; $x(0) = x_*$ spełnia tezę twierdzenia. □

Na koniec, warto zauważyć, że twierdzenie 2.32 pozostaje prawdziwe, a jego dowód jest analogiczny, gdy zamiast pojedynczej funkcji wiodącej założymy istnienie układu funkcji wiodących na G: $V_1, \ldots, V_n$, zbiór $V^{-1}([v_*, v^*])$ w założeniach twierdzenia zastąpimy przez $V_1^{-1}([v_*, v^*]) \cap \ldots \cap V_n^{-1}([v_*, v^*])$, a $\mathfrak{V}^- = \partial\mathfrak{V} \cap (V_1^{-1}(v^*) \cup \ldots V_n^{-1}(v^*))$.

ROZDZIAŁ 3

Segmenty izolujące

3.1. Segmenty izolujące dla potoków

Teoria segmentów izolujących dla potoków rozwinęła się z teorii bloków izolujących. W istocie, segmenty są szczególnymi blokami izolującymi w rozszerzonej przestrzeni fazowej. Podstawy tej teorii stworzył R. Srzednicki.

Definicja segmentu izolującego okresowego i odwzorowania monodromii. Poniżej wyjaśnimy, opierając się na [**S2**], wprowadzone w [**S1**] pojęcie *okresowego segmentu izolującego.*

Niech Φ będzie procesem lokalnym na $\mathbb{R}^n$ generowanym przez równanie $x' = f(t,x)$ i niech φ będzie odpowiadającym mu lokalnym potokiem na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Definicja 3.1. Zbiór zwarty $W \subset [a,b]\times\mathbb{R}^n$ nazywamy *segmentem izolującym nad* $[a,b]$, jeśli jest blokiem izolującym dla φ (tzn. zbiory wejścia i wyjścia $W^{\pm}$ są również zwarte i $\partial W = W^- \cup W^+$) i spełnione są poniższe warunki:

(a) istnieją W^{--} i W^{++} – zwarte podzbiory ∂W (zwane odpowiednio *istotnym zbiorem wyjścia i wejścia*) takie, że:

$$W^- = W^{--} \cup \{b\} \times W_b, \quad W^- \cap ([a,b) \times X) \subset W^{--},$$

$$W^+ = W^{++} \cup \{a\} \times W_a, \quad W^+ \cap ([a,b) \times X) \subset W^{++},$$

(b) istnieje homeomorfizm „prostujący”[1] $h\colon [a,b]\times W_a \to W$ taki, że $\pi_1 \circ h = \pi_1$ i

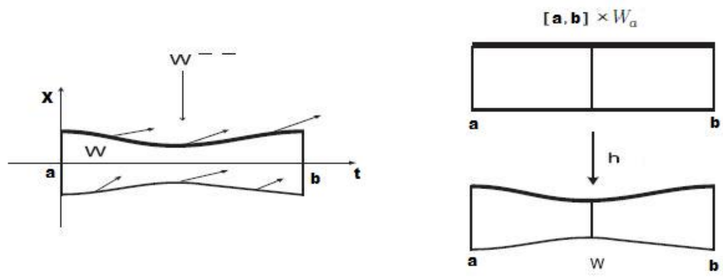
$$h([a,b] \times W_a^{--}) = W^{--}, \quad h([a,b] \times W_a^{++}) = W^{++},$$

(c) W_a, W_a^{--}, W_a^{++} są ENR-ami.

Jeśli dodatkowo W, W^{--}, W^{++} są zbiorami $(b-a)$-okresowymi, to segment izolujący nazywamy *okresowym.*

Odtąd, do końca podrozdziału zajmujemy się tylko segmentami izolującymi okresowymi.

[1]Nazwa wprowadzona na potrzeby pracy — nie jest używana w publikacjach na ten temat.



Rysunek 3.1. Po lewej stronie przykładowy segment. Jego górna krawędź stanowi istotny zbiór wyjścia W^{--}, a dolna - istotny zbiór wejścia W^{++}. Ze względu na kierunek potoku wzdłuż współrzędnej czasowej, prawa krawędź segmentu też należy do zbioru wyjścia W^{-}, ale nie do istotnego zbioru wyjścia W^{--}. Po prawej stronie demonstracja działania homeomorfizmu prostującego h. Pionowy przekrój zbioru $[a,b] \times W_a$ przechodzi w odpowiedni przekrój W.

Definicja 3.2. *Homeomorfizmem monodromii* dla W nazywamy odwzorowanie $m\colon (W_a, W_a^{--}) \to (W_a, W_a^{--})$ zdefiniowane następująco:

$$m(x) = \pi_2 h(b, \pi_2 h^{-1}(a,x)).$$

Niech

$$\mu_W := H(m)\colon H(W_a, W_a^{--}) \to H(W_a, W_a^{--})$$

będzie izomorfizmem indukowanym przez m w homologiach singularnych (o współczynnikach w $\mathbb{Q}$). Warto zauważyć, że o ile homeomorfizm monodromii m zależy od wyboru h, to μ_W od wyboru homeomorfizmu prostującego nie zależy, gdyż wszystkie homeomorfizmy monodromii segmentu W są homotopijne ([**S1**]).

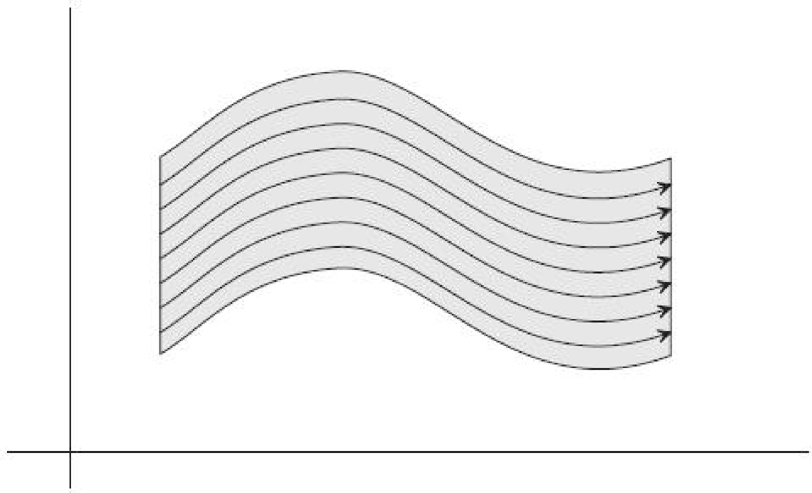
Dzięki założeniu, że W_a, W_a^{--} są zwartymi ENR-ami, wiadomo, że $H(W_a, W_a^{--})$ jest typu skończonego i *liczba Lefschetza segmentu* W:

$$L_W = L(\mu_W) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \operatorname{tr} H_n(m),$$

jest poprawnie zdefiniowana.

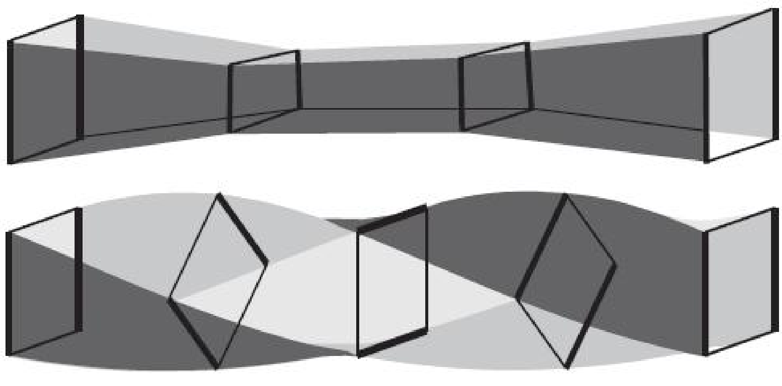
Niech W będzie segmentem izolującym okresowym nad $[a,b]$. W jest *trywialny* jeśli

$$W = [a,b] \times W_a, \quad W^{--} = [a,b] \times W_a^{--}, \quad W^{++} = [a,b] \times W_a^{++}.$$



Rysunek 3.2. Przykład homeomorfizmu monodromii. m przeprowadza punkty x z lewej krawędzi zbioru W do prawej, wzdłuż krzywych $h([a,b],x)$.

W szczególności, można wybrać $h = \mathrm{id}_{[a,b]\times W_a}$ i dlatego L_W jest równa charakterystyce Eulera-Poincarégo $\chi(W_a, W_a^{--}) = \chi(W_a) - \chi(W_a^{--})$.



Rysunek 3.3. Przykłady segmentów izolujących. Na górze – trywialny, na dole – nietrywialny. Zacieniowana część brzegu to istotny zbiór wyjścia z segmentu.

g-segmenty. Choć, jak za chwilę pokażemy, segmenty izolujące okresowe są bardzo potężnym narzędziem, wystarczającym do wykrywania rozwiązań o zadanych własnościach (w szczególności okresowych lub ograniczonych), to w niektórych sytuacjach założenie o $(b-a)$-okresowości zbioru W jest zbyt restrykcyjne. Poniżej przedstawione definicje, pochodzące z pracy [**S3**], umożliwiają osłabienie tego założenia.

Rozważmy zagadnienie:

$$x' = f(t,x),\ x(a) = g(x(b)), \tag{3.1}$$

gdzie $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest ciągła i lokalnie lipschitzowska ze względu na x, a $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest ciągła.

Definicja 3.3. Niech $W \subset [a,b] \times \mathbb{R}^n$ będzie segmentem izolującym dla układu dynamicznego zadanego przez pole wektorowe f takim, że $\partial W_a = W_a^{--} \cup W_a^{++}$.

Dodatkowo, niech będą spełnione warunki:

- $(g(W_b^{--}) \cup \overline{g(W_b) \setminus W_a}) \cap W_a \subset W_a^{--}$
- $g(\operatorname{int} W_b) \cap W_a^{++} \subset W_a^{--}$.

Wtedy W nazywam *g-segmentem izolującym.*[2]

Okazuje się, że jeśli spełniony jest pierwszy z tych warunków i dodatkowo g jest homeomorfizmem, to drugi z powyższych warunków także jest spełniony. Oczywiście, dla $g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ obydwa warunki są spełnione, a W jest segmentem izolującym okresowym.

Analogicznie jak w przypadku segmentów okresowych, definiujemy homeomorfizm monodromii

$$m : (W_a, W_a^{--}) \to (W_b, W_b^{--})$$

wzorem

$$m(x) = \pi_2 h(b, \pi_2 h^{-1}(a,x)).$$

W przestrzeni ilorazowej przyjmuje on postać:

$$m^{\#} : (W_a/W_a^{--}, [W_a^{--}]) \to (W_b/W_b^{--}, [W_b^{--}])$$
$$m^{\#}(x) = [\pi_2 h(b, \pi_2 h^{-1}(a,x))].$$

m i $m^{\#}$ są zdefiniowane jednoznacznie (z dokładnością do klasy homotopii). Z kolei, odwzorowanie g indukuje na przestrzeniach ilorazowych funkcję ciągłą:

$$g^{\#} : (W_b/W_b^{--}, [W_b^{--}]) \to (W_a/W_a^{--}, [W_a^{--}])$$
$$g^{\#}(x) = \begin{cases} [g(x)] & \text{, jeżeli } g(x) \in W_a \setminus W_a^{--} \\ [W_a^{--}] & \text{, w innym wypadku} \end{cases}.$$

Można teraz zdefiniować liczbę Lefschetza pary (W,g) jako:

$$L_{W,g} = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \operatorname{tr} H_i(g^{\#} \circ m^{\#}).$$

Jak w przypadku okresowym, H to homologie singularne o współczynnikach wymiernych.

