Katalog pytań na egzamin licencjacki

1. Rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą (zmienna rzeczywista).
2. Rozwiązywać równania i nierówności pierwiastkowe z jedną niewiadomą.
3. Rozwiązywać równania i nierówności z wartością bezwzględną, z jedną niewiadomą.
4. Rozwiązywać nierówności wymierne z jedną niewiadomą.
5. Rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze.
6. Rozwiązywać równania i nierówności logarytmiczne.
7. Rozwiązywać równania i nierówności trygonometryczne (z potencjalnym zastosowaniem prostych wzorów trygonometrycznych i wzorów redukcyjnych).
8. Rozwiązywać graficznie na płaszczyźnie nierówności zadane przez funkcję dwóch zmiennych rzeczywistych.
9. Rozwiązywać równania kwadratowe z jedną niewiadomą (zmienna zespolona).
10. Dowodzić twierdzeń o liczbach naturalnych za pomocą zasady indukcji matematycznej.
11. Przy zadanej rodzinie zbiorów indeksowanych jednym, dwoma lub trzema wskaźnikami znaleźć wynik operacji sumy/przecięcia po odpowiedniej rodzinie/rodzinach indeksów.
12. Dla zadanego zbioru skończonego A wypisać zbiór jego podzbiorów $P(A)$.
13. Uzasadniać zależności lub podawać kontrprzykłady dla zbiorów połączonych działaniami „$\cup$” „$\cap$” „$\setminus$” „$\times$” oraz relacjami „$\subset$”, „$=$”.
14. Dla zadanych podzbiorów $\mathbb{R}$ znaleźć ich kres górny oraz kres dolny.
15. Przy zadanej relacji, weryfikować, czy jest to relacja równoważności.
16. Dla zadanej relacji równoważności, znaleźć klasy równoważności.
17. Weryfikować, czy zadana funkcja jest surjekcją i injekcją.
18. Przy zadanej funkcji, znaleźć obrazy danych podzbiorów dziedziny i przeciwobrazy danych podzbiorów przeciwdziedziny.
19. Przy zadanej relacji, weryfikować, czy jest to relacja częściowego porządku oraz liniowego porządku.

20. Przy zadanej relacji, weryfikować, czy ta relacja jest odwzorowaniem, a jeśli tak, to wyznaczyć dziedzinę i zbiór wartości.

21. Przy zadanej relacji częściowego porządku, pokazywać przykłady łańcuchów i antyłańcuchów o zadanej mocy.

22. Przy zadanej relacji częściowego porządku, znajdować elementy maksymalne i minimalne.

23. Wykazywać równoliczność z $\mathbb{N}$ zadanych zbiorów przeliczalnych.

24. W przypadku zadanych zbiorów, w szczególności podzbiorów $\mathbb{R}^n$, znajdować ich moc.

25. Obliczać granice ciągów typu $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$.

26. Obliczać granice ciągów typu $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{a}{n})^{w(n)}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{a}{n})^{w(n)}$, gdzie w jest wielomianem.

27. Obliczać granice typu $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - g(x))$, gdzie $f(x) = \sqrt{h(x)}$, a g, h są wielomianami.

28. Obliczać granice typu $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)})$, gdzie f, g są wielomianami.

29. Obliczać granice typu $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(ax)}{g(bx)}$, gdzie f jest funkcją trygonometryczną lub ich kombinacją liniową, a g funkcją trygonometryczną lub ich kombinacją liniową lub wielomianem pierwszego stopnia, $a, b \in \mathbb{R}$.

30. Obliczać granice typu $\lim\limits_{x\to c} f(x)$, gdzie f jest funkcją wymierną, gdzie $c \in \mathbb{R}$ lub $c = +\infty$ lub $c = -\infty$(także granice jednostronne).

31. Obliczać granice typu $\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)}$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ lub $c = +\infty$ lub $c = -\infty$.

32. Dla zadanego ciągu liczb rzeczywistych (a_n) znaleźć jego granicę górną $\limsup\limits_{x\to+\infty} a_n$ oraz granicę dolną $\liminf\limits_{x\to+\infty} a_n$.

33. Obliczać pochodną iloczynu funkcji, ilorazu funkcji, funkcji złożonej jednej zmiennej.

34. Obliczać pochodną funkcji $x \mapsto f(x)^{g(x)}$, gdzie f, g są wielomianami lub funkcjami wymiernymi.

35. Obliczać pochodną funkcji danej całką, w której górna granica całkowania jest zależna od zmiennej, względem której różniczkujemy.