[2]Nazwa g-segment, o ile mi wiadomo, nie pojawia się w artykułach związanych z tą tematyką. Została wprowadzona wyłącznie na potrzeby tej pracy.

PRZYKŁAD 3.4. Kluczowe zastosowanie poniższego przykładu pojawi się w podrozdziale 4.2.

Niech $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła i dla każdego $t \in [a,b]$, $G(t) > 0$. Niech φ będzie potokiem, a W — segmentem izolującym dla φ, takim, że dla każdego $t \in [a,b]$: $W_t = \frac{G(t)}{G(a)} W_a = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists_{y \in W_a}\ G(t)y = G(a)x\}$ oraz $W_t^{--} = \frac{G(t)}{G(a)} W_a^{--} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists_{y \in W_a^{--}}\ G(t)y = G(a)x\}$.

Wtedy W jest g-segmentem dla funkcji $g : \mathbb{R}^n \ni x \to \frac{G(a)}{G(b)} x \in \mathbb{R}^n$ oraz homeomorfizmu prostującego $h : [a,b] \times W_a \ni (t,x) \to (t, \frac{G(t)}{G(a)} x) \in \mathbb{R}^n$. W nazywam wtedy *g-segmentem liniowym trywialnym.*

Dla g-segmentu liniowego trywialnego $g^{\#} \circ m^{\#} = \mathrm{id}_{W_a/W_a^{--}}$, a zatem $L_{W,g}$ jest równa różnicy charakterystyk Eulera-Poincarégo $\chi(W_a) - \chi(W_a^{--})$.

Segmenty izolujące, a istnienie rozwiązań. Kluczowe dla znaczenia teorii segmentów izolujących jest poniższe twierdzenie:

TWIERDZENIE 3.5. *Niech W będzie segmentem izolującym okresowym nad $[a,b]$ dla pola wektorowego f generującego proces lokalny Φ. Wtedy zbiór*

$$K_W = \{x \in W_0 : \Phi_{(a,b)}(x) = x,\ \Phi_{(a,b)}(x) \in W_t\ \forall t \in [a,b]\}$$

jest zbiorem izolowanym punktów stałych odwzorowania Poincarégo $\Phi_{(a,b)}$ i

$$\mathrm{ind}\,(\Phi_{(a,b)}, K_W) = L_W.$$

W szczególności, jeśli $L_W \neq 0$, to istnieje rozwiązanie zagadnienia $x' = f(t,x)$; $x(a) = x(b)$, którego wykres nad $[a,b]$ zawiera się w segmencie W.

Stąd wynika, że jeśli $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest funkcją ciągłą, lokalnie lipschitzowską ze względu na zmienną przestrzenną i $(b-a)$-okresową ze względu na zmienną czasową, dla której istnieje segment izolujący okresowy W nad $[a,b]$ o niezerowej liczbie Lefschetza, to $x' = f(t,x)$ posiada rozwiązanie $(b-a)$-okresowe.

PRZYKŁAD 3.6. Niech $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem liniowym i $0 \notin \Re\sigma(A)$. Jeżeli $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest funkcją gładką, T-okresową ze względu na pierwszą zmienną i ograniczoną, to $x' = Ax + f(t,x)$ posiada rozwiązanie T-okresowe.

By udowodnić tę obserwację, dla ustalenia uwagi i uproszczenia zapisu możemy założyć, że A jest w postaci Jordana i rozkłada $\mathbb{R}^n$ na podprzestrzenie niezmiennicze $\mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$ $(u + s = n)$, takie, że wszystkie wartości własne $A|_{\mathbb{R}^u}$ mają dodatnią część rzeczywistą, a wszystkie wartości własne $A|_{\mathbb{R}^s}$ mają ujemną część rzeczywistą. Niech $\sigma_1 = \inf \Re\sigma(A|_{\mathbb{R}^u})$, a $\sigma_2 = |\sup \Re\sigma(A|_{\mathbb{R}^s})|$.

Niech $M = \sup ||f(t,x)||$. Możemy wybrać $c_1 \in \mathbb{R}$ takie, że dla $||x|| \geq c_1$, $M < \sigma_1 ||x||$ i $c_2 \in \mathbb{R}$ takie, że dla $||x|| \geq c_2$, $M < \sigma_2 ||x||$.

Wtedy zbiór $W = [0,T] \times ([-c_1, c_1]^u \times [-c_2, c_2]^s)$ jest trywialnym segmentem izolującym okresowym dla potoku generowanego przez pole $Ax + f(t,x)$, a zbiór wyjścia W^-— tworzą krawędzie prostopadłe do przestrzeni $\mathbb{R}^u$. Można obliczyć

$$L_W = \chi(W_0) - \chi(W_0^{--}) = 1 - \chi(\mathbb{S}^{u-1}) = \begin{cases} 1, \text{ jeżeli u jest parzyste} \\ -1, \text{ jeżeli u jest nieparzyste} \end{cases}.$$

W tym momencie zastosowanie twierdzenia 3.5 kończy dowód.

Przykład 3.7. Niech $h : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją ciągłą, T-okresową ze względu na pierwszą zmienną i $\frac{h(t,z)}{|z|^n} \to 0$ gdy $|z| \to \infty$, jednostajnie ze względu na t. Jeżeli $n \geq 1$ to istnieje T-okresowe rozwiązanie równania $z' = \bar{z}^n + h(t,z)$.

Konstrukcję segmentu okresowego, umożliwiającego dowód twierdzenia przeprowadzono w [**S1**].

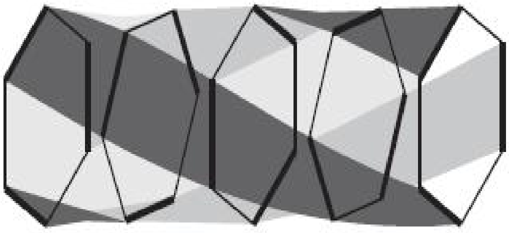
Rysunek 3.4. Segment skonstruowany dla zagadnienia przedstawionego w przykładzie 3.7 w przypadku n=2. Zacieniowane obszary tworzą istotny zbiór wyjścia.

Przykład 3.8. Niech $h : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją ciągłą, 2π-okresową ze względu na pierwszą zmienną i $\frac{h(t,z)}{|z|^n} \to 0$ gdy $|z| \to \infty$, jednostajnie ze względu na t. Jeżeli $n \geq 2$ to istnieje 2π-okresowe rozwiązanie równania $z' = e^{it}\bar{z}^n + h(t,z)$.

Również w tym przypadku, konstrukcję segmentu okresowego, umożliwiającego dowód twierdzenia przeprowadzono w [**S1**]. Jako, że w tym przypadku po raz pierwszy pojawia się segment izolujący nietrywialny, przeliczymy dla przykładu jego liczbę Lefschetza (w przypadku $n = 2$, gdy segment wygląda tak jak na rysunku 3.5). Homeomorfizm monodromii jest po prostu obrotem o kąt $\frac{2}{3}\pi$. Jego odpowiednik w homologiach W_0 jest trywialny (zresztą W_0 jest homotopijnie trywialny), a w zerowych homologiach W_0^{--} (pozostałe są zerowe) po prostu zamienia ze sobą generatory. Ściśle zapisując:

$$L_W = \operatorname{tr}\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} - \operatorname{tr}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 - 0 = 1.$$

Zastosowanie twierdzenia 3.5 kończy dowód.



Rysunek 3.5. Segment skonstruowany dla zagadnienia przedstawionego w przykładzie 3.8 w przypadku n=2. Zacieniowane obszary tworzą istotny zbiór wyjścia.

Przykład 3.9. Segmenty umożliwiają nie tylko wykrywanie pojedynczych rozwiązań okresowych. Dzięki zależności pomiędzy liczbą Lefschetza segmentu izolującego, a indeksem punktu stałego odwzorowania Poicarégo, można często uzyskać więcej informacji o zbiorze takich rozwiązań.

Rozważmy równanie $z' = e^{it}\bar{z}^2 + \bar{z}$. Jak w poprzednim przykładzie, można skonstruować segment W o liczbie Lefschetza 1, wykrywający istnienie rozwiązania 2π-okresowego. Jednakże, $z \equiv 0$ jest takim rozwiązaniem. Czy istnieje inne?

Okazuje się, że $V = [0, 2\pi] \times \{z \in \mathbb{C} : |\Re z| < \delta, |\Im z| < \delta\}$ dla odpowiednio małych $\delta > 0$ jest trywialnym segmentem izolującym w kształcie prostopadłościanu o podstawie kwadratowej, w którym istotny zbiór wyjścia stanowią jego dolna i górna ściana. Stąd $L_V = \chi(V_0) - \chi(V_0^{--}) = 1 - 2 = -1$.

Jeśli zachodziłoby $K_W = K_V = \{0\}$ (K_W i K_V to oznaczenia z twierdzenia 3.5), to również $1 = L_W = L_V = -1$ (z równości indeksów tego samego punktu stałego), czyli otrzymujemy sprzeczność. Zatem istnieje nietrywialne 2π-okresowe rozwiązanie rozważanego równania.

Twierdzenie analogiczne do twierdzenia 3.5 zachodzi dla g-segmentów:

Twierdzenie 3.10. *Niech W będzie g-segmentem izolującym nad $[a, b]$, dla zagadnienia* (3.1). *Wtedy*

$$K_{W,g} = \{x \in W_0 : g \circ \Phi_{(a,b)}(x) = x,\ \Phi_{(a,t)}(x) \in W_t\ \forall t \in [a, b]\}$$

jest izolowanym zbiorem punktów stałych odwzorowania Poincarégo $\Phi_{(a,b)}$ i dla każdego $t \in [a, b]$ $\Phi_{(a,t)}(K_{W,g}) \subset \operatorname{int} W_t$. Ponadto

$$\operatorname{ind}(g \circ \Phi_{(a,b)}, K_{W,g}) = L_{W,g}.$$

W szczególności, jeśli $L_{W,g} \neq 0$, to istnieje rozwiązanie zagadnienia (3.1)*, którego wykres nad $[a, b]$ zawiera się w segmencie W.*

Struktura zbioru niezmienniczego w segmencie. Metoda segmentów izolujących może też dać informacje o strukturze zbioru rozwiązań, których wykresy zawierają się w segmencie.

Niech W będzie okresowym segmentem izolującym nad $[a, b]$ dla procesu lokalnego Φ zadanego równaniem (2.1). Definiujemy *podzbiór niezmienniczy* W jako:

$$N_W = \{x \in W_a : \ \Phi_{(a,t)}(x) \in W_t \ \forall t \in [a, b]\}.$$

OBSERWACJA 3.11. Istnieje ciągła surjekcja z W_a na $A = N_W \cup W_a^{++}$. W szczególności, jeśli W_a jest zbiorem spójnym, to A jest continuum.

Szukaną surjekcję zdefiniujemy na $W_b = W_a$. Każdy punkt W_b będziemy cofać w czasie, w sposób zadany przez proces Φ. Jeśli trajektoria tego punktu cały czas pozostaje wewnątrz W, to w końcu punkt cofnie się do N_W. Jeśli nie, to punkt ten cofa się, aż trafi do zbioru W^{++}. Wtedy, cofamy go w czasie „wzdłuż homeomorfizmu prostującego”. Punkty docelowe tego cofania, leżące w W_a (a nawet w A), to wartości szukanej surjekcji. Formalny dowód przedstawiamy poniżej:

DOWÓD. Niech $b - a = T$.

Na W_b definiujemy funkcję czasu wejścia do segmentu W:

$$\sigma^-(x) = \sup\{t \geq 0 : \Phi_{(b,[b-t,b])}(x) \subset W\}.$$

Jest to funkcja ciągła, gdyż W jest blokiem izolującym. Oczywiście, $\sigma^-(x) \leq T$.

Definiujemy:

$$\theta : W_b \ni x \mapsto \pi_2 h(a, \pi_2(h^{-1}(b - \sigma^-(x), \Phi_{(b,b-\sigma^-(x))}(x)))) \in W_a.$$

θ jest funkcją ciągłą (jako złożenie funkcji ciągłych). Ponadto, jeśli $\sigma^-(x) = T$ to $\theta(x) = \pi_2(\Phi_{(b,a)}(x)) \in N_W$ (z definicji N_W). Jednocześnie, dla każdego $y \in N_W$ zachodzi $y = \theta(\pi_2(\Phi_{(a,b)}(y)))$. Jeśli $\sigma^-(x) < T$, to $\pi_2(\Phi_{(b,b-\sigma^-(x))}(x)) \in W^{++}_{b-\sigma^-(x)}$, a zatem (z definicji h) $\theta(x) \in W_a^{++}$. Jednocześnie, dla każdego $y \in W_a^{++}$ zachodzi $y = \theta(z)$), gdzie $z = \pi_2(h(b, h^{-1}(a, y))) \in W_b$.

Ostatecznie, θ, po utożsamieniu $W_b = W_a$ jest szukaną funkcją.

□

Dla g-segmentów zachodzi własność analogiczna do obserwacji 3.11.

OBSERWACJA 3.12. Dla g-segmentu W, przy tych samych pozostałych oznaczeniach, co w obserwacji 3.11, jeśli dodatkowo $g|_{W_b}$ jest homeomorfizmem na obraz, to istnieje ciągła surjekcja z $g(W_b)$ na $A = N_W \cup W_a^{++}$. W szczególności, jeśli W_a jest zbiorem spójnym, to A jest continuum.

DOWÓD. Oczywiście, jeśli θ jest zdefiniowana tak jak w dowodzie obserwacji 3.11, to $\theta \circ g^{-1}$ będzie szukaną surjekcją. Co do drugiej części tezy, wystarczy zauważyć, że $g(W_b)$ jest homeomorficzne z W_b, czyli też z W_a. □

Warto zauważyć, że w powyższych obserwacjach nie jest istotna informacja o liczbie Lefschetza segmentu.

3.2. Ciągi segmentów izolujących

Podobnie jak teoria funkcji wiodących, teoria segmentów izolujących pozwala na badanie istnienia rozwiązań o zadanych własnościach długookresowych takich jak ograniczoność, czy zanikanie. Jako, że każdy segment z osobna jest zbiorem ograniczonym ze względu na zmienną czasową, do badania własności asymptotycznych użyjemy ciągów segmentów izolujących. Poniższe twierdzenie zainspirowane jest rezultatami z artykułu [**S1**], nieco uproszczonymi na potrzeby pracy.

TWIERDZENIE 3.13. *Załóżmy, że istnieje ciąg segmentów izolujących (okresowych lub g-segmentów) W^j dla lokalnego potoku φ, zadanego polem wektorowym $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ciągłym i lokalnie lipschitzowskim ze względu na drugą zmienną, nad przedziałami $[a_j, b_j]$, $j \in \mathbb{N}$ ($\{a_j\}$ tworzą ciąg nierosnący, a $\{b_j\}$- ciąg niemalejący) taki, że dla każdego j zachodzi $W^{j+1} \cap ([a_j, b_j] \times \mathbb{R}^n) \subset W^j$. Jeżeli dla każdego j, $L_{W^j} \neq 0$, to istnieje rozwiązanie $x(\cdot)$ równania* (2.1)*, takie, że dla każdego j wykres $x(\cdot)|_{[a_j,b_j]}$ zawiera się w W^j.*

DOWÓD. Z twierdzeń z poprzedniego podrozdziału, dla każdego W^j istnieje $x^j(\cdot)$ - rozwiązanie równania $x' = f(t, x)$, takie, że $x^j|_{[a_j,b_j]}$ zawiera się w W_j. Niech $y \in [a_1, b_1]$. Dzięki zwartości W^j_y dla każdego j, z ciągu $\{x_j(y)\}$ można wybrać podciąg zbieżny do y_0. Niech $x_0(\cdot)$ będzie rozwiązaniem zagadnienia $x' = f(t, x)$; $x(y) = y_0$. Ze zwartości każdego ze zbiorów W_j oraz z twierdzenia o ciągłej zależności rozwiązań od warunków początkowych, $x_0(\cdot)$ jest szukanym rozwiązaniem. □

WNIOSEK 3.14. *Przy założeniach i oznaczeniach twierdzenia 3.13, jeśli dodatkowo założymy, że: $\lim_{j\to+\infty} a_j = -\infty$, $\lim_{j\to+\infty} b_j = +\infty$, to równanie $x' = f(t, x)$ posiada rozwiązanie ograniczone, określone na całej osi $\mathbb{R}$. Jeśli ponadto dla każdego j, $0 \in W^j$ i $\mathrm{diam} \mathrm{W^j} \to 0$, to istnieje rozwiązanie zanikające.*

Można badać też strukturę zbioru dodatnioniezmienniczego w ciągu segmentów:

OBSERWACJA 3.15. Niech $a \in \mathbb{R}$, a $(b_i)_{i=1}^{\infty}$ niech będzie ciągiem liczb większych od a, takim, że $\lim_{i\to\infty} b_i = +\infty$. Niech $(W^i)_{i=1}^{\infty}$ będzie ciągiem g_i-segmentów izolujących nad $[a, b_i]$ (gdzie $g_i|W_{b_i}$ jest homeomorfizmem na obraz), takich, że dla każdych $i, j \in \mathbb{N}$ zachodzi $W^i_a = W^j_a$, W^i_a jest spójny i, jeśli $j > i$, to $W^j \cap ([a, b_i] \times \mathbb{R}^n) \subset W_i$. Niech $A = N \cup W_a^{1\,++}$, gdzie N jest zbiorem takich punktów $v \in W_a$, że istnieje $x_v(\cdot)$ rozwiązanie równania (2.1), takie, że dla $x_v(a) = v$ i dla każdego i wykres $x_v|_{[a,b_i]}$ zawiera się w W_i.

Wtedy A jest continuum.

DOWÓD. Dla każdego zbioru W_i korzystamy z własności 3.11 i otrzymujemy w rezultacie zwartość i spójność zbiorów $A_i = N_i \cup W_a^{1\,++}$, gdzie N_i jest zbiorem takich punktów $v \in W_a$, że istnieje $x_v(\cdot)$ rozwiązanie równania (2.1), takie, że dla $x_v(a) = v$ i wykres $x_v|_{[a,b_i]}$ zawiera się w W_i.

Oczywiście, $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ i $A_{i+1} \subset A_i$ dla każdego i, zatem z twierdzenia o przecięciu zstępującej rodziny continuów otrzymujemy, że A jest continuum. □

Przykład 3.16. W pracy [**SW**] skonstruowano ciąg segmentów izolujących okresowych W^j, spełniający warunki obserwacji 3.15 dla równania $z' = (1 + e^{i\phi t}|z|^2)\bar{z}$, przy $0 < \phi < \frac{1}{288}$. Dzięki pewnym twierdzeniom o segmentach izolujących, autorzy udowodnili istnienie I - zwartego podzbioru zbioru dodatnioniezmienniczego N z obserwacji 3.15, takiego, że istnieje surjekcja ciągła z I na $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.[3] Zbiór I zatem nie może być spójny (gdyż jego obraz przez wspomnianą ciągłą surjekcję nie jest), ale cały dodatnioniezmienniczy podzbiór zbioru segmentów, po dołączeniu zbioru wejścia (czyli $N \cup W_a^{1\,++}$) jest spójny, zgodnie z obserwacją 3.15.

3.3. Segmenty izolujące dla odwzorowań

W sposób naturalny pojawia się pytanie, czy teorię segmentów izolujących da się rozszerzyć na przypadek dyskretny (czyli odwzorowania) i wykorzystać do wykrywania punktów stałych tych odwzorowań. Przynajmniej częściową odpowiedź na to pytanie przyniosła praca [**KW**], której główne wyniki zostaną przedstawione w kolejnych dwóch podrozdziałach.

Rozważmy następującą sytuację: Niech X będzie przestrzenią metryczną, B jej zwartym podzbiorem. Niech $f : B \to X$ będzie odwzorowaniem ciągłym, homotopijnym z odwzorowaniem $g : B \to X$ takim, że $g(B) \subset B$ tzn. istnieje funkcja ciągła $F : [0,1] \times B \to X$ taka, że:

- $F_1 := F(1,\cdot) = f$,
- $F_0 := F(0,\cdot) = g$.

Naszym celem będzie wykrycie punktów stałych funkcji f.

Dla zbioru zwartego $W \subset [0,1] \times X$ takiego, że $W_0 = B$, definiujemy „funkcję wyjścia homotopią F":

$$\tau : B \ni x \to \sup\{t \in [0,1] : \ F(s,x) \in W_s \ \forall s \in [0,t]\} \in [0,1].$$

Definicja 3.17. W jest *zbiorem Ważewskiego dla* F jeśli $\tau : B \to [0,1]$ jest funkcją ciągłą. Zbiór $W^- = \{(\tau(x), F(\tau(x),x)) : \ x \in B\} \subset W$, nazywam zbiorem wyjścia z W.

Oczywiście, jeśli W jest zbiorem Ważewskiego, to W^- jest zwarty.