36. Znajdować ekstrema lokalne funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.

37. Znajdować asymptoty pionowe, poziome i ukośne funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.

38. Rozwijać funkcję wykładniczą i trygonometryczną w szereg Taylora w zadanym punkcie.

39. Obliczać całki nieoznaczone typu $\int f(x)g(x)dx$, gdzie f jest jednomianem lub wielomianem co najwyżej drugiego stopnia, a g jedną z funkcji: exponens, sinus, cosinus, logarytm naturalny.

40. Obliczać całki nieoznaczone metodą całkowania przez podstawienie.

41. Obliczać całki nieoznaczone metodą całkowania przez części.

42. Obliczać całki nieoznaczone z funkcji wymiernych.

43. Obliczać całki nieoznaczone typu $\int \sqrt[n]{ax+b}\, dx$.

44. W oparciu o twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej wyznaczyć pochodną funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, odwrotnej do danej (np. pochodną funkcji arcus sinus, arcus tangens).

45. Obliczyć pole podanego obszaru, np. ograniczonego wykresami dwóch funkcji: $\{(x,y)\ :\ a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$.

46. Obliczyć długość krzywej zadanej parametrycznie $(\alpha, \beta) \ni t \mapsto (x(t), y(t))$.

47. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchnią powstałą z obrotu wykresu funkcji dookoła osi odciętych.

48. Obliczyć pole powierzchni powstałej z obrotu wykresu funkcji dookoła osi odciętych.

49. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji różniczkowalnej na przedziale domkniętym.

50. Badać zbieżność (i jej rodzaj) szeregu liczbowego w oparciu o kryteria Cauchy'ego, d'Alemberta, Weierstrassa, Leibniza i warunek konieczny zbieżności szeregów.

51. Wyznaczać punkty, w których zadany szereg funkcyjny jest zbieżny bezwzględnie, zbieżny warunkowo, rozbieżny w oparciu o kryteria Cauchy'ego, d'Alemberta, Weierstrassa, Leibniza i warunek konieczny zbieżności szeregów.

52. Określić przedziały, w których podana funkcja jednej zmiennej rzeczywistej (wielomian, funkcja wymierna, funkcje złożone wykorzystujące funkcję wykładniczą, logarytmiczną, funkcje trygonometryczne) jest rosnąca, malejąca.

53. Określić przedziały, w których podana funkcja jednej zmiennej rzeczywistej (wielomian, funkcja wymierna, funkcje złożone wykorzystujące funkcję wykładniczą, logarytmiczną, funkcje trygonometryczne) jest wypukła do góry, wypukła do dołu (inaczej: wklęsła).

54. Zbadać liniową niezależność danego układu wektorów.

55. Rozwinąć wielomian drugiego stopnia w szereg Fouriera na zadanym przedziale.

56. W oparciu o wzór de Moivre'a wyznaczyć część rzeczywistą lub część urojoną potęgi pewnej liczby zespolonej (np. $\mathrm{Re}\,(\sqrt{3}-i)^{17}$, $\mathrm{Im}\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5$).

57. Uprościć podaną potęgę korzystając ze wzoru Newtona i trójkąta Pascala (np. podać w postaci $a + b\sqrt{2}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$, liczbę $(1-\sqrt{2})^7$).

58. Sprawdzić, czy dane wektory stanowią bazę danej przestrzeni wektorowej.

59. Sprawdzić, czy dana przestrzeń wektorowa jest sumą prostą wskazanych podprzestrzeni.

60. Wyznaczyć bazę dualną do danej.

61. Sprawdzić, czy dany zbiór jest podprzestrzenią wektorową danej przestrzeni wektorowej.

62. Przy danej przestrzeni wektorowej i dwóch jej podprzestrzeniach U, W, wyznaczyć wymiary dla podprzestrzeni U, W, $U \cap W$ oraz $U + W$.

63. Przy danej przestrzeni wektorowej i dwóch jej podprzestrzeniach U, W, podać przykłady baz dla podprzestrzeni U, W, $U \cap W$ oraz $U + W$.