[3] W istocie, autorzy udowodnili o wiele więcej: tzw. Σ_2-chaotyczność badanego równania, czyli istnienie semisprzężenia z przesunięciem na dwóch symbolach. Nie jest to jednak istotne z punktu widzenia niniejszej pracy.

DEFINICJA 3.18. W – zbiór Ważewskiego dla F nazywamy *segmentem*, jeśli spełnione są poniższe warunki:

- istnieje zwarty podzbiór W^{--} (zwany istotnym zbiorem wyjścia) zbioru W^- taki, że
$$W^- \cap ([0,1) \times X) \subset W^{--}, W^{--} = \overline{W^{--} \cap ([0,1) \times X)}$$
- istnieje homeomorfizm „prostujący” $h : [0,1] \times B \to W$ taki, że $\pi_1 \circ h = \pi_1$ i
$$W^{--} \subset h([0,1] \times W_0^{--}), \quad \pi_2(h(1, W_0^{--})) \subset W_0^{--},$$
- $W_1 = W_0$, $W_1^{--} \subset W_0^{--}$ and $g(W_0^{--}) \subset W_0^{--}$.

Powyższa definicja nieco różni się od tej, którą stawialiśmy dla potoków. W szczególności, konieczne było uwzględnienie faktu, że homotopia (w przeciwieństwie do potoku) nie musi być określona w każdym punkcie segmentu (dlatego niektóre równości zamieniły się w inkluzje). Pozostałe zmiany w definicji uwzględniają fakt, że na W_0 nie mamy do czynienia z identycznością, lecz z odwzorowaniem g oraz wymuszają jednoznaczność notacji W^{--}.

Analogicznie do przypadku potoków, definiujemy homeomorfizm monodromii $m : W_0 \to W_0$ następująco:
$$m(x) := \pi_2 h(1, \pi_2 h^{-1}(0, x)), \quad x \in W_0.$$
Zauważmy, że $m(W_0^{--}) \subset W_0^{--}$, a morfizmy indukowane w homologiach $H(m) : H(W_0) \to H(W_0)$ i $H(m \circ g) : H(W_0) \to H(W_0)$ nie zależą od wyboru h, tak jak w przypadku potoków.

PRZYKŁAD 3.19. Poniżej przedstawimy tę konstrukcję w wypadku odwzorowania przesunięcia w czasie dla dla semipotoku ϕ na X. Dla $B \subset X$ rozważmy homotopię $F : [0,1] \times B \to X$ zadaną wzorem:
$$F(t,x) = \phi(t,x).$$
Wtedy $f = F_1 = \phi(1,\cdot)|_B$ jest restrykcją odwzorowania przesunięcia o czas $t = 1$ do zbioru B, a $g = F_0 = \phi(0,\cdot)|_B = \mathrm{id}_B$ jest inkluzją. W rozszerzonej przestrzeni fazowej $[0,+\infty) \times X$ rozważamy zbiór $W = [0,1] \times B$. Niech funkcja czasu wyjścia z W:
$$\sigma : B \ni x \to \sup\{t \in [0,1] : \ (s, \phi(s,x)) \in W \ \forall s \in [0,t]\} \in [0,1]$$
będzie ciągła. Zbiór wyjścia jest zadany przez:
$$W^- = \{(\sigma(x), \phi(\sigma(x), x)) : x \in B\}.$$
Jeśli B jest zbiorem Ważewskiego dla ϕ (czyli B, B^- są zwarte) to W jest segmentem dla F. Istotnie,
$$\tau(x) = \begin{cases} \sigma(x), & \text{if } \sigma(x) \le 1; \\ 1, & \text{if } \sigma(x) \ge 1. \end{cases}$$
Wtedy W^- jest zadane następująco:

$W^- = \{(\sigma(x), \phi(\sigma(x), x)) : x \in \sigma^{-1}([0,1])\} \cup \{(1, \phi(1,x)) : x \in \sigma^{-1}([1,+\infty))\}$,

a istotny zbiór wyjścia z W to:

$$W^{--} = \{(\sigma(x), \phi(\sigma(x), x)) : x \in \sigma^{-1}([0,1])\}.$$

W szczególności,

$$W_0 = B, \quad W_0^{--} = B^-.$$

Przykład 3.20. Jeśli X jest ściągalna to każde odwzorowanie $f : B \to X$ jest homotopijne z inkluzją. W szczególności, nawet przy $g = \mathrm{id}_B$, f nie musi być odwzorowaniem przesunięcia w czasie dla pewnego semipotoku.

Przykład 3.21. Niech $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ i niech $f : B \to \mathbb{C}$ będzie odwzorowaniem ciągłym, takim, że

$$\{(1-t)z + tf(z) : t \in [0,1]\} \cap B = \{z\}, \quad z \in \partial B.$$

Definiujemy homotopię:

$$F : [0,1] \times B \ni (t,z) \to (1-t)z + tf(z) \in \mathbb{C}.$$

Niech $W = [0,1] \times B$. Funkcja czasu wyjścia $\tau : B \to [0,1]$ z W jest zadana przy pomocy punktów przecięcia odcinków łączących z i $f(z)$ ze zbiorem

$$Y = [0,1] \times \partial B \cup \{1\} \times B,$$

zatem jest ciągła, więc W jest zbiorem Ważewskiego. Udowodnimy, że Y jest zbiorem wyjścia W^-.

Z definicji $W^- = w(B)$, gdzie:

$$w : B \ni z \to (\tau(z), F(\tau(z), z)) \in Y.$$

$w(z) = z$ dla $z \in \partial B$ i $w|_{\partial B}$ ma rozszerzenie na zbiór B, stąd $w|_{\partial B} : \partial B \to W^- = w(B)$ jest homotopijna z odwzorowaniem stałym, zadanym na W^-, zatem $W^- = Y$.

Stąd W jest segmentem dla f i $g = \mathrm{id}_B$, z homeomorfizmem „prostującym” $h = \mathrm{id}_W$. Łatwo zauważyć, że

$$W_0 = B, W_0^{--} = \partial B,$$

i m jest homotopijne z identycznością na W_0.

□

Niech W będzie segmentem dla F, $g = F_0 : B \to X$, $g(B) \subset B$ i $f = F_1 : B \to X$.

Twierdzenie 3.22. *Zbiór*

$$U = \{x \in W_0 : F(t,x) \in W_t \setminus W_t^{--}, \text{ for all } t \in [0,1]\}$$

jest otwarty w $B = W_0$*, a zbiór punktów stałych funkcji* $f|_U : U \to B$ *jest zwarty. Ponadto, jeśli* W *i* W^{--} *są ENR-ami, to*

$$\mathrm{ind}(f|_U, \mathrm{Fix}\,(f|_U)) = L(m \circ g) - L(m \circ g|_{W_0^{--}}).$$

W szczególności, jeśli $L(m \circ g) - L(m \circ g|_{W_0^{--}}) \neq 0$*, to* $f : B \to X$ *ma punkt stały w* B*.*

Dowód. Łatwo sprawdzić, że:

$$U = W_0 \setminus \bigcup_{t\in[0,1]} F_t^{-1}(W_t^{--}).$$

Jeśli dla każdego n, $x_n \in \bigcup_{t\in[0,1]} F_t^{-1}(W_t^{--})$ i $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, to

$$\lim_{n\to\infty} F(\tau(x_n), x_n) = F(\tau(x), x).$$

Dodatkowo, dla każdego n, $F(\tau(x_n), x_n) \in W^{--}$, stąd $F(\tau(x), x) \in W^{--}$ i $x \in \bigcup_{t\in[0,1]} F_t^{-1}(W_t^{--})$. Dlatego $\bigcup_{t\in[0,1]} F_t^{-1}(W_t^{--})$ jest domknięty, a U jest otwarty w W_0.

Definiujemy rodzinę odwzorowań:

$$m_s : W_s \ni x \to \pi_2 h(1, \pi_2 h^{-1}(s, x)) \in W_0 = W_1, \quad s \in [0, 1].$$

W szczególności, $m_0 = m : W_0 \to W_0$ i $m_1 = \mathrm{id}_{W_0}$.

Niech homotopia $H : [0, 1] \times W_0 \to W_0$ będzie dana wzorem:

$$H_t(x) = \begin{cases} m_{\tau(x)}(F(\tau(x), x)), & \text{if } \tau(x) \leq 1 - t; \\ m_{1-t}(F(1 - t, x)), & \text{if } \tau(x) \geq 1 - t. \end{cases}$$

W szczególności, $H_1 = m \circ g$. Z własności homotopii liczby Lefschetza otrzymujemy:

$$L(H_0) = L(H_1) = L(m \circ g).$$

Z definicji wiemy, że:

$$H_0(x) = m_{\tau(x)}(F(\tau(x), x)), \quad x \in W_0.$$

Łatwo sprawdzić, że:

$$U = \{x \in W_0 : \tau(x) = 1,\ F(1, x) \in W_0 \setminus W_1^{--}\}$$

i $(H_0)^{-1}(W_0 \setminus W_0^{--}) \subset U \subset (H_0)^{-1}(W_0 \setminus W_1^{--})$. $H_0(x) = F(1, x) = f(x)$, o ile $\tau(x) = 1$, zatem

$$H_0|_U = f|_U.$$

Jeśli $x \in W_0 \setminus W_0^{--}$ i $H_0(x) = x$, to natychmiast okazuje się, że $\tau(x) = 1$ (ponieważ w innym wypadku $H_0(x) \in W_0^{--}$), czyli $x \in U$. Jednocześnie,

$$\mathrm{Fix}\,(f|_U) = \mathrm{Fix}\,(H_0) \cap \tau^{-1}(1),$$

zatem $\mathrm{Fix}\,(f|_U)$ jest zwarty. Oznaczamy $V = \tau^{-1}([0, 1))$. V jest zbiorem otwartym w W_0, $W_0^{--} \subset V$ i $H_0(V) \subset W_0^{--}$. Ze zwartości W_0^{--}, istnieje otwarte otoczenie D zbioru W_0^{--} takie, że $g(D) \subset V$, dlatego $H_0(D) \subset W_0^{--}$. Stąd:

$$\mathrm{Fix}\,(H_0) = \mathrm{Fix}\,(H_0|_U) \cup \mathrm{Fix}\,(H_0|_D) = \mathrm{Fix}\,(f|_U) \cup \mathrm{Fix}\,(m \circ g|_{W_0^{--}}).$$

Jako, że zbiory $\mathrm{Fix}\,(f|_U)$ i $\mathrm{Fix}\,(m\circ g|_{W_0^{--}})$ są zwarte i rozłączne, z twierdzenia Lefschetza o punkcie stałym i własności addytywności indeksu punktu stałego otrzymujemy:

$$L(m\circ g) = L(H_0) = \mathrm{ind}\,(H_0|_U, \mathrm{Fix}\,(f|_U)) + \mathrm{ind}\,(H_0|_V, \mathrm{Fix}\,(m\circ g|_{W_0^{--}})).$$

Z kolei, na podstawie własności komutatywności indeksu punktu stałego wraz z twierdzeniem Lefschetza o punkcie stałym możemy obliczyć:

$$\mathrm{ind}\,(H_0|_V, \mathrm{Fix}\,(m\circ g|_{W_0^{--}})) = \mathrm{ind}\,(H_0|_{W_0^{--}}, \mathrm{Fix}\,(m\circ g|_{W_0^{--}})) = L(m\circ g|_{W_0^{--}}),$$

i wreszcie otrzymujemy:

$$\mathrm{ind}\,(f|_U, \mathrm{Fix}\,(f|_U)) = \mathrm{ind}\,(H_0|_U, \mathrm{Fix}\,(f|_U)) = L(m\circ g) - L(m\circ g|_{W_0^{--}}).$$

□

Przykład 3.23. Niech g będzie inkluzją B w $\mathbb{R}^n$, $W = [0,1] \times B$ – segmentem dla $F : [0,1] \times B \to X$, z homeomorfizmem prostującym $h : W \ni x \to x \in W$. Wtedy $L(m \circ g) - L(m \circ g|_{W_0^{--}}) = L(m) - L(m|_{W_0^{--}}) = \chi(B) - \chi(W_0^{--})$, zatem jeśli $\chi(B) \neq \chi(W_0^{--})$ to $f = F_1$ ma punkt stały w B.

W szczególności, przy założeniach przykładu 3.21, $\chi(B) - \chi(\partial B) = 1 - 0 = 1$, więc funkcja f ma punkt stały w $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

3.4. Segmenty izolujące i relatywna liczba Nielsena

Pozostajemy przy oznaczeniach z poprzedniego podrozdziału oraz podrozdziału 1.3.

Twierdzenie 3.24. *Niech W będzie segmentem dla homotopii F. Wtedy*

$$\#\,\mathrm{Fix}\,(f|_U) \geq N(m \circ g, \mathrm{cl}\,(W_0 \setminus W_0^{--})),$$

gdzie $U = \{x \in W_0 : \tau(x) = 1,\ F(1,x) \in W_0 \setminus W_0^{--}\}$.

Dowód. Niech $H : [0,1]\times W_0 \to W_0$ będzie homotopią zdefiniowaną w dowodzie twierdzenia 3.22.

Dla $x \in W_0^{--}$ zachodzi $\tau(x) = 0$, zatem:

$$H_t(x) = m \circ g(x), \quad t \in [0,1].$$

Stąd $H_t(W_0^{--}) \subset W_0^{--}$, dla $t \in [0,1]$. Dlatego H jest homotopią pary (W_0, W_0^{--}). Jako, że $H_1 = m \circ g : (W_0, W_0^{--}) \to (W_0, W_0^{--})$, z własności homotopii dla relatywnej liczby Nielsena należy wykazać, że:

$$\#\,\mathrm{Fix}\,(f|_U) \geq N(H_0, \mathrm{cl}\,(W_0 \setminus W_0^{--})).$$

Wystarczy udowodnić, że jeśli $K \subset W_0$ jest klasą Nielsena dla H_0 i K nie zachowuje swojego indeksu w W_0^{--}, to $(\mathrm{Fix}\,(f|_U) \cap K \neq \emptyset$.

Dla dowodu nie wprost zakładamy, że:

$$\mathrm{Fix}\,(f|_U) \cap K = \emptyset.$$

Dokładnie tak samo jak w dowodzie twierdzenia 3.22 otrzymujemy:

$$\mathrm{Fix}\,(H_0) = \mathrm{Fix}\,(f|_U) \cup \mathrm{Fix}\,(m \circ g|_{W_0^{--}}),$$

więc $K \subset W_0^{--}$. Znów jak w dowodzie twierdzenia 3.22, istnieje D, otwarte otoczenie W_0^{--} takie, że $H_0(D) \subset W_0^{--}$. Z własności komutatywności indeksu punktu stałego wynika, że:

$$\mathrm{ind}\,(H_0, K) = \mathrm{ind}\,(H_0|_{W_0^{--}}, K) = \mathrm{ind}\,(m \circ g|_{W_0^{--}}, K),$$

co prowadzi do sprzeczności z założeniem o niezachowywaniu indeksu K w W_0^{--} (bo $m \circ g = H_1 \simeq H_0$).

□

Przykład 3.25. Formalnie, $\mathrm{cl}\,(W_0 \setminus W_0^{--}) = W_0$, jednak zapis $N(m \circ g, \mathrm{cl}\,(W_0 \setminus W_0^{--}))$, jak już wspomniałem, nie jest równoważny klasycznej liczbie Nielsena $N(m \circ g)$ dla odwzorowania $m : W_0 \to W_0$. W szczególności, w twierdzeniu 3.24 nie można zastąpić $N(m \circ g, \mathrm{cl}\,(W_0 \setminus W_0^{--}))$ przez $N(m \circ g)$.

Na przykład, niech $B = [1, 2] \subset \mathbb{R}$ i homotopia $F : [0, 1] \times B \to \mathbb{R}$ niech będzie dana wzorem:

$$F(t, x) := t + x,$$

a $g = \mathrm{id}_B$. Niech $W = [0, 1] \times B$ z homeomorfizmem $h : W \ni x \to x \in W$. Oczywiście, $\tau(x) = 2 - x$ dla $x \in [1, 2]$, zatem W jest segmentem dla F ze zbiorem wyjścia:

$$W^- = W^{--} = [0, 1] \times \{2\}.$$

Jako, że odwzorowanie monodromii $m : \{2\} \to \{2\}$ jest identycznością i $\{2\}$ jest ściągalny, to $N(m) = 1$. Jednocześnie, $f : [1, 2] \ni x \to F(1, x) = 1 + x \in \mathbb{R}$ nie ma punktów stałych. Łatwo sprawdzić, że $N(m, \mathrm{cl}\,(W_0 \setminus W_0^{--})) = 0$.

Przykład 3.26. Jeżeli $N(m \circ g|_{W_0^{--}}) = 0$, to $N(m \circ g, \mathrm{cl}\,(W_0 \setminus W_0^{--})) = N(m \circ g)$.

Istotnie, niech $K \subset W_0$ będzie klasą Nielsena $m \circ g$. Z pracy [**Sc2**] wiadomo, że wtedy $K \cap W_0^{--}$ jest pusty lub jest sumą klas Nielsena $m \circ g|_{W_0^{--}}$. Stąd, $\mathrm{ind}\,(m \circ g|_{W_0^{--}}) = 0$, gdyż $N(m \circ g|_{W_0^{--}}) = 0$. Zatem K nie zachowuje swojego indeksu w W_0^{--} wtedy i tylko wtedy, gdy K jest istotną klasą Nielsena $m \circ g$.

Przykład 3.27. Jeśli $B = W_0$ jest ściągalny, to: $L(m \circ g) \neq L(m \circ g|_{W_0^{--}})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $N(m \circ g, \mathrm{cl}\,(W_0 \setminus W_0^{--})) = 1$, a $N(m \circ g, \mathrm{cl}\,(W_0 \setminus W_0^{--})) = 0$ gdy $L(m \circ g) - L(m \circ g|_{W_0^{--}}) = 0$. Tak więc, w tym przypadku, $N(m \circ g, \mathrm{cl}\,(W_0 \setminus W_0^{--}))$ daje te same informacje o strukturze $\mathrm{Fix}\,(f)$ co liczba Lefschetza.

PRZYKŁAD 3.28. W pracach [**Sc3, Zh**] zdefiniowano inną relatywną liczbę Nielsena $N(f, X, A)$:

Klasę Nielsena f nazywam *zwyczajną klasą Nielsena* jeśli zawiera istotną klasę Nielsena $f|_A$. Przez $N(f, f|_A)$ oznaczamy ilość zwyczajnych i istotnych klas Nielsena f. Definiujemy:

$$N(f, X, A) = N(f) + N(f|_A) - N(f, f|_A).$$

W twierdzeniu 3.24 liczby $N(m \circ g, \mathrm{cl}\,(W_0 \setminus W_0^{--}))$ nie można również zastąpić liczbą $N(m \circ g, W_0, W_0^{--})$.

By to pokazać, rozważmy homotopię F zadaną potokiem generowanym przez równanie różniczkowe na płaszczyźnie: $z' = \overline{z}$ ($z = (x, y) \in \mathbb{C}$), daną wzorem:

$$F(t, (x, y)) = (xe^t, ye^{-t}).$$

Niech $B = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Łatwo sprawdzić, że $W = [0, 1] \times B$ jest segmentem dla $F : [0, 1] \times B \to \mathbb{C}$ ($g = F_0 = \mathrm{id}\,_B$), dla którego $W_0^{--} = \{\pm 1\} \times [-1, 1]$, a odwzorowanie monodromii m jest identycznością na parze (W_0, W_0^{--}). Okazuje się, że $N(m, W_0, W_0^{--}) = 2$ i $N(m, \mathrm{cl}\,(W_0 \setminus W_0^{--})) = 1$. Tymczasem, $f(x, y) = F(1, (x, y)) = (ex, e^{-1}y)$ ma dokładnie jeden punkt stały $(0, 0)$.

ROZDZIAŁ 4

Funkcje wiodące generują segmenty izolujące

Okazuje się, że teoria segmentów izolujących w wykrywaniu rozwiązań okresowych, ograniczonych i zanikających jest ogólniejsza i skuteczniejsza niż klasyczna teoria funkcji wiodących. Mówiąc dokładniej, w wielu przypadkach, gdy spełnione są założenia twierdzeń o funkcjach wiodących, można również skonstruować segment izolujący, którego istnienie implikuje tezę twierdzenia.

Po raz pierwszy zależność pomiędzy funkcjami wiodącymi i segmentami izolującymi rozważana była w pracy [**Ko1**]. Z niej pochodzi twierdzenie 4.1. Pozostałe twierdzenia z tego rozdziału nie były do tej pory publikowane.

4.1. Przypadek niezależny od czasu

Rozważmy równanie różniczkowe:

$$x' = f(t, x), \tag{4.1}$$

gdzie $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest ciągła i lokalnie lipschitzowska ze względu na x.

TWIERDZENIE 4.1. *Załóżmy, że $V_1, \ldots, V_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest układem zupełnym funkcji wiodących dla pola wektorowego f. Wtedy istnieje trywialny segment izolujący W nad przedziałem $[a, b]$ dla równania (4.1), spełniający warunek:*

$$L_W = (-1)^n \operatorname{Ind} V_1.$$

W szczególności, jeśli $\operatorname{Ind} V_1 \neq 0$, *to* $L_W \neq 0$.

DOWÓD. Niech R będzie takie, że (2.2) jest prawdą dla każdego V_i poza D_R.

Definiuję:

$$M = \max_{i \in \{1,\ldots,k\}} \max_{\|x\| \leq R} |V_i(x)|.$$

Wybieram dowolne $c > M$ i definiuję:

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall i \in \{1, \ldots k\} \; -c \leq V_i(x) \leq c\}.$$

Z definicji stałej M i warunku (2.2), c i $-c$ są wartościami regularnymi V_i dla każdego $i \in \{1, \ldots k\}$. Zauważmy, że ze względu na warunek koercytywności zupełnego układu funkcji wiodących zbiór B musi być zwarty.