64. Przy danym odwzorowaniu liniowym f wyznaczyć bazę i wymiar przestrzeni $\mathrm{Ker} f$ i $\mathrm{Im} f$.

65. Sprawdzić, czy dane odwzorowanie jest epimorfizmem i monomorfizmem.

66. Znaleźć odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ n, m \in \{1, 2, 3, 4\}$ o zadanym jądrze i obrazie.

67. Wyznaczyć macierz odwzorowania liniowego $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ w danych bazach.

68. Obliczyć wyznacznik macierzy o rozmiarach 2×2, 3×3 i 4×4 i współczynnikach rzeczywistych.

69. Obliczyć iloczyn danych macierzy o współczynnikach rzeczywistych.

70. Weryfikować, czy dana macierz 2×2 lub 3×3 jest odwracalna, w zależności od parametru występującego w macierzy.

71. Odwrócić macierz (odwracalną) o rozmiarach 2×2 lub 3×3 i współczynnikach rzeczywistych.

72. Znaleźć wartości własne i wektory własne (po jednym dla każdej wartości własnej) endomorfizmu przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^2$, którego wielomian charakterystyczny ma tylko rzeczywiste pierwiastki.

73. Znaleźć macierz Jordana endomorfizmu przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^2$ lub $\mathbb{R}^3$, którego wielomian charakterystyczny ma tylko rzeczywiste pierwiastki.

74. Rozwiązać zależny układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi o współczynnikach rzeczywistych.

75. Wyznaczyć macierz formy kwadratowej na $\mathbb{R}^2$ w danej bazie.

76. W danej wektorowej przestrzeni z iloczynem skalarnym ($\mathbb{R}^n$) zbadać prostopadłość wskazanych wektorów.

77. Znaleźć rząd danego odwzorowania liniowego.

78. Przy danej przestrzeni wektorowej z iloczynem skalarnym ($\mathbb{R}^n$) oraz pewnej jej podprzestrzeni wyznaczyć dopełnienie ortogonalne tej podprzestrzeni.

79. Wyznaczyć największy wspólny dzielnik dwóch liczb naturalnych i przedstawić go w postaci kombinacji liniowej (o współczynnikach całkowitych) tych liczb.

80. Rozwiązać konkretnie zadany układ kongruencji liniowych, (podać rozwiązanie ogólne bądź z konkretnie zadanego przedziału liczbowego).

81. Zbadać istnienie/podać rozwiązanie konkretnego liniowego równania diofantycznego, postaci $ax + by = c$.

82. Dla zadanych liczb całkowitych k i m wyliczyć: k mod m z zastosowaniem twierdzeń Fermata lub Eulera.

83. Przy danym zbiorze niepustym X i danym odwzorowaniu $* : X \times X \ni (a, b) \mapsto a * b \in X$ sprawdzić, czy $(X, *)$ jest grupą.

84. W danej grupie sprawdzić, czy dany podzbiór tej grupy jest podgrupą.

85. W prostych przykładach, znajdować wszystkie podgrupy danej grupy.

86. Dla danej grupy nieabelowej i jej podgrupy zbadać normalność tej podgrupy.

87. Dla danej grupy i jej podgrupy normalnej wyznaczyć warstwy względem tej podgrupy (warstwę ustalonego elementu względem tej podgrupy).

88. Dla zadanej grupy G i jej elementu a wygenerować podgrupę przez a bądź wyliczyć rząd elementu a.

89. Dla zadanej grupy G i jej podgrupy normalnej H opisać elementy grupy ilorazowej G/H.

90. Rozkładać daną permutację na iloczyn transpozycji.

91. Rozkładać daną permutację na iloczyn permutacji cyklicznych.

92. Wypisać postać elementów w zadanym pierścieniu ilorazowym, policzyć element odwrotny do zadanego elementu w takim pierś cieniu.

93. Zbadać, czy zadana grupa jest cykliczna.

94. Sprawdzić, czy dane odwzorowanie pomiędzy podanymi grupami jest homomorfizmem/epimorfizmem/monomorfizmem.

95. Wyznaczyć wszystkie dzielniki zera w danym pierścieniu.

96. Wyznaczyć wszystkie elementy odwracalne w danym pierścieniu.

97. Przy danym pierścieniu i danym jego podzbiorze zbadać, czy ten podzbiór jest ideałem w tym pierścieniu.

98. Dla danego pierścienia przemiennego z jedynką A, zbadać nierozkładalność pewnego wielomianu $f \in A[X]$ nad tym pierścieniem i nad ciałem ułamków tego pierścienia.