B jest blokiem izolującym dla lokalnego układu dynamicznego na $\mathbb{R}^n$ generowanego przez równanie

$$x' = f(0,x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

o poniżej zdefiniowanych zbiorach wejścia i wyjścia:

$$B^- = \{x \in B : \exists i \in \{1,\dots k\}\ V_i(x) = c\},$$
$$B^+ = \{x \in B : \exists i \in \{1,\dots k\}\ V_i(x) = -c\}.$$

Oczywiście, $D_R \subset B$. Wykorzystując (2.2) i obserwację 4.2 z [**S1**], można zauważyć, że

$$W = [a,b] \times B$$

jest segmentem izolującym nad $[a,b]$ o istotnych zbiorach wyjścia i wejścia zadanych przez równości:

$$W^{--} = [a,b] \times B^-, \quad W^{++} = [a,b] \times B^+.$$

Pokażemy, że $L(\mu_W) = (-1)^n \mathrm{ind}\, V_1$. Korzystając z warunku (2.2) i aksjomatu homotopii stopnia Brouwera otrzymujemy:

$$\mathrm{ind}\, V_1 = d(f(0,\cdot)|_{D_R}).$$

Jednocześnie, W jest trywialnym segmentem izolującym, zatem

$$L_W = \chi(B) - \chi(B^-).$$

W tym miejscu skorzystamy z poniższego lematu, pochodzącego z [**S2**]:

Lemat 4.2 (Mrozek, Srzednicki). *Jeśli B jest blokiem izolującym dla f, takim że B, B^- są ENR-ami, to*

$$d(f|_{\mathrm{int}\, B}) = (-1)^n(\chi(B) - \chi(B^-)).$$

Jako, że B w rozważanej sytuacji jest blokiem izolującym dla $\dot{x} = f(0,x)$, z powyższego lematu i aksjomatu wycinania stopnia Brouwera otrzymujemy:

$$\chi(B) - \chi(B^-) = (-1)^n d(f(0,\cdot)|_{\mathrm{int}\, B}) = (-1)^n d(f(0,\cdot)|_{D_R}).$$

Łącząc powyższe równości, otrzymujemy tezę twierdzenia.

□

Powyższe twierdzenie oznacza, że jeśli istnieje układ zupełny funkcji wiodących, który wymusza (dzięki niezerowemu indeksowi) istnienie rozwiązania zagadnienia :

$$x' = f(t,x); \quad x(a) = x(b)$$

to istnieje również segment izolujący, który daje nam dokładnie te same informacje. Ponadto, jeśli równanie:

$$x' = f(t,x),$$

gdzie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest funkcją ciągłą, T-okresową ze względu na t i lokalnie lipschitzowską ze względu na x posiada rozwiązanie okresowe, wykrywane przez twierdzenie Krasnosielskiego, to istnieje okresowy segment izolujący nad $[0, T]$, który również takie rozwiązanie wykrywa.

Rozważmy teraz sytuację następującą: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Wtedy z Twierdzenia 4.1 natychmiast otrzymujemy:

Wniosek 4.3. *Załóżmy, że $V_1, \ldots, V_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest układem zupełnym funkcji wiodących dla pola wektorowego f i $\operatorname{Ind} V_1 \neq 0$. Wtedy istnieje ciąg trywialnych segmentów izolujących W^j nad przedziałami $[-j, j]$ dla równania $x' = f(t, x)$ taki, że dla każdego j, $L_{W^j} \neq 0$.*

Warto zauważyć, że z tego twierdzenia i wniosku 3.14 natychmiast wynika twierdzenie Krasnosielskiego o istnieniu rozwiązań ograniczonych.

Uważnie analizując dowód twierdzenia 4.1 można zauważyć, że twierdzenie o istnieniu odpowiednich rozwiązań na podstawie istnienia zupełnego układu funkcji wiodących można osłabić. Wystarczy bowiem, by funkcje wiodące spełniały warunek (2.2) na poziomicach c i $-c$ (gdzie c pochodzi z dowodu twierdzenia 4.1).

Przykład 4.4. Twierdzenia z tego rozdziału pokazują, że istnienie zupełnego układu funkcji wiodących gwarantuje istnienie segmentu izolującego, który daje te same informacje o istnieniu rozwiązań odpowiednich zagadnień. Naturalnie, powstaje pytanie, czy twierdzenie odwrotne mogłoby być prawdziwe. Odpowiedź jest negatywna.

Dowodzi się, że poniższy układ dynamiczny zadany na płaszczyźnie zespolonej równaniem:

$$z' = e^{it}\overline{z}^n, \quad z \in \mathbb{C}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

posiada segment izolujący W nad $[0, 2\pi]$, taki, że $L_W = 1$ ([**S1, S2, SWZ**]).

Jednakże dla pola wektorowego $f(t, z) = e^{it}\overline{z}^n$ funkcja wiodąca nie istnieje, gdyż dla ustalonego z wektor $f(t, z)$ wykonuje pełny obrót, gdy t zmienia się od 0 do 2π, tak więc nie może mieć stale dodatniego iloczynu skalarnego z żadnym stałym wektorem.

4.2. Przypadek zależny od czasu

Również w przypadku funkcji wiodących zależnych od czasu, istnieją segmenty izolujące, które pozwalają uprościć dowody twierdzeń. Zgodnie z wcześniejszą zapowiedzią, udowodnimy Twierdzenie 2.26.

Dowód. Niech r, G, f, V_G^i oznaczają to samo, co w definicji układu zupełnego funkcji G-wiodących i wypowiedzi twierdzenia 2.26.

Definiujemy:

$$M = \max_{i\in\{1,\dots,k\}} \max_{\|x\|\leq r} |V_G^i(x)|.$$

Niech $\gamma = M + 1$. Definiujemy:

$$W^j = \{(t,x) \in [-j,j] \times \mathbb{R}^n : \forall_{i\in\{1,\dots k\}} - \frac{\gamma}{G(t)} \leq V_i^G(x) \leq \frac{\gamma}{G(t)}\}.$$

Jak w twierdzeniu 4.1, $\frac{\gamma}{G(0)}$ i $-\frac{\gamma}{G(0)}$ są wartościami regularnymi V_i dla każdego $i \in \{1,\dots k\}$ (z definicji funkcji G-wiodących), a G jest klasy C^1, co gwarantuje wystarczającą dla naszych celów regularność zbioru W^j i jego brzegu. Ze względu na warunek koercytywności zupełnego układu funkcji G-wiodących zbiór W^j musi być zwarty.

Wtedy W^j jest g-segmentem izolującym liniowym trywialnym dla funkcji $g : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto \frac{G(-j)}{G(j)}x \in \mathbb{R}^n$ nad $[-j,j]$ i dla homeomorfizmu prostującego $h(t,x) = (t, \frac{G(t)}{G(-j)}x)$, o poniżej zdefiniowanych zbiorach istotnego wyjścia i wejścia:

$$W^{j--} = \{(t,x) \in \ W^j : \exists i \in \{1,\dots k\}\ V_i(x)G(t) = \gamma\},$$

$$W^{j++} = \{(t,x) \in \ W^j : \exists i \in \{1,\dots k\}\ V_i(x)G(t) = -\gamma\}.$$

.

Z przykładu 3.4 wynika, że $L_{W^j,g} = \chi(W^j_{-j}) - \chi(W^{j--}_{-j})$.

Jednocześnie, funkcje V_G^i tworzą układ zupełny funkcji wiodących dla równania $x' = f(-j,\cdot)$. Jak w dowodzie twierdzenia 4.1, zbiór: $Z^j = [-j,j] \times W^j_{-j}$ jest trywialnym okresowym segmentem izolującym dla pola wektorowego $f(-j,\cdot)$ z istotnym zbiorem wyjścia $Z^{j--} = [-j,j] \times W^{j--}_{-j}$.

Z twierdzenia 4.1 i własności trywialnych segmentów izolujących otrzymujemy:

$$0 \neq (-1)^n \mathrm{ind}\, V_G^1 = L_Z = \chi(W^j_{-j}) - \chi(W^{j--}_{-j}) = L_{W^j,g}.$$

Korzystamy teraz z twierdzenia 3.13 dla ciągu g-segmentów izolujących $\{W^j\}_{j=1}^{\infty}$, otrzymując tezę twierdzenia 2.26.

Wreszcie, wniosek 3.14 kończy dowód istnienia rozwiązań zanikających, przy koercytywnej funkcji G.

□

Na koniec, udowodnimy twierdzenie 2.30. Warto zwrócić uwagę, że założenia twierdzenia można jeszcze odrobinę osłabić, zakładając jedynie, że V_1 jest funkcją wiodącą na zbiorze $A_1' = \{(t,\xi,z) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^3 : \ ||\xi|| \leq \varphi(t),\ z = \psi(t)\}$, a V_2 jest funkcją wiodącą na zbiorze $A_2' = \{(t,\xi,z) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^3 : \ ||\xi|| \leq \varphi(t),\ z = -\psi(t)\}$.

DOWÓD. Niech

$$W = \{(t,\xi,z) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^3 : \ V_i(t,\xi,z) \leq 0, \ i = 1,2,3\} =$$
$$= \{(t,\xi,z) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^3 : \ z \leq |\psi(t)|, \ ||\xi|| \leq \varphi(t)\},$$
$$W^n = W_{[0,n]} = W \cap [0,n] \times \mathbb{R}^3.$$

W można sobie wyobrazić jako walec, kurczący się w miarę dążenia z czasem do nieskończoności (ze względu na definicję funkcji ψ i φ). Każde W^n jest g-segmentem izolującym dla $g : \mathbb{R}^3 \ni (\xi,z) \mapsto (\frac{\varphi(0)}{\varphi(n)}\xi, \frac{\psi(0)}{\psi(n)}z) \in \mathbb{R}^3$ (g jest homeomorfizmem dla każdego n i $g(W_n) = W_0$) i z homeomorfizmem prostującym $h(t,\xi,z) = (t, \frac{\varphi(t)}{\varphi(0)}\xi, \frac{\psi(t)}{\psi(0)}z)$. Podstawy tych walców są zbiorem istotnego wejścia ($W^{n++} = \{(t,\xi,z) \in W^n : |z| = \psi(t)\} = \{(t,\xi,z) \in W^n : V_1 = 0$ lub $V_2 = 0\}$), a ich pobocznice tworzą zbiór istotnego wyjścia ($W^{n--} = \{(t,\xi,z) \in W^n : \ ||\xi|| = \varphi(t)\} = \{(t,\xi,z) : V_3 = 0\}$).

W tym momencie skorzystamy z obserwacji 3.15 dla $a = 0$ i ciągu g-segmentów izolujących W^n. Otrzymujemy w szczególności spójność zbioru $A = N \cup W_0^{++}$, gdzie N jest zbiorem takich punktów $(\xi_0, z_0) \in W_0$, że istnieje $(\xi,z)(\cdot)$ rozwiązanie układu (2.16), takie, że dla $(\xi,z)(0) = (\xi_0,z_0)$ i wykres $(\xi,z)(\cdot)$ zawiera się w W. Innymi słowy (z definicji W), N jest zbiorem punktów początkowych rozwiązań prawostronnie zanikających takich, że $||\xi(0)|| < \varphi(0), \ z(0) = z_0$. Ze spójności A i definicji $W_0^{++} = \{(0,\xi,z) \in W_0 : \ z = \psi(0)\} \cup \{(0,\xi,z) \in W_0 : \ z = -\psi(0)\}$ otrzymujemy, że dla każdego $z_0 \in [-\psi(0);\psi(0)]$, $N \cap (\mathbb{R}^2 \times \{z_0\}) \neq 0$. □

Dodatek A: Rozwój teorii funkcji wiodących

Teoria funkcji wiodących nie ogranicza się do przedstawionych wcześniej twierdzeń. We właściwej części pracy przedstawiłem główne, klasyczne wyniki tej teorii. Były one punktem wyjścia dla dalszych badań. Ich przedmiotem było przede wszystkim pytanie: jak bardzo da się uogólnić definicję funkcji wiodącej, by nadal uzyskiwać istotne twierdzenia o rozwiązaniach odpowiednich równań.

Uogólnione funkcje wiodące

Osłabianiem założeń twierdzeń o pojedynczej funkcji zajmował się przede wszystkim Jean Mawhin. Najsilniejsze rezultaty uzyskał w pracach [**KKM, MW1, MT1**].

Definicja 4.5. Niech $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. f jest *funkcją Carathéodory'ego*, jeśli:

- $f(t,\cdot)$ jest ciągła dla prawie każdego $t \in \mathbb{R}$
- $f(\cdot,x)$ jest mierzalna dla każdego x i $||f(t,x)|| \leq \phi(t)$ dla każdego x i pewnej funkcji lokalnie całkowalnej ϕ.

Rozważmy równanie

$$x' = f(t,x), \tag{4.2}$$

gdzie $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest funkcją Carathéodory'ego.

Definicja 4.6. Niech $G \subset \mathbb{R}^n$. *Uogólnioną funkcją wiodącą dla f na G* nazywamy $V : G \to \mathbb{R}$ funkcję klasy C^1 taką, że:

- $\nabla V \neq 0$ dla każdego $x \in G$,
- $\nabla V(x)\cdot f(t,x) \geq 0$ dla prawie wszystkich $t \in \mathbb{R}$ i wszystkich $x \in G$.

Poniżej przedstawiam najmocniejsze jak dotąd twierdzenie wykrywające rozwiązania odpowiednich zagadnień przy zastosowaniu uogólnionych funkcji wiodących.

Twierdzenie 4.7 (Mawhin,Thompson). *Niech $V \in C^1(\mathbb{R}^n)$ będzie uogólnioną funkcją wiodącą dla funkcji Carathéodory'ego f na $V^{-1}(0)$, a $V^0 = V^{-1}((-\infty,0))$ będzie zbiorem ograniczonym, niepustym. Jeśli $d(\nabla V|_{V^0}) \neq 0$, to dla równania (4.2) istnieje rozwiązanie absolutnie ciągłe $x(\cdot)$ na przedziale $[a,b]$ takie, że $x(t) \in \overline{V^0}$ dla $t \in (a,b)$ i $x(a) = x(b)$.*

W szczególności, takie rozwiązanie istnieje, gdy V jest funkcją parzystą lub gdy istnieje $p \in \mathbb{R}^n$ takie, że dla każdego $x \in \partial V^0$ zachodzi $\nabla V(x) \cdot (x-p) > 0$.

Dodatkowo, istnieje też rozwiązanie $x(\cdot)$ absolutnie ciągłe na $\mathbb{R}$, takie, że $x(t) \in \overline{V^0}$ dla $t \in \mathbb{R}$.

Uśrednione funkcje wiodące

Kolejnym możliwym uogólnieniem pojęcia funkcji wiodących jest „uśrednienie" charakteryzującej je nierówności. Wyniki uzyskane dzięki temu podejściu przedstawię za artykułami [**M2, MW1**].

Niech $J = [a,b]$, a $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie funkcją Caratheodory'ego. Dla $x \in \mathbb{R}^n$ przez c_x oznaczamy funkcję stałą: $c_x(t) = x$, dla każdego $t \in J$. Niech $C_J^\# = \{g \in C(J, \mathbb{R}^n) : \ g(a) = g(b)\}$. Dla $\Gamma \subset C_J^\#$ definiujemy $C_\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : \ c_x \in \Gamma\}$. Jeśli $G \subset \mathbb{R}^n$ to oznaczamy $\Sigma_G = \{x \in C_J^\# : \forall_{t \in J}\, x(t) \in G\}$.

Definicja 4.8. Niech $\Gamma \subset C_J^\#$ będzie zbiorem niepustym. $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ jest *uśrednioną funkcją wiodącą na* Γ dla (4.2) jeśli zachodzą następujące warunki:

- $\nabla V(x) \neq 0$ dla każdego $x \in C_\Gamma$;
- $\int_a^b \nabla V(x(t)) \cdot f(t, x(t)) dt \geq 0$ dla każdego $x \in \Gamma$.

Każda uogólniona funkcja wiodąca na G jest uśrednioną funkcją wiodąca na Σ_G. Jeśli (4.2) jest równaniem autonomicznym, to każda uśredniona funkcja wiodąca na Γ jest uogólnioną funkcją wiodącą na C_Γ.

Twierdzenie 4.9 (Mawhin,Ward). *Jeśli istnieje funkcja $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ taka, że zachodzą poniższe warunki:*

- *$V^{-1}((-\infty, 0)) \neq \emptyset$, a zbiór $V^{-1}((-\infty, r))$ jest ograniczony, dla*

$$r = \max\{(b-a) \max_{u \in V^{-1}(0)} |\nabla V(u)|^2, \max_{u \in V^{-1}(0)} \int_a^b |\nabla V(u) \cdot f(t,u)| dt\};$$

- *V jest uśrednioną funkcją wiodącą na $\Sigma_{\mathbb{R}^n \setminus V^{-1}((-\infty,0))}$ dla (4.2);*
- *$d(\nabla V|_{V^{-1}((-\infty,0))}) \neq 0$.*

to zagadnienie: $x' = f(t,x)$; $f(a) = f(b)$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie x, takie, że dla każdego $t \in J$, $x(t) \in V^{-1}((-\infty, r])$.

Wniosek 4.10. *Jeśli dla zagadnienia $x' = f(t,x)$; $f(a) = f(b)$ istnieje uśredniona funkcja wiodąca V taka, że $\lim_{||x|| \to \infty} |V(x)| = +\infty$, wtedy zagadnienie to posiada rozwiązanie.*

Pojęcie uśrednionej funkcji wiodącej nie pozwala na wykrywanie rozwiązań ograniczonych na całej osi $\mathbb{R}$, gdyż oszacowanie ograniczenia na rozwiązanie w twierdzeniu 4.9 zależy od różnicy $(b-a)$.

Asymptotyczne funkcje wiodące. W [**M3**] pojawiło się też pojęcie asymptotycznej funkcji wiodącej (inspirowane wynikami z [**Sch**]).

DEFINICJA 4.11. $V \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ jest *asymptotyczną funkcją wiodącą* dla (4.2), jeśli istnieje $a \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ taka, że:

- $\nabla V(x) \cdot f(t,z) \leq a(t)$ dla prawie każdego $t \in J$ i każdego $x \in \mathbb{R}^n$;
- $\int_a^b \limsup_{|x| \to +\infty} \nabla V(x) \cdot f(t,x) dt > 0$.

TWIERDZENIE 4.12. *Każda asymptotyczna funkcja wiodąca dla* (4.2) *jest też uśrednioną funkcją wiodącą na* $\Sigma_{\mathbb{R}^n \setminus D_r}$ *dla* (4.2)*, dla wszystkich, odpowiednio dużych* r.

WNIOSEK 4.13. *Jeśli dla zagadnienia* $x' = f(t,x)$; $f(a) = f(b)$ *istnieje asymptotyczna funkcja wiodąca* V *taka, że* $\lim_{||x|| \to \infty} |V(x)| = +\infty$*, wtedy zagadnienie to posiada rozwiązanie.*

Przypadek zależny od czasu. Próbę uogólnienia pojęcia funkcji wiodącej na funkcje zależne od czasu podjęli V.Lagoda i I.Parasyuk w nieopublikowanej jeszcze pracy [**LP**]. Uzyskali oni wynik nie tylko wykrywający rozwiązanie ograniczone, ale też oszacowanie zbioru, w którym takie rozwiązanie się mieści, kosztem wzmocnienia założeń twierdzenia 2.32.

W tym podrozdziale rozważamy równanie: $x' = f(t,x)$, gdzie $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

DEFINICJA 4.14. Funkcję $W(\cdot) \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ nazywamy *przestrzennie koercywną*, jeśli dla każdego $t \in \mathbb{R}$ funkcja $W_t(\cdot) = W(t, \cdot)$ spełnia następujące warunki:

- $W_t^{-1}(0) \neq \emptyset$;
- $\lim_{||x|| \to \infty} W_t(x) = \infty$.

Jeśli dodatkowo $W(\cdot) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ i $||\frac{\partial W_t(x)}{\partial x}|| > 0$, gdy tylko $W_t(x) > 0$, to W nazywamy *regularną funkcją przestrzennie koercywną.*

Funkcję W można interpretować jako uogólnioną, zależną od czasu normę na $\mathbb{R}^n$. Lagoda i Parasyuk zajmowali się szacowaniem wartości $W(t, x(t))$, gdzie $x(\cdot)$ jest rozwiązaniem danego równania.

DEFINICJA 4.15. Dla przestrzennie koercywnej funkcji $W(\cdot)$, globalne rozwiązanie $x(t)$ danego układu jest *W-ograniczone* jeśli $\sup_{t \in \mathbb{R}} W(t, x(t)) < \infty$. W nazywamy wtedy *funkcją szacującą.*

Warto zwrócić uwagę, że ani rozwiązanie W-ograniczone nie musi być ograniczone w zwykłym sensie, ani rozwiązanie ograniczone ze względu na normę w R^n nie musi być W-ograniczone.

Jak w przypadku pracy [**Or1**], dla funkcji $U(t,x)$ definiujemy pochodną U wzdłuż trajektorii potoku w rozszerzonej przestrzeni fazowej:

$$\dot{U}_f = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} f. \tag{4.3}$$

DEFINICJA 4.16. Funkcję $V(\cdot) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ nazywamy *wiodącą zgodną z W*, gdzie W jest funkcją przestrzennie koercywną, jeśli $W^{-1}((0,\infty)) \neq \emptyset$ i dla dowolnych $(t,x) \in W^{-1}((0,\infty))$ zachodzi $\dot{V}_f(t,x) > 0$.