99. Sprawdzić, czy dane odwzorowanie pomiędzy podanymi pierścieniami jest homomorfizmem/epimorfizmem/monomorfizmem.

100. Mając dany ideał I pierścienia P zbadać, czy I jest pierwszy/maksymalny w P.

101. Znaleźć rozkład na elementy nierozkładalne danego elementu przemiennego pierścienia całkowitego.

102. Sprawdzić, czy dana funkcja jest metryką na danym zbiorze.

103. Przy zadanej metryce znaleźć kule otwarte, domknięte o zadanym środku i promieniu.

104. Przy zadanej rodzinie zbiorów otwartych lub domkniętych w przestrzeni topologicznej (lub metrycznej) znaleźć wnętrze, domknięcie, brzeg zadanych zbiorów.

105. Przy zadanej funkcji rzeczywistej zmiennej rzeczywistej weryfikować jej ciągłość. W szczególności, w przypadku funkcji nieciągłych

    a) podać przykład zbioru otwartego o przeciwobrazie nieotwartym

    b) podać przykład zbioru domkniętego o przeciwobrazie niedomkniętym

    c) podać przykład zbieżnego ciągu argumentów dziedziny, dla którego ciąg wartości nie jest zbieżny

    d) pokazać, że w pewnym punkcie nie jest spełniony warunek z definicji Cauchy'ego ciągłości (z otoczeniami).

106. Weryfikować zwartość podzbiorów $\mathbb{R}^n$.

107. Weryfikować spójność podzbiorów $\mathbb{R}^n$.

108. Znajdować odległość punktu od zbioru w danej przestrzeni metrycznej dla zadanego punktu i zbioru.

109. Przy zadanych podzbiorach $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^2$ weryfikować ich otwartość, domkniętość.

110. Przy zadanych podzbiorach $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^2$ określać liczbę składowych spójnych zbioru, jego brzegu, jego domknięcia, jego wnętrza.

111. Przy zadanych podzbiorach $\mathbb{R}^n$ które nie są przestrzeniami zupełnymi podawać przykłady ciągów Cauchy'ego, które nie mają granicy.

112. Pokazywać na przykładach, że po przekształceniu przez funkcję nieciągłą zwartość i spójność dziedziny nie musi być zachowana.

113. Weryfikować, czy po przekształceniu przez zadaną funkcję w przestrzeniach metrycznych (topologicznych) zachowana zostaje otwartość i domkniętość podzbiorów dziedziny (w szczególności w przypadku funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej).

114. Podzielić dane podzbiory przestrzeni $\mathbb{R}^2$ na grupy tak, aby dowolne dwa zbiory z tej samej grupy były homeomorficzne, a dowolne dwa zbiory z różnych grup nie były homeomorficzne.

115. Sprawdzić różniczkowalność w konkretnych punktach danego odwzorowania $f : U \to \mathbb{R}$, gdzie U jest podzbiorem $\mathbb{R}^2$ lub $\mathbb{R}^3$, w szczególności odwzorowania zdefiniowanego nie według zadanego ogólnego wzoru w badanym punkcie.

116. Obliczyć macierz pochodnej danego odwzorowania różniczkowalnego $f : U \to \mathbb{R}^k$, gdzie U jest podzbiorem $\mathbb{R}^n$ $(n, k \leq 3)$.

117. Wyznaczyć ekstrema lokalne danej funkcji rzeczywistej dwóch zmiennych.

118. Wyznaczyć maksimum i minimum danej funkcji ciągłej określonej na zadanym zwartym podzbiorze $\mathbb{R}^n$ $(n \leq 2)$

119. Wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji określonej na podzbiorze $\mathbb{R}^2$ lub $\mathbb{R}^3$ metodą mnożników Lagrange'a.

120. Wyznaczyć ekstrema lokalne danej funkcji zadanej w postaci uwikłanej za pomocą równania wielomianowego dwóch zmiennych, co najwyżej drugiego stopnia.

121. Obliczyć pole powierzchni figury na płaszczyźnie z wykorzystaniem twierdzenia Fubiniego.

122. Obliczyć objętość bryły w przestrzeni z wykorzystaniem twierdzenia Fubiniego.

123. Obliczać całki podwójne i potrójne z wykorzystaniem zmiana zmiennych: współrzędne biegunowe, sferyczne i walcowe.

124. Obliczać całki krzywoliniowe skierowane i nieskierowane.

125. Sprawdzać, czy dana funkcja jest normą.

126. Sprawdzać, czy dana funkcja jest iloczynem skalarnym.

127. Zbadać holomorficzność funkcji z $\mathbb{C}$ w $\mathbb{C}$ zapisanej we współrzędnych x, y.

128. Rozwiązywać równania różniczkowe rzędu pierwszego o zmiennych rozdzielonych.

129. Rozwiązywać równania różniczkowe rzędu pierwszego liniowe jednorodne.

130. Rozwiązywać równania różniczkowe rzędu pierwszego liniowe niejednorodne.

131. Rozwiązywać proste zadania kombinatoryczne, w których należy określić, na ile sposobów można rozmieścić zadane (rozróżnialne lub nie) przedmioty w podany sposób.

132. Obliczać, ile jest funkcji pomiędzy danymi zbiorami skończonymi spełniających zadane dodatkowe warunki (typu: injektywność, monotoniczność)

133. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia opisanego prostym zadaniem tekstowym (w tym możliwe wykorzystanie podstawowych pojęć kombinatorycznych: (permutacja, wariacja, kombinacja).

134. Obliczyć prawdopodobieństwo pewnego zdarzenia, znając prawdopodobieństwo sumy lub iloczynu tego zdarzenia z innym zdarzeniem lub wiedząc o niezależności tych zdarzeń.

135. Weryfikować, czy podane przykłady zdarzeń są niezależne.

136. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia znając prawdopodobieństwa warunkowe zajścia tego zdarzenia (stosując wzór na prawdopodobieństwo całkowite lub metodą drzewek).

137. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia stosując twierdzenie Bayesa.

138. Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia w schemacie Bernoulliego.

139. Wyznaczyć najbardziej prawdopodobną liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego.

140. Sprawdzać, czy funkcja określona na przestrzeni probabilistycznej jest zmienną losową.

141. Mając dany rozkład wektora losowego (X, Y) sprawdzić czy zmienne X i Y są niezależne.

142. Przy danej zmiennej losowej X o rozkładzie dyskretnym i funkcji $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ znaleźć rozkład zmiennej losowej $\Phi(X)$.

143. Przy danej zmiennej losowej X o rozkładzie absolutnie ciągłym i funkcji $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ znaleźć rozkład zmiennej losowej $\Phi(X)$.

144. Przy danej zmiennej losowej X o rozkładzie absolutnie ciągłej i funkcji $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ znaleźć dystrybuantę rozkładu zmiennej losowej $\Phi(X)$.

145. Mając dany rozkład dyskretny wektora losowego (X, Y) i funkcję $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ znaleźć rozkład zmiennej losowej $\Phi(X, Y)$.

146. Mając daną gęstość rozkładu pewnej zmiennej losowej ξ wyznaczyć wartość oczekiwaną tej zmiennej (lub jej wariancję, dystrybuantę, określić prawdopodobieństwo zdarzenia $\{\omega \, : \, a \leq \xi(\omega) \leq b\}$, wyznaczyć kwantyl podanego rzędu).

147. Mając daną dystrybuantę rozkładu pewnej zmiennej losowej ξ wyznaczyć wartość oczekiwaną tej zmiennej (lub jej wariancję, określić prawdopodobieństwo zdarzeń postaci $\{\omega : a \leq \xi(\omega) \leq b\}$, $\{\omega : a < \xi(\omega) \leq b\}$, $\{\omega : a \leq \xi(\omega) < b\}$, $\{\omega : a < \xi(\omega) < b\}$, wyznaczyć kwantyl podanego rzędu).

148. Mając dany ciąg (kilkunastu) liczb, wyznaczyć odchylenie standardowe (albo: rozstęp, wartość średnią, medianę, górny i dolny kwantyl).

149. Mając dane dwa ciągi złożone z (co najwyżej 20) liczb stanowiących wartości dwóch zmiennych losowych, wyznaczyć współczynnik korelacji tych zmiennych losowych (albo kowariancję tych zmiennych losowych).

150. Rozwiązywać proste zadania tekstowe z zastosowaniem centralnego twierdzenia granicznego.