DEFINICJA 4.17. Regularną funkcję przestrzennie koercywną W wraz ze zgodną funkcją wiodącą V nazywamy *$W-V$-parą* dla pola f.

TWIERDZENIE 4.18. *Załóżmy, że dla pola wektorowego f istnieje $W-V$-para spełniająca dodatkowo warunki:*

A. *Istnieją liczby v^*, v_* $(v^* > v_*), c^* > 0, c_* \in [0,\infty]$, a także spójna składowa $\mathfrak{V}$ zbioru $V^{-1}((v_*, v^*))$ taka, że dla każdego $t \in \mathbb{R}$, v^* należy do obrazu funkcji $V_t(\cdot) = V(t,\cdot)$, $W^{-1}((-\infty,0]) \subset \mathfrak{V}$ i dla każdego $(t,x) \in \mathfrak{V} \cap W^{-1}((0,\infty))$ zachodzi:*

$$-c_* \dot{V}_f(t,x) \leq \dot{W}_f(t,x) \leq c^* \dot{V}_f(t,x).$$

Niech

$$v_0(t) := \min\{V_t(x) : x \in V_t^{-1}(0)\} > v_*; \;\; v_0 := \inf_{t\in\mathbb{R}} v_0(t),$$

$$v^0(t) := \max\{V_t(x) : x \in V_t^{-1}(0)\} < v^*; \;\; v^0 := \inf_{t\in\mathbb{R}} v^0(t).$$

Oznaczamy też zbiór wyjścia $\mathfrak{V}^{se} = \partial\mathfrak{V} \cap V^{-1}(v^*)$.

B. *Funkcja:*

$$\alpha(t) = \inf\{\dot{V}_f(t,x) : \; x \in \mathfrak{V}_t \cap W^{-1}((0,\infty)\}$$

spełnia warunek $\int_{-\infty}^{0} \alpha(s)ds = \int_0^{\infty} \alpha(s)ds = +\infty$.

C. *Dla odpowiednio dużych (w sensie wartości bezwzględnej) ujemnych t, spełniony jest następujący warunek: istnieje ograniczony podzbiór M_t zbioru $\mathfrak{V}_t \cup \mathfrak{V}_t^{se}$ taki, że zbiór $\{t\} \times (M_t \cap \mathfrak{V}_t^{se})$ jest retraktem zbioru $\{(s,x) \in \mathfrak{V}^{se} : s \geq t\}$, ale nie jest retraktem $\{t\} \times M_t$.*

Wtedy równanie $x' = f(t,x)$ posiada rozwiązanie W-ograniczone $x_*(t)$, spełniające dla każdego $t \in \mathbb{R}$ nierówności:

$$W(t, x_*(t)) \leq \frac{c_* c^*}{c_* + c^*}(v^0 - v_0),$$

$$v_0 \leq V(t, x_*(t)) \leq v^0.$$

Porównując ten rezultat z klasycznymi twierdzeniami, warto zauważyć, że warunek A implikuje, że cV i $cV - W$ tworzą zupełny układ funkcji wiodących dla każdego $c > c^*$, a warunek C zastępuje założenie o indeksie tych funkcji.

Funkcje wiodące dla odwzorowań

Innym naturalnym rozszerzeniem pojęcia funkcji wiodących jest badanie możliwości wykrywania rozwiązań ograniczonych dla układów dynamicznych zadanych odwzorowaniami. W pracy [**M3**] ten temat został dokładnie przeanalizowany. Wyniki przedstawię poniżej.

Rozważmy semiukład dynamiczny zadany przez:

$$x_{m+1} = g_m(x_m), \; m \in \mathbb{N}, \tag{4.4}$$

gdzie $g_m \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Definicja 4.19. Funkcję $V \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ nazywamy *funkcją wiodącą* dla (4.4), gdy dla każdego m i pewnego $r > 0$, $V(g_m(x)) \geq V(x)$, o ile $||x|| \geq r$.

Twierdzenie 4.20. *Niech $g_m \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Jeśli istnieje V – funkcja wiodąca dla* (4.4) *ze stałą r, taka, że $\lim_{||x||\to+\infty} V(x) = +\infty$ i dodatkowo:*

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \max_{||x||\leq r} ||g_m(x)|| < +\infty, \tag{4.5}$$

to (4.4) *ma rozwiązanie ograniczone.*

W szczególności, jeśli $g_m = g$ dla każdego m i pewnego $g \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, to warunek (4.5) jest spełniony.

Przykład 4.21. Warunek (4.5) jest istotny. By to zauważyć, wystarczy rozważyć ciąg funkcji $g_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowany następująco:

$$g^m(x) = \begin{cases} m(1 - |x|), \text{ jeżeli } |x| < 1 \\ 0, \text{ w innym wypadku} \end{cases} .$$

Jako, że dla każdego punktu początkowego x_0, $g_0(x_0) = 0$, to każda orbita układu zawiera podciąg nieograniczony.

Bibliografia

[AO] J.M.Alonso, R.Ortega *Global asymptotic stability of a forced Newtonian system with dissipation*, J.Math. Anal. App. 196 (1995), 965-986.

[Av1] C. Avramescu *Asymptotic behavior of solutions of nonlinear differential equations and generalized guiding functions*, Electron. J. Qualit. Theory Differ. Equat., (2003), no. 13, 19.

[BS] N.P.Bhatia, G.P.Szegö *Stability theory of dynamical systems*, Heidelberg, New York; Springer-Verlag Berlin (1970).

[J] B. Jiang, *Lectures on Nielsen Fixed Point Theory.*, Contemp. Math. vol. 14, AMS Providence, 1983.

[JM] J. Jezierski, W. Marzantowicz, *Homotopy Methods in Topological Fixed and Periodic Point Theory.*,Series: Topological Fixed Point Theory and Its Applications, Vol. 3 , Springer , (2005), XI, 319 p., ISBN: 1-4020-3930-1.

[KKM] A.M Krasnolsel'skii, M.A Krasnosel'skii, J.Mawhin *Differential inequalities in problems of forced nonlinear oscillations*, Nonlinear Anal. 25 (1995), nos 9-10, 1029–1036

[Ko1] G. Kosiorowski, *Remark on Krasnosielski's guiding functions and Srzednicki's periodic segments*, Nonlinear Anal. 70 (2009), no. 6, 2145–2149

[Ko2] G. Kosiorowski, *On compactness of the set of bounded orbits*, w recenzji (od 2008).

[KP] M.A. Krasnolsel'skii, A.I. Perov, *On a certain principle of the existence of bounded periodic solutions and almost periodic solution of ordinary differential equations*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR (1958), 235-238 (po rosyjsku).

[Kr1] M. A. Krasnolsel'skii *Functional Analysis and Topology in Non-Linear Problems of Differential and Integral Equations* Proc. Fourth All-Union Congress, 1961, Vol. 1, Izdat. Akad. Nauk. SSSR, Leningrad, 120-123 (po rosyjsku)

[Kr2] M. A. Krasnolsel'skii *The Operator of Translation along the Trajectories of Differential Equations* Amer. Math. Soc. Providence, 1968

[KS] M.A. Krasnolsel'skii, V.V. Strygin, *Some criteria of the existence of periodic solutions of ordinary differential equations*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 156 (1964), 1022-1024.

[KW] G.Kosiorowski, K.Wójcik *Topological method for detecting fixed points of maps homotopic to selfmaps of compact ENRs*, w recenzji (od 2010).

[KZ] M.A. Krasnolsel'skii, P.P. Zabreiko, *Geometrical Methods of Nonlinear Analysis*, Nauka, Moskwa, 1975 (po rosyjsku), angielskie tłumaczenie: Springer, Berlin, 1984.

[LP] V. Lagoda, I. Parasyuk, *Existence of V-bounded solutions for nonautonomous nonlinear systems via the Wazewski topological principle*, arXiv:0911.4643v3 (2010)

[M2] J.Mawhin *Recent results on the method of guiding functions for periodic or bounded solutions of ordinary differential equations*, Proceedings of the Prague Mathematical Conference 1996, Icaris, Praha (1997), 195–200.

[M3] J.Mawhin *Bounded solutions: differential vs difference equations*, Electronic Journal of Differential Equations, Conf. 17 (2009), 159–170.

[MT1] J.Mawhin, H.B.Thompson *Periodic or Bounded Solutions of Carathéodory Systems of Ordinary Differential Equations*, J. Dyn. Differ. Equat., 15 (2003), no. 23, 327334.

[MW1] J.Mawhin, J.R. Ward Jr *Guiding-like functions for periodic or bounded solutions of ordinary differential equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 8 (2002), 39–54.

[Or1] R. Ortega, *Retracts, fixed point index and differential equations*, R. Acsd. Cien. Serie A. Mat., 102 (2008), 89-100.

[S1] R. Srzednicki *Periodic and bounded solutions in blocks for time-periodic nonautonomous ordinary differential equations* Nonlinear Anal. TMA vol 22 (1994), 707-737

[S2] R. Srzednicki, *Ważewski method and Conley index.*, w „Handbook of Differential Equations" vol 1, Edited by A. Canada, P. Drabek, A. Fonda, 591-684

[S3] R. Srzednicki, *On solutions of two-point boundary value problems inside isolating segments*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 13 (1999), no. 1, 73–89

[S4] R.Srzednicki *On rest points of dynamical system*, Fundamenta Mathematicae 126 (1985), 69-80.

[Sc1] H. Schirmer, *On the location of fixed point sets of pairs of spaces*, Topol. Appl. 30 (1988), 253-266.

[Sc2] H. Schirmer, *A Survey of Relative Nielsen Fixed Point Theory*, Contemp. Math. vol. 152, 291-309, AMS Providence, 1993.

[Sc3] H. Schirmer, *A relative Nielsen number*, Pacific J. Math. 122 (1986), 65-72

[Sch] S.Schwabik, *Generalized Ordinary Differential Equations*, World Scientific, Singapore (1992)

[SW] R. Srzednicki, K. Wójcik, *A geometric method for detecting chaotic dynamics* J. Differential Equat. 135 no. 1 (1997), 66-82

[SWZ] R. Srzednicki, K. Wójcik, P. Zgliczyński, *Fixed point results based on Ważewski method* , in "Handbook of topological fixed point theory" Ed: R. Brown, M. Furi, L. Górniewicz, B. Jiang, 903-941, Kluwer 2004

[TQ] H.Tusen, Z. Qi *A criterion on compactness of the set of bounded solutions*, Chaos, Solitons and Fractals 21 (2004) 983-988

[WZ1] K.Wójcik, P.Zgliczyński *On existence of infinitely many homoclinic solutions*, Monatsh. Math.130 (2000), 155–160

[Zh] X. Zhao, *Relative Nielsen Theory*, 659-684 in Handbook of Topological Fixed Point Theory, Ed: R. F. Brown, M. Furi, L. Górniewicz, B. Jiang, Springer 2005